基于增强的物质点法的非均质弹性材料仿真方法研究

赵 静[1),3)] 唐 勇[1),3)] 李 胜[2),4)] 汪国平[2),4)]

1)(燕山大学信息科学与工程学院 河北 秦皇岛 066004)

2)(北京大学信息科学技术学院 北京 100871)

3)(河北省计算机虚拟技术与系统集成重点实验室 河北 秦皇岛 066004)

4)(北京市虚拟仿真与可视化工程研究中心 北京 100871)

摘 要 在基于物理的仿真领域,近几年流行的物质点法已经成为一种越来越重要的仿真方法.物质点法已经可以仿真雪、物质状态变化、颗粒状的沙子以及粘弹性的泡沫等物理现象.现有的各种复杂物理现象的模拟已经展示了物质点法作为一种通用的求解方法的潜质,然而对于仿真形变体尤其是自然界普遍存在的非均质材质还存在一些不足.当同一网格内部包含多种材质的粒子时,由于背景网格与粒子之间的插值只考虑粒子的几何位置而不包含物质属性信息,导致不同属性的粒子在网格内部表现为"平均化"的运动趋势.为了改进传统物质点法模拟多种材质的缺陷,该文提出了一种模拟非均质弹性材料的仿真方法.首先,在预处理过程中将仿真物体离散表示成粒子,针对物质的不同属性粒子的分布,建立物质边界并确定边界粒子,仿真过程中动态更新边界粒子的位置;其次,引入粒子影响域,区分网格内部具有不同属性的粒子,增加网格内部计算自由度;最后,提出一个判断准则,根据物质边界粒子的位置判定仿真粒子是在背景计算网格上求解还是粒子区域上求解.实验结果表明,利用改进的物质点法能够有效地模拟非均质材质弹性体的形变.与有限元法相比,该文方法在模拟非均质弹性体时可以获得相似的效果,并且在模拟拓扑结构变化的问题以及碰撞处理上更有优势.

关键词 物质点法;非均质弹性材料;粒子区域;物质边界;数值断裂

中图法分类号 TP391 **DOI 号** 10.11897/SP.J.1016.2018.02598

Research of Heterogeneous Elastic Material Simulation Method Based on Enhanced MPM

ZHAO Jing[1),3)] TANG Yong[1),3)] LI Sheng[2),4)] WANG Guo-Ping[2),4)]

1)(*College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei* 066004)

2)(*School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing* 100871)

3)(*The Key Laboratory for Computer Virtual Technology and System Integration of Hebei Province, Qinhuangdao, Hebei* 066004)

4)(*Beijing Engineering Research Center for Virtual Simulation and Visualization, Beijing* 100871)

Abstract For recent years, the material point method (MPM) has been proved to be an important simulation method in the physically-based animation fields. Its capability is well demonstrated with compelling visual simulations of snow, melting and solidifying materials, porous materials like sand and viscoelastic materials like foam, etc. The existing complicate physical phenomenon exhibits its potential to be a unified solver, while it still has some limitations for the elastic materials, especially for the heterogeneous materials which are more general in the nature world. Since the interpolation between the background grids and the particles are based only on the geometry position of the

收稿日期:2016-12-04;在线出版日期:2017-03-17.本课题得到国家自然科学基金项目(61232014,61421062,61472010)和国家科技支撑项目(2015BAK01B06)资助.**赵 静**,女,1981 年生,博士研究生,主要研究方向为计算机图形学、物理仿真等.E-mail:zhaojing@ysu.edu.cn. **唐 勇**(通信作者),男,1964 年生,博士,教授,博士生导师,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为计算机图形学、物理仿真等.E-mail:tangyong@ysu.edu.cn. **李 胜**,男,1974 年生,博士,副教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究方向为计算机图形学、虚拟现实技术、物理仿真与动画等. **汪国平**(通信作者),男,1964 年生,博士,教授,博士生导师,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为计算机图形学、虚拟现实技术等.E-mail:wgp@pku.edu.cn.

particles without considering of the material properties, the movement of particles will act as an "average" effect in one grid. To improve the limitation of complex materials with the traditional MPM, we propose a simulation method for heterogeneous elastic materials. Firstly, in the precomputation process, the simulation object is discretized as particles and the material boundaries and the corresponding boundary particles are established according to the distribution of the particles with different properties. The locations of the boundary particles are updated dynamically during the simulation process. Secondly, we introduce the particle impact domain to separate the different particles which increase the computing DOF(Degree Of Freedom) inside the grid. The interpolation between the grids and the particles in the traditional MPM has been extended to two steps. The particle domain acts as an intermediate process to connect the grids and the particles. Finally, according to the position of the material boundaries, we present a criterion to judge that the calculation of the simulation particles is on the background computing grids or on the particle domains. In the simulation process, we record the enhanced background grids by tracing the boundary particles. The particles in the signed background grids are set to the enriched particles, which are computed on their particle domains. To ensure the simulation efficiency, other ordinary particles are computed on the background grids as traditional MPM and the location of the particle domains will move as the particles. The experimental results demonstrate that the improved MPM can effectively simulate the deformation behaviors of heterogeneous materials. Compared with the finite element method (FEM), it is shown that our proposed method achieves comparable effect on the simulation of the complex elastic materials and has more advantages with the topological structure changing problems and collision handling issues.

Keywords　material point method; heterogeneous elastic materials; particle domain; material boundaries; numerical fracture

1　引　言

基于物理方法的形变体仿真在图形学的仿真模拟中占据重要的位置，为了方便模拟，仿真物体通常采用均质材质，缺乏多样性.然而在真实世界的形变体中，物质通常都是由不同材质构成的，为模拟贴近自然的丰富的物质材料，必须有行之有效的模拟非均质材质的形变方法.

物质点法(MPM)[1]是近年来基于物理仿真方法中应用比较广泛的一种数值方法，已经可以模拟众多的自然现象，包括雪、融化与固化等物质状态的变化、多孔材质的海绵体、颗粒物质的沙子、土壤等.尽管这些研究工作已经展现了物质点法的通用性，然而对于弹性形变仿真，还存在一些问题.主要表现在，物质点法的粒子之间没有关联，粒子与网格依赖插值关系传递物理量.在弹性体仿真中，当粒子之间的形变比较剧烈时，会导致形变超出网格的影响范围，不可避免的产生数值断裂；其次，由于背景计算网格是每个时间步更替的不变网格，网格结点并不随粒子的形变而运动，粒子与网格结点之间的不固定的插值关系，导致误差积累产生数值塑性问题，影响物质点法的稳定性[2]；另外，在仿真自然界广泛存在的非均质材质时，同一个网格内部如果聚集多种材质的粒子，由于插值权重中不包含任何的材质属性，导致粒子的运动无法区分，无法很好地模拟复杂材质的形变效果.尽管物质点法在模拟非均质弹性材料存在一些不足，仍然有潜质成为一种比较通用的方法.因此，弥补物质点法在形变体仿真，尤其是弥补非均质材质仿真方法的不足是非常有意义的工作.

为了弥补上述不足，本文提出一种增强的物质点法区分不同材质之间的差异.首先，引入粒子区域，使得相邻粒子通过共用的粒子区域结点建立关联关系，既避免由于形变过大导致的数值断裂问题，又能够自由地切换粒子求解域；同时，分析非均质材质模型，为模型建立物质边界.通过物质边界与背景网格之间的关联关系，在每个时间步动态判定增强的物质点，通过粒子是否为增强状态决定其求解域，

尽可能使不同材质的粒子在各自的区域求解，同一材质的粒子在背景网格求解．求解域的划分既保证仿真过程中有效区分不同粒子又保证一定的仿真效率．

本文第 2 节介绍物质点法以及非均质材质仿真方法的相关研究工作；第 3 节介绍物质点法仿真的基础；第 4 节介绍粒子区域的建立方法和插值权重计算方式；第 5 节介绍利用物质点法模拟非均质材质的仿真方法，包括非均质材质的增强的物质点的判定方式以及仿真流程；第 6 节通过实验分析说明本文方法的有效性；第 7 节总结并讨论以后的研究工作以及本文方法的局限性．

2 相关工作

物质点法是一种粒子和网格相结合的方法，采用质点离散物质区域，利用背景网格计算空间导数并求解动量方程，可以避免网格畸变和对流项的处理，兼具拉格朗日和欧拉法的优势，非常适合模拟材料断裂破碎等问题．物质点法是 1994 年 Sulsky 等人[3]在 FLIP(Fluid Implicit Particle)[4]方法基础上提出的一种数值方法，采用每个时间步替换的不变的背景网格，粒子携带的物理信息被投影到网格结点上，在结点上求解方程，粒子点根据在网格上的分布利用不同插值函数获得新一时刻的物理量．工程上，陆续有研究工作对物质点法进行分析和改进[5-7]，Andersen 等人[8]研究在物质点法中使用不同的插值函数降低误差，相对于低阶的插值函数，高阶的插值函数计算更准确，但计算开销大，背景网格与粒子之间的插值也会产生严重的数值耗散．在另外一类能够获得更连续的空间变量场的方法 GIMP (Generalized Interpolation Material Point method)[9]中首次提出了粒子区域的概念，可以为粒子建立连续的变量场，该方法将粒子的特征函数取为狄拉克阶跃函数的一个特例．Sadeghirad 等人[10]在此基础上提出了 CPDI(Convected Particle Domain Interpolation method)方法，对于二维问题，粒子区域定义为平行四边形，这种方法针对弯曲形变，粒子区域会有一定的重叠，同时一定程度上提高了拉伸形变的计算精度，但并没有完全解决数值断裂问题．随后，他们又提出了改进的 CPDI2[11]，将粒子区域定义为普通的四边形，使得在形变过程中，临近粒子的粒子区域紧密地耦合在一起，保证在大形变时不会出现数值断裂，但他们建立的粒子区域主要应用于二维空间的工程领域．在图形学领域，2013 年，Stomakhin 等人[12]首次巧妙利用物质点法的数值断裂，模拟了不同性质的雪，取得了非常逼真的仿真效果．随后，他们引入热力学方程，使物质点法能够模拟物质的融化和固化等状态变化[13]．2015 年，Ram 等人[14]利用物质点法模拟了粘弹性流体的泡沫和多孔材质的海绵模型，他们在传统的用于模拟粘弹性流体的 Oldroyd-B 本构模型基础上，提出了一种能够保体积的改进策略，获得了很好的仿真效果．同年，Yue 等人[15]提出利用物质点法的离散化方法，并引入非牛顿粘弹性流体的 Herschel-Bulkley 模型，也获得了泡沫等粘弹性流体的仿真结果．Jiang 等人[16]提出了一种兼顾拉格朗日粒子法和欧拉网格方法优势的 APIC(Affine Particle In Cell)方法，该方法既保持了 PIC(Particle-In-Cell)方法的稳定性，又避免了 FLIP 方法的噪声．在他们随后的研究中，利用物质点法能够非常自然地处理碰撞和拓扑变化的优势，结合 Drucker-Prager 塑性流模型及基于 Hencky 应变的超弹性特征模拟了包括沙漏和沙子的堆积等动态仿真结果[17]．上述方法在模拟颗粒状物质以及粘弹性流体上已经表现出物质点法的优势．针对弹性体的仿真，Zhu 等人[2]引入粒子区域，并借鉴有限元法的翻转处理技术模拟极限形变，与 CPDI2 的差异是他们提出的粒子区域在物质坐标系计算，而不是世界坐标系，这种改变保证了处理极大形变时的鲁棒性，但他们主要针对均质材质的极限形变仿真．本文借鉴了他们的粒子区域的处理方式，但与他们不同的是，本文提出了新的增强物质点的判断准则，并侧重于处理更复杂的非均质弹性材料．

所谓非均质材质，在形变体仿真中，针对一个连续的仿真模型，通常采用离散化方式表示为粒子或者四面体/六面体单元，非均质材质表示粒子或者单元由多种材质构成，而非整个仿真物体具有单一物质属性．在图形学领域关于非均质材质的仿真已经有了一些研究工作，Nesme 等人[18]建立任意分辨率的六面体网格模拟形变体，通过近似求解单元内非均一的质量和刚度矩阵的分布描述单元内的物体，这种简单的平均策略不能准确描述材料的分布状态．在他们随后的研究中，考虑内嵌在网格单元内的复杂的材质结构，通过复制单元的方式，不仅可以在同一个单元内部单独处理两个非连接区域的材质，同时还考虑了单元内具有空材质属性区域的模拟[19]．2009 年，Kharevych 等人[20]首次将均质化理

论引入到图形学，通过精确匹配粗糙和精细两个分辨率尺度下一组线性的形变位移建立的对等形变能量关系，求解出粗糙单元上的材质属性，获得了比较好的仿真效果.但他们的理论只适用于线性的弹性材料，无法广泛应用于更复杂的非线性材料.Bickel 等人[21]利用一组真实的非均质形变体的形变与力之间的关系构成一个数据集合，利用数据驱动的方法，对已有的应力应变关系曲线进行插值，得到外力作用下的位移.该方法只能模拟简单的形变，无法准确模拟复杂形变.2011 年，Faure 等人[22]在无网格方法框架下，推导出一个与物质相关的形函数替代了传统的径向基函数作为插值函数，使得插值计算不仅与几何位置相关还与材质分布相关，该方法可以模拟一些非均质材料，但由于新的形函数只考虑刚度信息，是一个标量，不能全面的模拟三维的非均质材料的复杂形变.Liu 等人[23]在形变体内部嵌入纤维，通过调整嵌入纤维的形状控制固体形变体的方式，获得了一种新的模拟非均质材质的仿真策略.Torres 等人[24]在 2014 年将非均质的方法应用于医学领域，利用粗糙网格模拟精细网格上的非均质材质的物质形变，通过分解精细网格上的刚度矩阵，求解出粗糙网格的近似刚度矩阵以及粗糙网格与精细网格位移之间的非线性的插值函数.但他们的研究工作也是基于线性材质，不能处理非线性的非均质材质的形变模型.传统的设计材质的过程，针对不同的材质参数需要多次仿真，整个设计过程非常耗时.为了加速这个过程，2015 年，Chen 等人[25]提出基于有限元方法的数据驱动的材质设计方法，利用规则的六面体网格构建仿真物体，针对每个小立方体的均质材质，采用八个立方体合成一个的形式，自动构建多层分辨率的模型.不同组合方式可以构建多种非均质材质模型，利用准静态方程求解各层级立方体单元的材质属性并存于数据库中.仿真过程中，每次修改材质属性，只需查询数据库中对应物质属性，这种方式使得材质设计过程非常高效.同时，采用规则立方体的方式非常便于构建精细分辨率与粗糙分辨率的网格边界的对应关系，该方法为非均质材质的仿真提供了新的思路.上述的非均质材质多数是利用有限元仿真框架或者无网格方法，本文则侧重于弥补物质点法模拟非均质材质的不足.

本文在传统物质点法基础上，提出了一种模拟非均质材质的仿真方法，避免传统物质点法在同一个网格内包含多种属性粒子时表现出的“平均化”的问题，可以有效地区分不同材质的仿真效果.同时，本文提出了一个判断准则，在仿真过程中利用物质边界动态判断增强的物质点，根据物质点的类型决定求解区域，保证同一网格内部具有不同物质属性的粒子能够在各自的求解域求解，有效地分离同一网格内的多种粒子的形变.

3　物质点法

根据连续介质力学和物质点法的基本理论，仿真物体的形变可以表现为初始形状 X 与形变后形状的 x 映射 $x=\phi(X)$，对应的形变梯度表示为 $F=\partial\phi/\partial X$，形变必须要遵循质量守恒，动量守恒以及弹塑性本构关系[12]，表示为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0,\ \rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho g,\ \boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{\boldsymbol{J}}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\quad(1)$$

其中，D，∂ 表示微分算子，ρ 表示密度，t 表示时间，$\boldsymbol{v}$ 表示速度，$\boldsymbol{\sigma}$ 表示柯西应力，g 表示重力加速度，$\boldsymbol{\Psi}$ 表示弹性势能密度，$\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\boldsymbol{F}}$表示第一类 Piola-Kirchhoff 应力，$\boldsymbol{J}=\det(\boldsymbol{F})$表示形变梯度的行列式.

物质点法的核心思想是物质点 p 的携带位置、速度、质量、形变梯度等物理量投影到背景网格结点，在结点处求解积分方程，更新结点处的物理量，再将新的物理量投影到粒子上，粒子获得新一时刻的速度等物理量，而背景计算网格不随着粒子的运动而形变.整个过程如图 1 所示，表示粒子与网格结点之间的物理量传递过程，圆形表示粒子，方块表示网格结点，粒子和网格结点处的箭头表示速度方向.

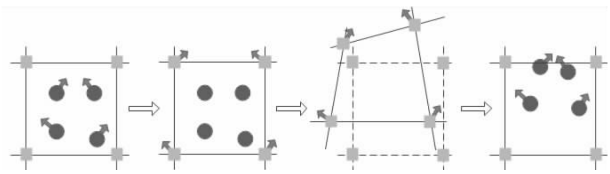

图 1　传统 MPM 粒子与网格传递物理量示意图

传统物质点法的粒子与网格之间的插值函数，表示为

$$\omega_i(x_p)=\omega\left(\frac{1}{h}(x_p-x_i)\right)\omega\left(\frac{1}{h}(y_p-y_i)\right)\omega\left(\frac{1}{h}(z_p-z_i)\right)\quad(2)$$

其中，(x_i, y_i, z_i) 表示第 i 个网格结点的位置，(x_p, y_p, z_p)表示网格内待求插值函数的粒子 p 的位置，h 表示网格间距，采用一次分段线性函数为

$$\omega(x)=\begin{cases}1-|x|, & 0\le|x|\le1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad(3)$$

采用三次 B 样条插值函数为

$$\omega(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}|x|^3-x^2+\frac{2}{3}, & 0\le |x|<1\\ -\frac{1}{6}|x|^3+x^2-2|x|+\frac{4}{3}, & 1\le |x|<2\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\tag{4}$$

4 粒子区域

传统的物质点法，粒子与粒子之间没有连接关系，仿真过程中，粒子与网格之间的物理量传递方式使得物质点法在模拟形变体时，如果粒子与粒子之间的位置超过了网格对粒子的插值影响范围，产生数值断裂. 通过引入粒子区域的方式可以有效地改善这一问题，如图 2 所示，3 个长条形物体的仿真实验，物体的一端固定在墙上，在重力作用下弯曲，左侧的图表示仿真初始位置，右侧是仿真进行到一段时间之后的形变效果. 第 1 列的仿真结果，粒子与网格之间采用线性插值，当粒子与粒子之间超过一个网格就会发生断裂；第 2 列实验，粒子与网格利用三次插值，虽然精度更高，可以一定程度上改善断裂的问题，但随着仿真的进行，还是不可避免地产生了断裂的现象；第 3 列表示引入粒子区域后的形变效果，有效地解决了数值断裂问题.

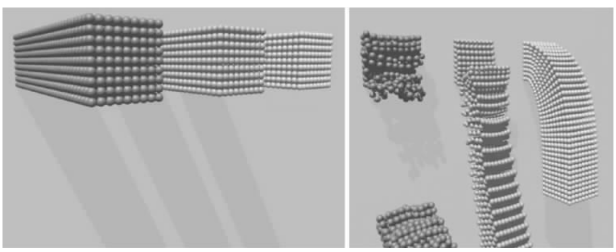

图 2 长条形状物体弯曲实验对比

当模拟非均质材质时，由于物质点法是一种粒子和网格相结合的方法，网格结点上计算得到的物理量，是按照粒子的几何位置插值获得的，网格内的粒子获得的物理量只根据位置计算，无法体现材质属性，因此当网格结点将物理量传递给粒子时，粒子就表现为“平均化”的运动趋势.

图 3 是一个二维的场景，在同一个网格内分布着一些粒子，隔行的粒子具有相同的物质属性，偶数行 x 形粒子表示材质的刚度系数(杨氏模量)$E=1.0\times10^5$，奇数行圆形粒子较硬，$E=1.0\times10^6$，上下两层粒子沿 Y 轴方向分别施加向两侧拉伸的力. 从实验结果看，左图表示在传统物质点法框架下，同一个网格内的粒子，虽然他们的硬度不同，却不能区分；右图利用线条表示粒子的区域分隔了不同的粒子，引入粒子区域后，同一网格内不同的物质可以在各自的粒子区域内求解，增加了仿真过程中求解自由度，有效地区分出了不同材质.

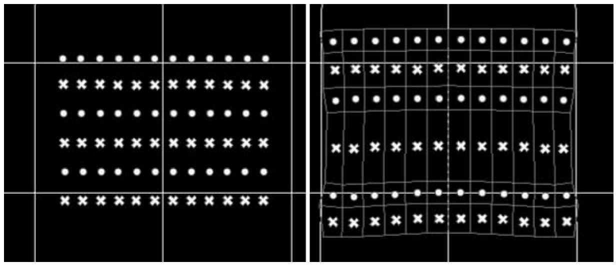

图 3 传统 MPM 与本文方法模拟非均质材质对比图

4.1 物质区域的计算

粒子的影响区域在二维空间定义为任意四边形，在三维区域定义为六面体，初始时刻根据粒子的分布建立规则的正六面体粒子区域，相邻粒子共用粒子区域顶点，建立粒子之间的连接关系. 在形变过程中，粒子区域不会重叠. 如图 4 所示，左侧表示兔子模型初始时刻粒子区域形状，右侧表示一个圆柱体施加在兔子尾部模型发生形变后，粒子区域由于粒子的运动而发生相应的形变. 这里在粒子区域内部嵌套了一个精细的表面网格绘制，表示形变前后形状的变化.

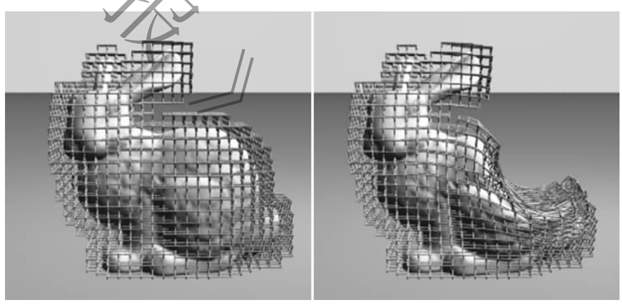

图 4 兔子模型的粒子区域的初始和形变状态

在传统物质点法中，将物理量的积分及其梯度积分计算转换为对插值形函数及其梯度积分的形式. 文献[11]提出了二维情况下粒子区域的形函数及其梯度的计算方式，文献[2]给出了利用物质空间计算粒子区域的思路，但他们都没有详细给出计算方式. 在仿真中，形变体通常是三维结构，因此，本文详细介绍利用高斯积分在三维空间中粒子区域形函数及其梯度的近似计算方式. 粒子区域初始时刻为正六面体，仿真过程中，随着粒子的运动发生形变，变为任意六面体形状. 因此，需要计算任意六面体下

的形函数及其梯度的计算方法，将任意六面体区域转换成规则的立方体区域，顶点编号及变换后的坐标系如图 5 所示.

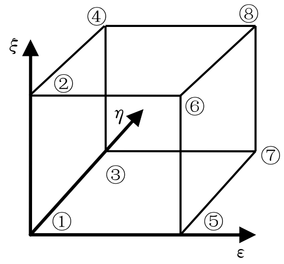

图 5　变换后的积分区域

积分区域变为：$N_\alpha(\varepsilon,\eta,\xi)$，$-1\le\varepsilon,\eta,\xi\le 1$.

参考 8 个结点有限元形函数计算方式，分别计算区域结点上的函数值为

$$N_{4(i-1)+2(j-1)+k}=\frac{1}{8}[(1+(-1)^i\varepsilon)(1+(-1)^j\eta)(1+(-1)^k\xi)] \tag{5}$$

其中，$i,j,k=1,2$，则第一个结点计算如下：

$$N_1=\frac{1}{8}(1-\varepsilon)(1-\eta)(1-\xi) \tag{6}$$

其在各个方向上的梯度表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_1}{\partial\varepsilon}=-\dfrac{1}{8}(1-\eta)(1-\xi)\\[2mm]\dfrac{\partial N_1}{\partial\eta}=-\dfrac{1}{8}(1-\varepsilon)(1-\xi)\\[2mm]\dfrac{\partial N_1}{\partial\xi}=-\dfrac{1}{8}(1-\varepsilon)(1-\eta)\end{cases} \tag{7}$$

利用高斯积分取 $n=2$ 个结点，3 个方向共取 8 个积分采样点，得到

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega&=\iiint_{\Omega'}f(\varepsilon,\eta,\xi)\boldsymbol{J}\mathrm{d}\Omega'\\&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\varepsilon,\eta,\xi)\boldsymbol{J}\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\&\approx\sum_{p=1}^{8}f_p(\varepsilon_p,\eta_p,\xi_p)\boldsymbol{J}_p\omega_p\end{aligned} \tag{8}$$

其中，p 表示采样点，(x,y,z) 和 (ε,η,ξ) 分别表示积分区域变换前后的坐标，ω_p 表示高斯采样点处权重值. 针对积分区域内的点，其函数的积分形式可以近似用采样点处的函数的加权求和方式表示. 采样点 p 坐标为

$$(\varepsilon_p,\eta_p,\xi_p)=\left[\frac{(-1)^i}{\sqrt{3}},\frac{(-1)^j}{\sqrt{3}},\frac{(-1)^k}{\sqrt{3}}\right],\ \sum_p\omega_p=1 \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 为区域变换的雅各比矩阵. 积分区域内任意点坐标表示为

$$\boldsymbol{x}=N_1\boldsymbol{x}_1+N_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+N_8\boldsymbol{x}_8 \tag{10}$$

$\boldsymbol{J}$ 中第一个分量计算为

$$\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial N_1}{\partial\varepsilon}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial\varepsilon}x_2+\cdots+\frac{\partial N_8}{\partial\varepsilon}x_8=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\varepsilon}x_i \tag{11}$$

$\boldsymbol{J}$ 其他项类似计算. 上式为在各个采样点处的线性插值，其中 x_i 为各顶点坐标 x 方向的值，形函数在积分区域内的计算方式为

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}N_1(x,y,z)\mathrm{d}\Omega&=\iiint_{\Omega'}N_1(\varepsilon,\eta,\xi)\boldsymbol{J}\mathrm{d}\Omega'\\&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}N_1(\varepsilon,\eta,\xi)\boldsymbol{J}\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\&\approx\sum_{p=1}^{8}N_{1p}(\varepsilon_p,\eta_p,\xi_p)\boldsymbol{J}_p\omega_p\\&=\sum_{p=1}^{8}\frac{1}{8}(1-\varepsilon)(1-\eta)(1-\xi)J_{1p}\omega_p\end{aligned} \tag{12}$$

其中，Ω、Ω' 分别表示积分区域变换前后的区域，将 8 个采样点的值分别代入上式即可计算出形函数的积分表达式. 权重梯度的计算方式为

$$\begin{aligned}\nabla N(x,y,z)&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}&\dfrac{\partial N}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}&\dfrac{\partial N}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}&\dfrac{\partial N}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}&\dfrac{\partial N}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}&\dfrac{\partial N}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial z}&\dfrac{\partial N}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}&\dfrac{\partial\eta}{\partial x}&\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}&\dfrac{\partial\eta}{\partial y}&\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial z}&\dfrac{\partial\eta}{\partial z}&\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial\varepsilon}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\eta}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\xi}\end{bmatrix}=\left[[\boldsymbol{J}]^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial\varepsilon}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\eta}\\[2mm]\dfrac{\partial N}{\partial\xi}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

形函数梯度第一项在积分区域内的计算方式如下，其他各项类似计算.

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\nabla N_1(x,y,z)\mathrm{d}\Omega&=\iiint_{\Omega'}\nabla N_1(\varepsilon,\eta,\xi)\boldsymbol{J}\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\&=\iiint_{\Omega'}\left[[\boldsymbol{J}]^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial\varepsilon}\\[2mm]\dfrac{\partial N_1}{\partial\eta}\\[2mm]\dfrac{\partial N_1}{\partial\xi}\end{bmatrix}\boldsymbol{J}\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\\&\approx\sum_{p=1}^{8}\left[[\boldsymbol{J}_p]^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_{1p}}{\partial\varepsilon}\\[2mm]\dfrac{\partial N_{1p}}{\partial\eta}\\[2mm]\dfrac{\partial N_{1p}}{\partial\xi}\end{bmatrix}\boldsymbol{J}_p\omega_p\end{aligned} \tag{14}$$

4.2 插值权重计算方式

由于粒子区域的建立,传统的物质点法的网格结点与粒子插值过程变为以区域结点为中间层的两步插值的结果.首先从粒子映射到粒子区域结点,然后从粒子区域结点映射到背景网格结点.反之,从网格结点到粒子的数据传递也是类似过程.引入粒子区域后,插值权重计算更加复杂.包括粒子、粒子区域、背景网格计算结点三个层次.权重的计算包括:

(1)粒子区域结点到背景网格结点的权重计算.利用第3节介绍的背景网格一次插值函数计算,表示为$\omega_i(\boldsymbol{x}_p^\alpha)$,即为粒子$p$的第$\alpha(1\le\alpha\le8)$个区域结点在背景网格内的插值权重;

(2)粒子与区域结点之间的权重计算.利用4.1节的高斯积分近似计算区域内的积分得到插值权重$N_p^\alpha(\boldsymbol{x})$,表示第$p$个粒子的第$\alpha(1\le\alpha\le8)$个区域结点内部的插值形函数;

(3)粒子与背景网格结点的权重计算.引入粒子区域后,粒子表示的不再是一个质点,而是一个影响区域.

首先,计算网格结点与粒子区域内部任一点的权重.通过插值函数ω_i^*进行数据映射,ω_i^*定义为标准网格插值函数在区域结点处的值再用粒子区域的形函数插值:

$$\omega_i^*=\sum_\alpha N_p^\alpha(\boldsymbol{x})\omega_i(\boldsymbol{x}_p^\alpha) \tag{15}$$

其次,粒子所携带的物理量表示成粒子区域内部变量的平均,计算粒子区域内变量值的平均首先计算粒子区域内的空间积分,然后再除以粒子区域的体积.粒子与计算网格结点之间的插值函数以及梯度计算如下:

$$\begin{aligned}\omega_{ip}&=\frac{1}{V_p^0}\int_{\Omega_p^0}\omega_i^*(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega,\\ \nabla_{\boldsymbol{X}}\omega_{ip}&=\frac{1}{V_p^0}\int_{\Omega_p^0}\nabla_{\boldsymbol{X}}\omega_i^*(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{16}$$

将式(15)代入上式,得到

$$\begin{aligned}\omega_{ip}&=\frac{1}{V_p^0}\sum_\alpha\omega_i(\boldsymbol{x}_p^\alpha)\int_{\Omega_p^0}N_p^\alpha(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\Omega,\\ \nabla_{\boldsymbol{X}}\omega_{ip}&=\frac{1}{V_p^0}\sum_\alpha\omega_i(\boldsymbol{x}_p^\alpha)\int_{\Omega_p^0}\nabla_{\boldsymbol{X}}N_p^\alpha(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{17}$$

其中,$\omega_{\alpha p}=\frac{1}{V_p^0}\int_{\Omega_p^0}N_p^\alpha(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\Omega$可在初始时刻预先计算.

5 物质点法模拟非均质材质仿真方法

5.1 物质区域划分准则

首先确定物质区域,对于具有分层结构或者具有明显物质区域界限的非均质仿真模型,追踪物质边界粒子所在网格,确定仿真过程中在粒子区域上单独计算的增强的物质点,其他粒子利用传统物质点法在背景网格上计算.算法分为预处理阶段确定物质边界以及仿真过程中动态判定增强物质点两个部分.

算法1. 预处理过程中查找边界粒子算法.

输入:仿真物体体素化表示的六面体体网格

输出:非均质材质仿真物体的边界粒子集

```
FOR 所有仿真粒子对应的六面体单元 DO
  FOR 六面体单元的所有边 DO
    IF 边上两个粒子属性不同 THEN
      两个粒子都设置为边界粒子
```

算法2. 仿真过程中动态查找增强的粒子算法.

输入:边界粒子集

输出:仿真过程中在粒子区域上求解的增强粒子集

```
FOR 所有边界粒子 DO
  查找当前粒子所在计算网格
  标记该网格为边界网格
FOR 所有仿真粒子 DO
  查找粒子所在计算网格
  IF 该网格为边界网格 THEN
    标记网格内仿真粒子为当前时刻的增强粒子
```

综上,算法1在预处理过程中求解,只计算一次,主要目的是查找边界粒子,时间复杂度为$O(12\times n_e)$,n_e表示仿真物体体素化得到的六面体单元数;算法2是每个时间步查询一次,包含两个过程,先查找边界粒子对应的边界网格,时间复杂度为$O(n_b)$,n_b为边界粒子数;确定边界网格后标记增强粒子,时间复杂度为$O(n_p)$,n_p为仿真粒子数.

5.2 非均质材质仿真流程

根据文献[12]中提出的物质点法仿真框架,结合本文通过追踪物质边界动态划分增强物质区域的方法,确定在粒子区域与背景计算网格结点计算的增强的物质点和普通的物质点.本文提出的非均质材质形变体仿真流程,包括预处理过程和仿真过程两个部分:

(1)预处理过程(如图6所示).

将仿真物体体素化得到六面体体网格,体网格的顶点作为仿真粒子;根据仿真粒子的物质属性,划分非均质材质,并查找仿真物体的物质边界,构建边界粒子集;为粒子构建粒子区域,在粒子区域内部嵌入精细分辨率的表面网格,计算表面网格与粒子区域的插值权重,用于每个时间步的权重更新和绘制;根据背景网格结点处的密度、质量计算网格内部粒

子的体积和密度，表示为

$$\rho_p^0=\sum_i m_i^0\omega_{ip}^0/h^3,\ V_p^0=m_p/\rho_p^0 \tag{18}$$

其中，ρ_p^0、V_p^0分别表示粒子 p 在初始时刻的密度和体积，m_i^0表示第 i 个背景计算网格在初始时刻的质量，h 为网格间距.

整个预处理过程包含建立粒子区域、计算嵌入表面网格与粒子区域结点的插值权重等操作，消耗时间根据粒子数不同有所差异，本文的所有实验都只需要几分钟就可以完成.

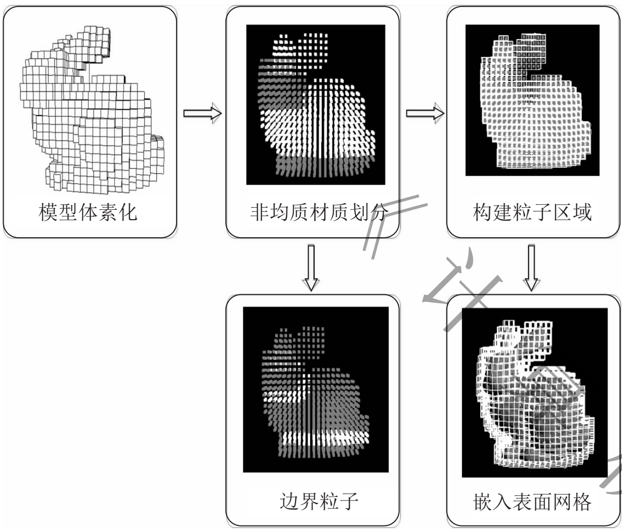

图 6　预处理阶段示意图

(2) 仿真过程(如图 7 所示).

① 仿真过程中，每个时间步利用粒子区域的权重函数将粒子的所有物理量映射到粒子区域；

② 根据 5.1 节提出的算法，查找增强物质点，动态判断仿真粒子状态. 对于增强的粒子在粒子区域上求解，对于普通的粒子，将粒子区域上的物理量映射到背景网格上，更新背景网格以及粒子区域上的速度等信息；

③ 根据网格结点处的外力以及第一 Piola-Kirchhoff 应力 P，判断粒子的类型分别在背景计算网格或粒子区域上积分求解，得到新一时刻网格和粒子区域结点处新的速度，速度更新采用文献[12]的半隐式方式计算. 力的计算如下式：

$$\boldsymbol{f}_i=-\sum_p V_p^0 P_p \nabla\omega_{ip}^n \tag{19}$$

$$\boldsymbol{f}_\alpha=-\sum_p V_p^0 P_p \nabla N_p^{\alpha n} \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{f}_i$、$\boldsymbol{f}_\alpha$分别表示背景计算网格和粒子区域结点处的力，$\nabla\omega_{ip}^n$、$\nabla N_p^{\alpha n}$分别表示第 n 时刻粒子与网格结点 i 的插值函数的梯度、第 α 个粒子区域结点的插值函数梯度；

④ 更新形变梯度. 利用初始形状的插值函数，更新粒子的形变梯度，计算如下：

$$\boldsymbol{F}_p^{n+1}=\boldsymbol{F}_p^n+\Delta t\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{v}_p^{n+1} \tag{21}$$

其中，$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{v}_p^{n+1}=\sum_i \boldsymbol{v}_i^{n+1}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\omega_{ip}^n)^{\mathrm{T}}$；

⑤ 利用 FLIP 和 PIC 方法相结合的方式更新粒子速度，计算如下：

$$PIC:\boldsymbol{v}_p^{n+1}=\sum_i \omega_{ip}\boldsymbol{v}_i^{n+1},$$

$$FLIP:\boldsymbol{v}_p^{n+1}=\boldsymbol{v}_p^n+\sum_i \omega_{ip}(\boldsymbol{v}_i^{n+1}-\boldsymbol{v}_i^n),$$

$$\boldsymbol{v}_p^{n+1}=(1-\gamma)\boldsymbol{v}_{PICp}^{n+1}+\gamma\boldsymbol{v}_{FLIPp}^{n+1} \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{v}_p^{n+1}$表示粒子 p 在 $n+1$ 时刻的速度，γ 是权重系数，根据经验选取为 0.95；

⑥ 更新粒子区域的位置. 对于增强的粒子区域结点的位置，以粒子区域为计算单元，则新的区域结点的位置直接由结点处新一时刻的速度计算：

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{n+1}=\boldsymbol{x}_\alpha^n+\triangle t\boldsymbol{v}_\alpha^{n+1} \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{x}_\alpha^{n+1}$、$\boldsymbol{v}_\alpha^{n+1}$分别表示第 $n+1$ 时刻粒子的第 α 个区域结点处的位置和速度.

对于非增强粒子的粒子区域，利用其所在背景计算网格更新位置，表示为

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{n+1}=\boldsymbol{x}_\alpha^n+\Delta t\sum_i \omega_i(\boldsymbol{x}_\alpha^n)\boldsymbol{v}_i^{n+1} \tag{24}$$

其中，$\omega_i(\boldsymbol{x}_\alpha^n)$是标准的背景网格形函数在第 α 个区域结点上的值；

⑦ 粒子的位置更新. 根据粒子区域结点的位置 $\boldsymbol{x}_\alpha$插值得到：

$$\boldsymbol{x}_p^{n+1}=\sum_\alpha N_p^\alpha\boldsymbol{x}_\alpha^{n+1} \tag{25}$$

图 7 表示引入粒子区域之后，物理量的传递过程示意图，实心圆表示仿真粒子，左右两侧物质属性不同，箭头指示速度方向；空心圆表示边界粒子，在形变中被标记为增强的物质点，在粒子区域上求解，普通粒子在背景计算网格上求解.

整个仿真过程中，最耗时的部分是计算插值权重及在背景网格与粒子区域求解新一时刻的速度. 计算插值函数的时间复杂度为 $O(8\times N_p)$. 与标准物质点法相比，增强的物质点法计算插值函数的开销是其 8 倍. 本文利用与文献[2,12]的半隐式方法求解速度，利用共轭梯度方法求解线性方程，迭代在 15 步内可以完成. 与标准物质点法相比，增强粒子的产生使待求解的线性方程组维度增加，增大了计算开销. 在本文所有的实验中，增强粒子的比例并没有很高，因此我们认为方程组维度的增加带来的额

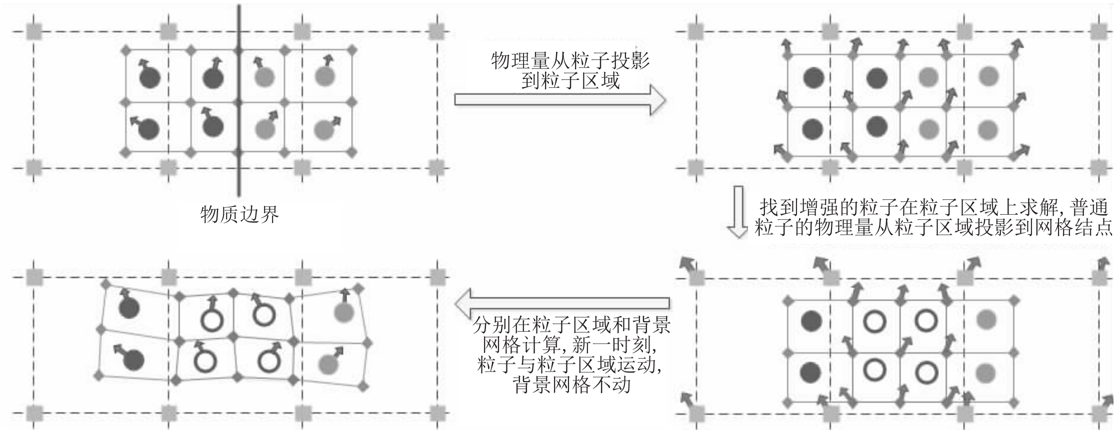

图 7 仿真过程中物理量投影和计算示意图

外计算开销可以接受. 本文所有仿真实验的时间效率详见实验部分表 1.

6 实验结果与分析

实验在 Linux 操作系统下，使用 C++ 语言，利用 Physika① 开源的物理仿真框架，Pov-ray 离线渲染. 硬件系统为：单核 Intel i5 CPU，2.8GHz，Nvidia GeForce GT 430 显卡. 所有的实验粒子密度均为 1.0×10^3 kg/m^3，除图 14 中雪的本构模型外，所有非均质弹性体的泊松系数均为 0.3，所有实验都是每 300 个时间步输出一次数据.

6.1 有效性实验

图 8 是一个分层的立方体的仿真结果，立方体被放置在地面上，下端固定，上端施加向下的压力. 模型被分为两种属性，隔层的物质具有相同属性. 相对透明的材质较软，杨氏模量 $E=1.0\times10^5$，其余层材质较硬 $E=1.0\times10^7$.

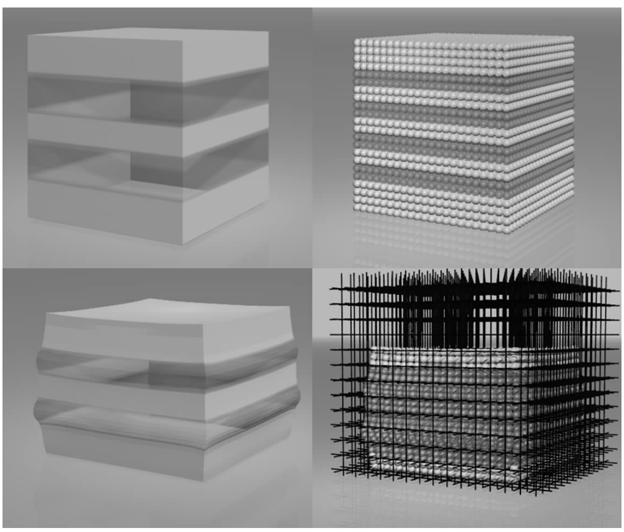

图 8 分层的立方体的压缩实验

左侧的上下两张图用嵌套在粒子区域内的精细的表面网格绘制，分别表示初始形状和在力作用下的形变形状，很好的表现了两种不同材质的压缩形变. 右侧两幅图，上面的表示初始时刻构建的物质边界的示意图(用粒子球的形式表示，不同材质临近区域的粒子为边界粒子)，下方的图对应其左侧效果图的形变时刻，边界粒子球所在网格中的粒子为在粒子区域上求解的增强的粒子，黑色线框表示求解的背景网格. 由于这个例子展现的是压缩形变，不同的粒子以及粒子边界都被压缩到比较紧凑的背景网格内. 根据本文的追踪物质边界方法以及增强的粒子的设置策略，物质边界所在背景网格内部粒子都在粒子的作用域上求解. 从仿真结果来看，能比较明显地看出不同材质压缩效果，更软的粒子更易发生形变.

图 9 是一个玩具船模型，将船体、桅杆和船帆分为三种物质，硬度依次降低，杨氏模量分别为 3.0×10^6、1.0×10^6、5.0×10^5. 在力的作用下，船体部分比较硬形变最小，船桅杆其次，船帆最软，在每个部分连接处建立物质边界. 仿真过程中，边界所在的背景网格内部所有粒子都在各自独立区域求解，其他粒子在背景网格上求解. 对于船体的划分和模拟可

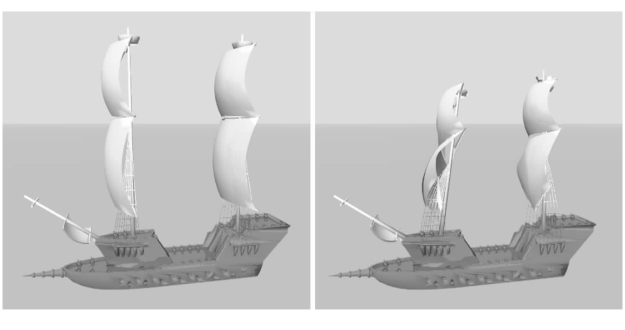

图 9 玩具船的形变效果

① https://github.com/FeiZhu/Physika

以用到海洋等固液耦合场景中，在动态仿真下，展现更真实的不同材质的船体形变效果.

图 10 表示一个长方形盒子放置在板子上，下端固定，内部放置两个球，盒子的杨氏模量为 $E=1.0\times10^{6}$，左侧球较软，右侧球较硬，杨氏模量分别为 $E=1.0\times10^{5}$，$E=1.0\times10^{7}$.

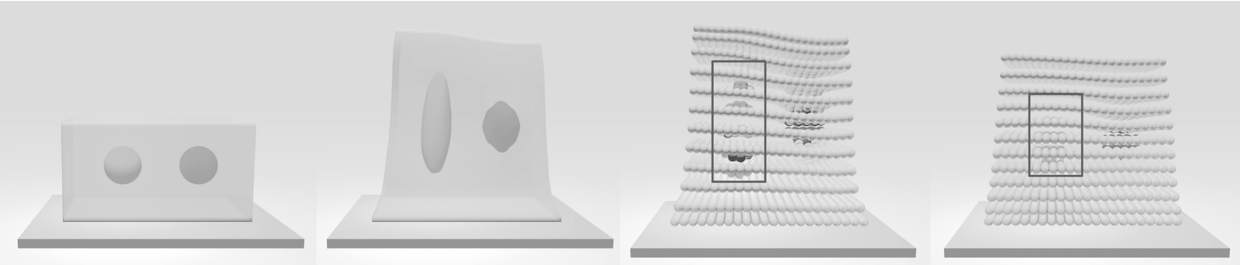

图 10　盒子内部两个球的非均质材质的拉伸实验效果

第 1 张图和第 2 张图分别利用 3 个嵌套在粒子区域内的表面网格绘制 3 种物质的初始位置和拉伸形变后的结果，3 种材质的形变明显不同，左侧球由于较软形变最大. 第 3 张图和第 4 张图分别展示本文的方法以及传统物质点法的仿真结果，由于传统物质点法内部没有网格，因此我们将仿真粒子以圆球的形式绘制. 从圈定的矩形区域可以看出，本文的方法在发生拉伸时，由于构建的物质边界是在球的外层边界与盒子内部邻接处，在同一背景计算网格内的不同材质的粒子独立计算，因此在仿真过程中能够有效区分出不同属性粒子，而右侧的传统的方法不同材质的粒子在同一网格内部时不易区分，平均化效果比较明显.

图 11 所示是一组网格分辨率对比实验. 一个花模型下端部分固定在地面上，模型的茎、叶以及花 3 个部分具有不同的软硬度，茎部分最硬，花次之，叶子最软，杨氏模量分别为 5.0×10^{6}、8.0×10^{5}、1.5×10^{5}. 第 1 张图是初始时刻花模型，在箭头所示力的作用下的形变效果，力沿着 Y 轴垂直向下大小为 8 N. 第 2 张图是在分辨率为 $56\times40\times48$ 的背景网格下计算，第 24 个输出结果，可以看出在相同作用力下，较软的叶子形变更大，茎部分最硬，弯曲程度最弱，模拟效果比较符合预期. 同时，我们利用不同分辨率网格在相同的模型以及边界条件下做了两组对比实验，如第 3 张和第 4 张图所示，网格分辨率按倍数递减，仿真到同一时刻，效果不如分辨率高的形变效果明显，第 5 张图所示是第 133 个输出结果，在低分辨率网格下甚至出现了不稳定的情况. 背景计算网格分辨率导致的形变效果的差异主要是由于传统的物质点法，在每个仿真时间步采用不变的背景网格计算，并更新粒子与网格结点的插值函数值，这种不固定的插值关系导致了形变计算的误差，误差随着时间累积表现为数值塑性，虽然我们在物质边界处采用粒子区域求解，一定程度上缓解了这个问题，但并没有完全避免这种误差.

图 11　花在不同网格分辨率下的模拟实验

图 12 所示，一个非均质的球掉落到地面上，不同的物质分类方式以及不同参数的对比实验. 按照不同划分方式表示两种材质，材质属性如图中标注，第 1 张图是球的初始位置，其余的图表示的是仿真到第 70 个输出序列的形变效果. 从第 2 到第 5 张图采用上下两层方式分离物质，第 2 张图中下层材质最软，与地面接触后，形变最剧烈；第 3 张图下端材质比第 2 张图硬，因此形变不如第 2 张图明显；第 4 张图与第 2 张图的材质是相反的状态，相对于第 2 张图和第 3 张图其上层软的材质具有更加明显的形变；第 5 张图是均质的球的形变效果；第 6 张采用了左右两侧分割物质，右侧较软，不同材质的形变效果有明显差异. 这里我们采用了完全非弹性碰撞处理方式处理球与地面的接触.

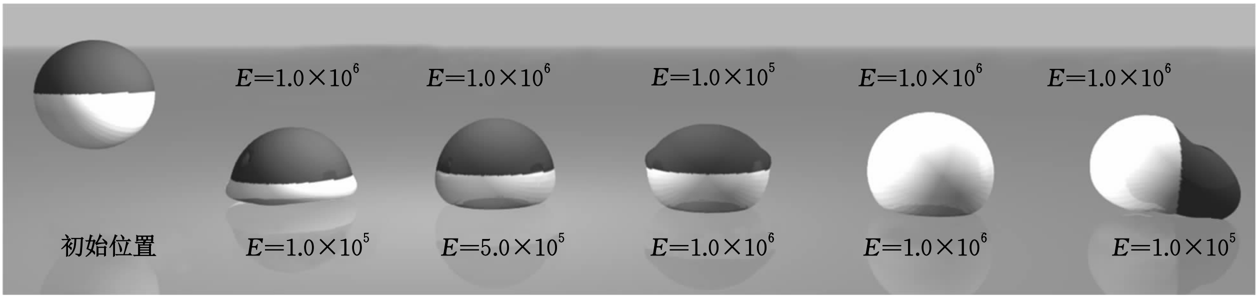

图 12 非均质的球不同材质系数对比实验

6.2 与 FEM 方法对比

图 13 表示的是一个长条形状的模型一端固定在墙上,仿真物体以粒子圆球的形式分为 3 层表示 2 种材质,两侧材质较硬,杨氏模量为 $E=1.0\times10^6$,中间层材质属性为 $E=1.0\times10^5$. 模型在重力作用下发生弯曲形变,重力加速度 $g=10.0\ \mathrm{m/s^2}$,第 1 行 2 张图分别表示为初始位置和利用本文的改进的物质点法的形变效果,第 2 行 2 张图分别表示利用传统的物质点法和有限元(FEM)方法模拟的结果. 3 种方法分别用矩形区域圈出部分材质边界.

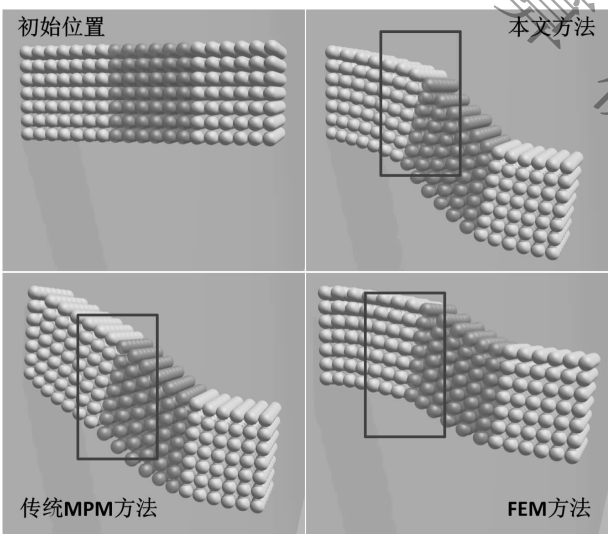

图 13 长条形物体不同方法仿真效果对比

传统物质点法的仿真粒子与网格利用三次插值形函数计算,一定程度上避免了数值断裂,得到了非均质材质的模拟结果. 从图中可以看出,与传统的物质点法相比,利用本文的增强的粒子区域方法能更好地表现出物质的不同属性的形变效果,而传统的物质点法,圈定区域的粒子虽然属于不同材质,但无法有效区分,类似于同种材质的形变行为. 因此,利用本文的方法能够更好的获得非均质材质的形变效果. 右下角的图片采用的有限元法仿真,由于线性模型只能模拟小形变,因此我们采用共旋的线性模型,将原本的六面体体素化的模型转换成四面体单元计算,并设置四面体各单元的物质属性. 材质的软硬程度、边界条件及重力设置与本文增强的物质点方法一致,从形变效果看,本文的方法与有限元法模拟效果类似,都能很好的表现不同材质的形变.

如图 14 所示,利用文献[12]中雪的本构模型,模拟一个非均质的兔子弹性体坠落到一个雪堆上,仿真到不同阶段的结果. 雪堆模型的材质属性为:杨氏模量 $E=1.4\times10^5$,泊松率 $\nu=0.2$,硬度系数 $\xi=15$,压缩系数 $\theta_c=2.5\times10^{-2}$,拉伸系数 $\theta_s=5.5\times10^{-3}$,兔子按照部位分为 4 部分,从上到下杨氏模量依次为 1.0×10^5、1.0×10^6、5.0×10^5、5.0×10^6.

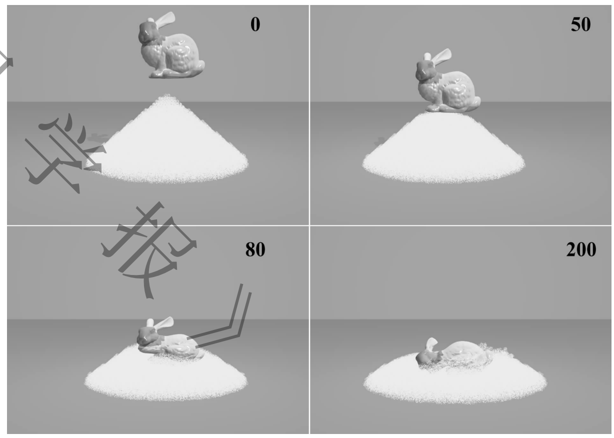

图 14 物质点法模拟雪和弹性兔子模型

从仿真结果看,本文方法能够很好地模拟具有不同本构关系的两种材质的运动. 而对于有限元法,虽然模拟弹性模型是一种比较成熟的仿真方法,但对于处理拓扑变化的模型,有限元法很难模拟. 因此,物质点法对于处理碎裂等拓扑结构发生变化的模型的仿真具有一定优势,利用本文方法弥补了物质点法模拟非均质弹性体的不足,有利于将物质点法作为一种统一的仿真框架模拟不同现象.

如图 15 所示,4 个非均质立方体模型在重力作用下运动,下落过程中立方体与地面以及各个立方体之间发生碰撞,不同时刻的仿真结果. 立方体都采用分层结构,并用不同的材质划分软硬度,展现本文方法在碰撞处理方面的优势.

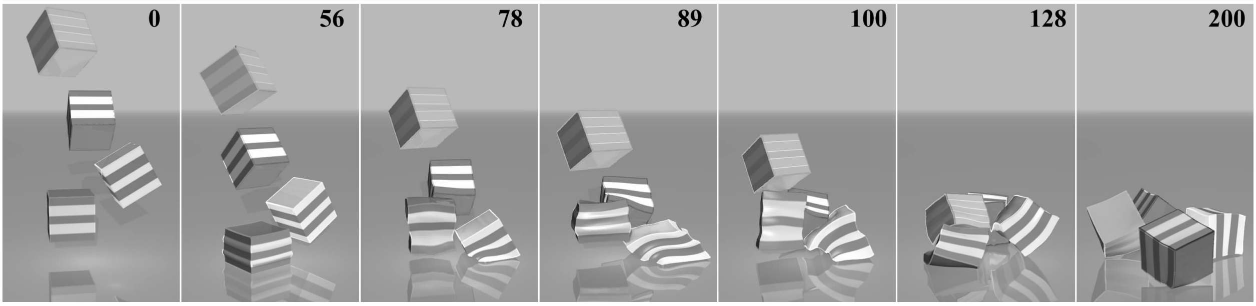

图 15　多模型碰撞效果

在处理碰撞的问题上，物质点法由于背景网格的存在，粒子和背景网格采用单值映射函数，因此能自然地满足物体间非穿透条件，对于无滑移粘着接触，不需要额外进行碰撞检测及处理．对于滑移接触问题，可采用将不同物体分别在背景网格上积分，仅在相对运动的垂直方向进行速度平均的方式处理．相对地，FEM 中物体间的碰撞处理需要使用例如层次化的包围体等方式检测碰撞，实现复杂且很难保证物体间无传透．

本文所有实验的仿真效率如表 1 所示，各列分别展示各个实验的仿真物体的粒子数、计算的背景网格数、物质边界粒子数、仿真所用的时间步长、帧速率．采用的增强的物质点法，对于网格内部包含多个边界物质的粒子在粒子区域上求解，其他网格利用传统物质点法求解．由于增加了粒子到粒子区域、粒子区域到背景计算网格的物理量的双重映射，仿真方法比传统的物质点法效率低．所有实验采用隐式积分方法求解．理论上来说，仿真物体的分辨率越高，背景计算网格数越多，物质划分边界的粒子数越多，越消耗仿真时间，时间步长的减小可以增加系统的稳定性，但仿真效率会降低．

表 1　仿真时间效率

实验	粒子数	网格分辨率	边界粒子数	时间步长	帧速率(分钟/帧)
图 8	10648	18×8×12	3872	2.5×10^{-4}	17.811
图 9	9441	12×14×16	808	2.5×10^{-4}	14.927
图 10(本文)	3168	14×20×8	212	1.0×10^{-3}	1.566
图 10(传统 MPM)	3168	14×20×8	—	1.0×10^{-3}	0.209
图 11	4904	56×40×48	118	2.5×10^{-4}	8.3317
图 11	4904	28×20×24	118	2.5×10^{-4}	7.2964
图 11	4904	14×10×12	118	2.5×10^{-4}	7.651
图 12	4007	12×20×12	586	2.5×10^{-4}	6.963
图 13(本文)	931	24×24×20	196	1.0×10^{-3}	0.451
图 13(传统 MPM)	931	24×24×20	—	1.0×10^{-3}	0.065
图 13(FEM)	931	—	—	1.0×10^{-3}	0.013
图 14	27779	64×48×64	719	1.0×10^{-4}	36.634
图 15	27436	112×80×112	11552	1.0×10^{-4}	73.717

7　总　结

本文提出了一种利用改进的物质点法模拟非均质弹性体的仿真方法，通过引入粒子区域，增加网格内部求解的自由度；并在仿真过程中动态追踪预定义的物质边界，查找每一时刻在粒子区域上求解的粒子，有效地改善了传统物质点法在背景网格内部无法区分不同物质的问题．

在引入粒子区域之后，由于粒子区域结点也参与计算，计算效率下降比较多，因此未来的工作可以考虑如何加速整个仿真过程，如利用 OpenMp 等并行策略．另外，本文的方法提出的物质边界虽然可以在仿真过程中迅速地判断用于增强的粒子范围，对于许多真实的非均质材质的划分方式普遍适用．但并非对所有的非均质物质都有效，如对于内部具有散乱的不同物质属性的粒子或者针对非连接区域的不同物质在同一网格内部时，由于无法建立明晰的物质边界，本文方法不适用．针对这种材质可以在每个时间步，判断每个网格内是否具有不同材质的粒子确定增强的网格，使其内部所有粒子都在粒子区域上求解，但每个仿真时刻都遍历网格内部是否有

多种材质会增加时间开销，当散乱粒子分布特别广泛的时候，所有的粒子都在粒子区域上求解时，本文的方法就与传统的有限元方法类似.

致 谢 感谢朱飞博士在整个题目的设计和研究过程中给出的指导性意见和建议！

参 考 文 献

[1] Lian Yan-Ping, Zhang Fan, Liu Yan, et al. Material point method and its applications. Advances in Mechanics, 2013, 43(2): 237-264(in Chinese)
(廉艳平，张帆，刘岩等. 物质点法的理论和应用. 力学进展，2013，43(2)：237-264)

[2] Zhu F, Zhao J, Li S, et al. Dynamically enriched MPM for invertible elasticity. Computer Graphics Forum, 2017, 36(6): 381-392

[3] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A particle method for history-dependent materials. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1994, 118(1-2): 179-196

[4] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986, 65(2): 314-343

[5] Liu Y, Wang H K, Zhang X. A multiscale framework for high-velocity impact process with combined material point method and molecular dynamics. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2013, 9(2): 127-139

[6] Liu Yan, Zhang Xiong, Liu Ping, et al. Meshfree material point method and software system for problems of shielding space debris. Manned Spaceflight, 2015, 21(5): 503-509(in Chinese)
(刘岩，张雄，刘平等. 空间碎片防护问题的物质点无网格法与软件系统. 载人航天，2015，21(5)：503-509)

[7] Liu P, Liu Y, Zhang X, et al. Investigation on high-velocity impact of micron particles using material point method. International Journal of Impact Engineering, 2015, 75: 241-254

[8] Andersen S, Andersen L. Analysis of spatial interpolation in the material-point method. Computers & Structures, 2010, 88(7-8): 506-518

[9] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, 5(6): 477-495

[10] Sadeghirad A, Brannon R M, Burghardt J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86(12): 1435-1456

[11] Sadeghirad A, Brannon R M, Guilkey J E. Second-order convected particle domain interpolation(CPDI2) with enrichment for weak discontinuities at material interfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2013, 95(11): 928-952

[12] Stomakhin A, Schroeder C, Chai L, et al. A material point method for snow simulation. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(4): 102: 1-102: 10

[13] Stomakhin A, Schroeder C, Jiang C, et al. Augmented MPM for phase-change and varied materials. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(4): 138: 1-138: 11

[14] Ram D, Gast T, Jiang C, et al. A material point method for viscoelastic fluids, foams and sponges//Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Los Angeles, USA, 2015: 157-163

[15] Yue Y, Smith B, Batty C, et al. Continuum foam: A material point method for shear-dependent flows. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(5): 160: 1-160: 20

[16] Jiang C, Schroeder C, Selle A, et al. The affine Particle-in-Cell method. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(4): 51: 1-51: 10

[17] Klar G, Gast T, Pradhana A, et al. Drucker-prager elastoplasticity for sand animation. Acm Transactions on Graphics, 2016, 35(4): 103: 1-103: 12

[18] Nesme M, Payan Y, Faure F. Animating shapes at arbitrary resolution with non-uniform stiffness//Proceedings of the 3rd Workshop in Virtual Reality Interaction and Physical Simulation, Madrid, Spain, 2006

[19] Nesme M, Kry P G, Jeřábková L, et al. Preserving topology and elasticity for embedded deformable models. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): 52: 1-52: 9

[20] Kharevych L, Mullen P, Owhadi H, et al. Numerical coarsening of inhomogeneous elastic materials. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): 51: 1-51:8

[21] Bickel B, Bächer M, Otaduy M A, et al. Capture and modeling of non-linear heterogeneous soft tissue. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): 89: 1-89: 9

[22] Faure F, Gilles B, Bousquet G, et al. Sparse meshless models of complex deformable solids. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(4): 73: 1-73: 10

[23] Liu N, He X, Ren Y, et al. Physical material editing with structure embedding for animated solid//Proceedings of the Graphics Interface. Toronto, Canada, 2012: 193-200

[24] Torres R, Espadero J M, Calvo F A, et al. Interactive deformation of heterogeneous volume data//Proceedings of the Biomedical Simulation, the 6th International Symposium. Strasbourg, France, 2014: 131-140

[25] Chen D, Levin D I W, Sueda S, et al. Data-driven finite elements for geometry and material design. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(4): 74: 1-74: 10

ZHAO Jing, born in 1981, Ph. D. candidate. Her current research interests include computer graphics and physical simulation, etc.

TANG Yong, born in 1964, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics and physical simulation, etc.

LI Sheng, born in 1974, Ph. D., associate professor. His research interests include computer graphics, virtual reality technology, physical simulation and animation, etc.

WANG Guo-Ping, born in 1964, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics and virtual reality technology, etc.

Background

This paper focuses on the field of the deformable solid simulation. We propose a simulation method of the heterogeneous elastic material by using the enhanced MPM. Stomakhin et al. introduced MPM method into graphic field for the snow simulation. Their subsequent researches further explored their strength in simulating a broader spectrum of material behaviors. Jiang et al. recently presented a method to reduce the dissipation between particles and grid by augmenting particles with a locally affine description of velocities. Ram et al. combined the left Cauchy-Green elastic strain tensor with an Oldroyd-B model for plastic flow to simulate viscoelastic fluids, foams and sponges. Klar et al. simulated sand dynamics using an elastoplastic, continuum assumption. They demonstrated that the Drucker-Prager plastic flow model combined with a Hencky-strain-based hyper elasticity accurately recreated a wide range of visual sand phenomena with moderate computational expense.

The existing MPM has already simulated many natural effects, but it still has difficulty in simulating elastic deformable solids, especially for heterogeneous materials. The particles are lack of the corresponding relations, since MPM takes use of the interpolation method for the data transmission process between the particle and the background computation grids. The numerical fracture phenomenon occurs when the particles exceed the grid interpolation influence areas in large deformation situations. At the same time, for the heterogeneous material simulation, the interpolation functions are depended only on the geometric positions, not on the material properties of the particles. Different particles in one grid can't be separated in the data transmission processes.

We extended MPM by introducing particle domains in the whole simulation process. Different particles can be computed separately by using their corresponding particle domains. The proposed method enhanced the computation DOFs in the grid. We presented the material boundaries for the deformable solid with different material areas and updated the position of the boundary particles with time varying. And the proposed criterion to judge the computation on the background grid or the particle domain based on the moving material boundary locations.

As far as the MPM simulation, we have extended it for robust simulation of extremely large elastic deformation for homogeneous elastic materials. In this paper we focused on the simulation effects for heterogeneous elastic materials, which are closer to the natural world.

This research is supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61232014, 61421062 and 61472010, and the National Key Technology Research and Development Program of China under Grant No. 2015BAK01B06.