极大平面图理论研究进展

许　进　李泽鹏　朱恩强

（北京大学信息科学技术学院　北京　100871）
（北京大学高可信软件技术教育部重点实验室　北京　100871）

摘　要　四色猜想是指平面图的色数不超过 4. 实际上，四色猜想只需证明对极大平面图成立即可. 正因为如此，从 1891 年至今，有众多学者从不同的角度展开了对极大平面图的研究. 该文拟对其中的一些重要成果进行较为详细的综述，主要包括极大平面图的度序列问题、Hamilton 性、色多项式、生成运算系统、计数、翻转运算、分解与覆盖、生成树和算法等方面. 在总结极大平面图研究现状的基础上，提出了一些与着色相关的问题，这些问题意在探索极大平面图的结构与着色之间的关系，有助于对四色问题的进一步研究.

关键词　极大平面图；度序列；Hamilton 性；色多项式；计数；生成运算系统；翻转；分解；生成树；算法
中图法分类号　O157　　**DOI 号**　10.11897/SP.J.1016.2015.01680

Research Progress on the Theory of Maximal Planar Graphs

XU Jin　LI Ze-Peng　ZHU En-Qiang

(*School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing* 100871)
(*Key Laboratory of High Confidence Software Technologies, Ministry of Education, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract　The Four-Color Conjecture says that the chromatic number of planar graphs is not more than 4. Indeed, it suffices to prove that each maximal planar graph is 4-clorable. For this reason, since 1891 many scholars have been devoted to the research on such graphs from different points of view. In this paper, some of important results with regard to maximal planar graphs are to be reviewed and analyzed in detail, including the problems of degree sequence, Hamilton characteristic, chromatic polynomial, generating operation system, enumeration, flip operation, decomposition and covering, spanning tree, and some algorithms. Based on the understanding of the research status of the maximal planar graphs, we propose several problems on such graphs in connection with their colorings. These problems intend to reveal the relationship between the structures and the colorings of maximal planar graphs, which may be usful for further study on the Four-Color Problem.

Keywords　maximal planar graph; degree sequence; Hamilton characteristic; chromatic polynomial; enumeration; generating operation system; flip; decomposition; spanning tree; algorithm

1　引　言

极大平面图是指所含边数最多的一类平面图，许多著名的猜想和问题都可以归结为对极大平面图的研究，如四色猜想、唯一 4-色平面图猜想、9-色猜想以及平面图分解与覆盖问题等. 故长期以来，学者们从各种不同的角度对此类图的特性进行了研

收稿日期：2013-01-10；最终修改稿收到日期：2014-03-20. 本课题得到国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金（2013CB32960，2013CB329602）、国家自然科学基金（60974112，30970960）资助. **许　进**，男，1959 年生，博士，教授，博士生导师，主要研究领域为图论与组合优化、生物计算机、智能计算、系统工程等. E-mail：jxu@pku.edu.cn. **李泽鹏**，男，1987 年生，博士研究生，主要研究方向为图论与组合优化. **朱恩强**，男，1983 年生，博士研究生，主要研究方向为图论与组合优化.

究，如着色、结构、生成运算、计数以及算法等许多方面.

图论是离散数学中一个重要的研究分支，其研究对象主要是图. 一个图 G 是由顶点集合 $V(G)(\neq\varnothing)$ 和边集合 $E(G)$ 构成的；G 的每条边都由 G 的两个顶点表示(不必相异)，这两个顶点称为边的端点. 将一条边的端点称为与这条边是关联的，反之亦然；与同一条边关联的两个顶点或与同一个顶点关联的两条边都被称为是相邻的；端点重合为一点的边称为环，端点不相同的边称为连杆. 如果一个图中既没有环也没有两条连杆连接同一对顶点(重边)，则称它为简单图；如果一个图的顶点集和边集都有限，那么称其为有限图. 只有一个顶点的图称为平凡图，其他所有的图都称为非平凡的图. 若无特殊说明，本文涉及的图皆指有限的简单无向图.

对于给定图 G，分别用 $d_G(v)$，$\delta(G)$，$\Delta(G)$ 和 $\Gamma_G(v)$ 来表示图 G 中顶点 v 的度数(与顶点 v 相关联的边的条数)、G 的最小度、最大度和顶点 v 的邻域(即与顶点 v 相邻的所有顶点构成的集合)，分别简记为 $d(v)$，δ，Δ 和 $\Gamma(v)$. 如果图 G 的顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则将 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$ 称为 G 的度序列，简记为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$.

图 G 的阶是指 $V(G)$ 中元素的个数 $|V(G)|$，G 的大小是指图 G 的边数，即 $E(G)$ 中的元素个数 $|E(G)|$. 若 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，且 E' 中每条边的两个端点均在 V' 中，则称图 $H=(V',E')$ 是图 G 的一个子图. 若 $V'=V$，则称 H 为 G 的一个生成子图. 在子图 H 中，如果对于 $\forall u,v\in V(H)$，u,v 在 G 中相邻当且仅当它们在 H 中相邻，则称 H 为图 G 中由 V' 导出的子图(或 V' 导出子图)，记为 $G[V']$. 对于点不交的两个图 G 和 H，若将图 G 中的每个顶点与图 H 中的每个顶点相连边，则得到的新图称为图 G 与图 H 的联图，记为 $G+H$. 平凡图 K_1 与 n-阶圈 C_n 的联图 C_n+K_1 称作轮图 W_n，其中 C_n 称为该轮的圈；构成 K_1 的顶点称为该轮的轮心. 若图 G 的所有顶点的度数都为 k，则称 G 是 k-正则图. 通常 3-正则图称为立方图.

图 G 的一条途径是它的一个点边(可以重复出现)交替序列 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_lv_l$，其中 v_{i-1} 和 v_i 是 e_i 的端点，$1\leq i\leq l$，并称 W 是一条从 v_0 到 v_l 的途径，v_0 和 v_l 分别称为该途径的起点和终点，$v_1,v_2,\cdots,v_{l-1}$ 称为 W 的内部顶点，l 称为该途径的长度. 若途径 W 的边 $e_1,e_2,\cdots,e_l$ 互不相同，则称 W 为迹；若 W 的顶点 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_l$ 也互不相同，则称 W 为路；若 $v_0=v_l$，且 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{l-1}$ 互不相同，则称 W 为圈(因为其长度为 l，故也称为 l-圈). 若 G 的两个顶点 u,v 之间存在路，则称这两个顶点连通；若 G 中任意两个顶点之间都连通，则称 G 是连通的.

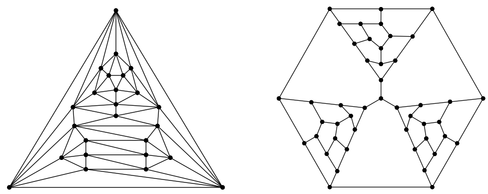
设 V 是图 G 的顶点集，V' 是 V 的子集，若 $G-V'$ 不连通，则称 V' 是 G 的顶点割集，k-顶点割集是指具有 k 个元素的顶点割集. 若 G 中至少有两个不相邻的顶点，则 G 的所有 k-顶点割集中最小的 k 称为 G 的连通度，记为 κ. 因为完全图没有顶点割集，故若 G 是完全图或以完全图作为生成子图的图，那么其连通度定义为 $v-1$，其中 v 为顶点数. 于是，当 G 是平凡的或不连通时，$\kappa(G)=0$. 若 $\kappa(G)\geq l$，则称 G 为 l-连通的. 显然，所有非平凡连通图都是 1-连通的.

如果一个图能画在平面上，使得它的边仅在端点处相交，则称这个图为可平面图. 可平面图 G 的这样一种画法称为 G 的一个平面嵌入. 显然，G 的任意平面嵌入与 G 同构. 通常，我们把可平面图的平面嵌入称为平面图. 一个平面图把平面划分成若干个区域，称它们为面，其中无穷区域称为外部面，其他的区域称为内部面. 对于平面图 G 中的一个面，若这个面的边界是圈，则称此圈为 G 中的面部圈. 特别，外部面的边界称为外部圈. 极大平面图是指在任意一对不相邻的顶点之间添加一条边便可破坏其平面性的平面图. 因此，极大平面图的每个面都为三角形，故也称为三角剖分图. 除了外部面外，其余所有的面都是三角形的平面图称为近三角剖分图(near-triangulation)，并称其外部面为 k-面($k\geq 3$ 表示外圈的长度). 由于任意一个平面图都可以通过不断地加边变成一个极大平面图，并且子图的色数不超过原图的色数，故著名的 4-色猜想、唯一 4-色平面图猜想等[1] 的研究对象均可以归为极大平面图. 从而可以看出极大平面图在图论研究中的重要性.

图 G 的一个 k-顶点着色是一个从 G 的顶点集 V 到颜色集 $C(k)=\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射 f，并使它满足对任意的 $xy\in E(G)$，有 $f(x)\neq f(y)$. 如果 G 包含一个 k-顶点着色，则称 G 是 k-可着色的. 图 G 的色数，记作 $\chi(G)$，是指满足图 G 为 k-可着色的最小数值 k. 若 $\chi(G)=k$，则称 G 是 k-色图. 对于未提及的定义与记号，可参阅文献[2].

从1852年10月23日，Guthri 在给他老师 Morgen 的信里提出 4-色猜想的雏形后，到 1878 年，英国著名数学家 Cayley[3] 在伦敦数学学会上正式把这个问题提出来，至今 162 年来，关于极大平面图的研究得到了众多学者的青睐，其中包括许多著名的图论大师. 如 1879 年，律师兼数学家的 Kempe[4] 发表了

他的一个证明:由于一个极大平面图至少有一个顶点的度数是 3,4,5 中的一个(由平面图 Euler 公式可得),故他通过对 Kempe-链实行 Kempe 变换的思想证明了最小反例中不含 4-度顶点;同时,他相信用相同的方法也能够证明最小反例中不含 5-度顶点,从而证明了 4-色猜想. 次年,Tait[5-7] 根据一个错误的假设"任何一个 3-正则 3-连通平面图都有 Hamilton 圈"给出了 4-色猜想的另外一个证明. 一时间人们误以为四色难题就这样被解决了,故对它的研究热情也不再像之前那么高涨. 直到 11 年后,1890 年,当时还在牛津大学读书的 Heawood[8] 给出了 Kempe 证明中最小反例不含 5-度点情况中的一个反例图(见图 1(a)所示),这样,图论里第一个最著名的例图——Heawood 反例图就产生了. 另外,对于 Tait 的证明,其中的"假设错误"是 Petersen[9] 在 1891 指出来的,而该错误假设的第一个反例图是 Tutte[10] 在 1946 年才给出的,如图 1(b)所示,他通过一种非常特别的论述证明了该图是非 Hamilton 的.



(a) Heawood反例图 (b) Tutte图

图 1 两个著名的反例图

尽管 Kempe 和 Tait 的证明存在错误,但是他们的证明思想和成果对图论的发展起到了极大的促进作用. Heawood 就利用 Kempe 的思想,非常简短地证明了五色定理. 而 Tait 的 3-正则 3-连通平面图的 Hamilton 性,以及 3-边着色与 4-点着色之间的关系等研究结果都已被图论界所接受,并引起了许多学者的研究兴趣,可见他们推动了图论的发展,并被记入了图论发展的历史.

之后在1976年,美国数学家 Appel 和 Haken[11-14] 采用寻找可约的不可避免构型集的方法,利用计算机辅助计算证明了四色猜想,但是证明过程比较复杂,仅程序就有数百页,可见其可读性不是很好,故寻找一条攻克四色猜想的捷径,仍是数学家们非常关心的问题. 当然这还需要对极大平面图进行更深入的研究,需要从骨子里彻底地搞清楚它的结构.

基于极大平面图的研究涉及到许多方面,如度序列问题、Hamilton 性、色多项式、生成算法与运算系统、图计数与圈计数问题以及生成树搜索和匹配问题等,故很难写出一篇文章对它进行既全面又深入的总结与评述. 本文主要从以下 9 个方面介绍了极大平面图的发展情况:(1) 对极大平面图的度序列问题进行了概述;(2) 详细地总结了极大平面图 Hamilton 性的研究进展,并进行了全面的剖析;(3) 把极大平面图色多项式的研究情况进行了归纳,并对已得结论进行了分析和评论;(4) 对极大平面图生成运算系统(即任何一个极大平面图是从何而来的)及基于电子计算机的生成算法进行了概述;(5) 详细地总结了在一些限制条件下极大平面图的计数公式与渐近公式;(6) 对顶点数相同的极大平面图之间相互转化的一种重要的运算—边翻转运算的研究情况进行了归纳,并对已得结论进行了分析和评论;(7) 对极大平面图的分解与覆盖,特别是对树分解以及森林分解方面的相关研究进行了概述;(8) 对极大平面图中生成树以及独立生成树的研究进行了概述;(9) 对极大平面图算法方面的相关研究进展进行了概述. 本文是一篇研究比较全面的综述性文章,展示了大量相关研究领域的重要结论,并对其进行了一定的评述,希望对今后极大平面图的研究起到辅助性作用.

2 极大平面图度序列与连通性

平面图度序列问题是图论研究中的一个既基础又重要的分支,早在 20 世纪 30 年代,Whitney[15-16] 就对图的连通性问题展开了初步的研究,到了 60 年代和 70 年代,该问题的研究进入了一个高峰期. 平面图度序列问题的研究在许多实际问题中都有所应用,比如在电气工程和计算机科学领域[17],印刷电路板的设计和一些相关的排列问题,以及可靠通信网络设计和测量的设计等领域[18]. 另外,平面图度序列的研究与多面体的结构息息相关,从而已被应用到线性和整数规划中[19].

对于平面图 G 中的一个 k-圈 C,如果 C 的内部与外部均至少含有 1 个顶点,则称其为分离 k-圈. 对一个极大平面图 G,显然有这样的事实:G 要么是 3-连通的,要么是 4-连通的,要么是 5-连通的;并且若 G 不含分离 3-圈,则 G 是 4-连通的;若 G 既不含分离 3-圈又不含分离 4-圈,则 G 是 5-连通的.

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是一个非增的正整数序列,如果它是某个图(平面图)的度序列,则称 π 可图(平面图)表示. 1960 年,Erdös 和 Gallai[20] 证明了序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 可图表示当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数,且对于 $1\le r\le n-1$,有 $\sum_{i=1}^{r} d_i\le r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min(r,d_i)$. 由著名的 Euler 公式,容易得到可图表示序列 $\pi=$

$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是可平面图表示的一个必要条件(但不充分)：$\sum_{i=1}^{n} d_i\le 6(n-2)$，$n\ge 3$. 若 $d_1-d_n=k$，则称 π 是k-序列. 若$\sum_{i=1}^{n} d_i\le 6(n-2)$，则称 π 是一个 Euler 序列；进而，若$\sum_{i=1}^{n} d_i=6(n-2)$，则称 π 是一个极大 Euler 序列.

关于平面图度序列的问题已经得到了许多结果，如 Hawkins、Hill、Reeve 和 Tyrell[21] 在 1966 年得到：除了 4^7 和 5^{14} 外，任意一个正则可图表示 Euler 序列都是可平面图表示的，其中 $\pi=(d_1^{x_1},d_2^{x_2},\cdots,d_n^{x_n})$表示以 π 为度序列的图中分别含有 x_i 个 d_i-度顶点 $i=1,2,\cdots,n$.

Bowen[22] 和 Chvátal[23] 分别在 1966 年和 1969 年，给出了可图表示序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是可平面图表示的另外一个必要条件(但不充分)：

$$\sum_{i=1}^{k} d_i\le\begin{cases}2n+6k-16, & 3\le k\le\dfrac{n+4}{3}\\[2mm] 3n+3k-12, & \dfrac{n+4}{3}\le k\le n\end{cases}\tag{1}$$

1977 年，Schmeichel 与 Hakimi[24] 证明了除 $5^{10}4^1$，$5^{12}4^1$，6^15^{12} 和 6^15^{14} 外，任意一个可图表示 Euler 1-序列都是可平面图表示的；除 $5^14^43^1$，$5^54^23^1$，$6^15^{10}4^1$，5^33^3，$6^15^24^5$，7^15^{13}，$5^44^13^2$，$5^74^13^1$，$7^16^15^{13}$，6^14^6，5^93^1外，每一个可图表示极大 2-序列都是可平面图表示的；除 4^52^1，$5^{11}3^1$，5^33^3，7^15^{15}，$6^{n-7}4^7(n>7)$和一些尚未解决的情况($5^{13}3^1$，7^15^{17}，7^35^{17})外，每一个可图表示非极大 2-序列都是可平面图表示的；另外，他们还得到了非增可图表示序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是可平面图表示的一些必要条件，其中包含了式(1)的条件并对其进行了改进. 由于这些必要条件都比较复杂，故此处不再列出，详情可参看文献[24].

可以看出，到目前为止，还没有给出一个序列是可平面图表示的一个充分必要条件，所得到的结果大多是一些必要但不充分的条件，而且都很复杂，可用性不是很强，从而可见其艰难的程度. 基于此，人们展开了对极大平面图度序列的研究，并得到了一些很好的结果.

令$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是极大平面图 G 的度序列，$d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$. 1975 年，Etourneau[25] 证明了若 $d_1\le 6$ 且 $d_n=5$，则 G 是 5-连通的. 由 Euler 公式可知，$3\le d_n\le 5$. 当 $d_n=3$ 时，显然 G 是 3-连通的；那么当 $d_n=4$ 或 5 时，在$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$满足什么条件时，G 才是 d_n-连通的呢？

1978 年，Schmeichel 和 Hakimi[26] 通过一个推论扩展了 Etourneau 的结果：若 $d_1-d_n\le 1$，则 G 是 d_n-连通的. 这个条件也是非常特殊的，并不具有一般性，但还是扩展了 Etourneau 的结果. 另外，同一篇文章中，Schmeichel 和 Hakimi 在度序列的基础上给出了判断 G 是 d_n-连通的一个充分条件($4\le d_n\le 5$)：

$$\left\lfloor\frac{7}{3}\omega(4)\right\rfloor+\omega(5)<14\tag{2}$$

进一步，如果存在两个非零的正整数 α 和 β 使得$\lfloor 7\alpha/3\rfloor+\beta=14$，则存在最小度$\ge 4$ 且连通度为 3($\kappa(G)=3$)的满足 $\omega(4)=\alpha$，$\omega(5)=\beta$ 的极大平面图 G. 其中，$\omega(k)$表示在序列 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$ 中 k 出现的次数. 根据该结论，容易推出只含有 12 个或 13 个 5-度顶点的最小度为 5 的极大平面图 G 是 5-连通的(见 Fanelli[27]).

给定一个极大平面图 G 的度序列 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$，若满足式(2)的条件，说明 G 是 d_n-连通的；但是，如果不满足式(2)的条件，也不能一定说明 G 不是 d_n-连通的，即该条件并不必要. 在度序列的基础上，要想给出 G 是 d_n-连通的一个充要条件是非常困难的.

最小度为 5 的极大平面图是一类非常重要的图，许多著名的猜想都是因为最小反例中该情况不能被排除而没有被攻克，比如 4 色猜想，唯一 4-色猜想等. 故对该类图的存在性问题进行研究是非常重要的.

令 $F_{n,k}$表示恰含有 k 个 5-度顶点的最小度为 5 的 n-阶极大平面图类，即对于任意 $G\in F_{n,k}$，G 中恰有 k 个顶点的度数为 5，其余 $n-k$ 个顶点的度数≥ 6. 由 Euler 公式，显然 $n\ge 13$ 时，$12\le k\le n-1$. 若能彻底地搞清楚 n,k 满足什么条件时，$F_{n,k}$不空，那么就能通过度序列来判断是否存在相应的极大平面图，这将是一份很具挑战性的工作.

1967 年，Grünbaum 证明了不存在 $F_{n,n-1}$(文献[19]：272-275 页)；1975 年，Etourneau[25] 证明了当 $n\ge 12$ 且 $n\ne 13$ 时，$\exists G_n\in F_{n,12}$；1978 年，Ruscitti[28] 证明了：$\exists G_n\in F_{n,n-2}$当且仅当 $n\ge 14$，n 是偶数. 进一步，如果 $n\ne 12+10h(h=1,2,\cdots)$，则在 $F_{n,12}$中不存在恰含两个度数为$(n-2)/2$ 的顶点的极大平面图. 同时，他们还证明了：

$$\exists G_n\in F_{n,n-3}\Leftrightarrow n=15+10h,\ n=19+10h,\ n=21+10h,\ n=24+2h(h=0,1,\cdots)\tag{3}$$

1977 年，Schmeichel 与 Hakimi[24] 给出了 $F_{n,k}$中只含 5,6,7-度顶点和只含 5,7-度顶点时的一些特殊情况：对 $\forall n,k$，$F_{n,k}\equiv 7^{k_1}6^{k_2}5^k$，$k_1+k_2=n-k$，

非空，除了 $F_{14,13}\equiv 7^1 5^{13}$，$F_{15,13}\equiv 7^1 6^1 5^{13}$ 和下面未解决的情况：$F_{16,13}\equiv 7^1 6^2 5^{13}$，$F_{17,14}\equiv 7^2 6^1 5^{14}$，$F_{18,15}\equiv 7^3 5^{15}$，$F_{19+4h,15+2h}\equiv 7^{3+2h} 6^1 5^{15+2h}$，$F_{22+4h,17+2h}\equiv 7^{5+2h} 5^{17+2h}$，$h=0,1,2$. 然而，在1980年，Fanelli[29]证明了 $\exists G_{19+4h}\in F_{19+4h,15+2h}$，$h=0,1,2$，从而与文献[24]中的猜想矛盾. 故基于式(3)，Schmeichel 与 Hakimi 的结果可改进为[27]：

$\forall n,k,F_{n,k}\equiv 7^{k_1} 6^{k_2} 5^k$ 非空，其中 $k_1+k_2=n-k$，除了 $F_{14,13}\equiv 7^1 5^{13}$，$F_{15,13}\equiv 7^1 6^1 5^{13}$，$F_{16,13}\equiv 7^1 6^2 5^{13}$，$F_{17,14}\equiv 7^2 6^1 5^{14}$，$F_{18,15}\equiv 7^3 5^{15}$ 和未解决的情况 $F_{22+4h,17+2h}\equiv 7^{5+2h} 5^{17+2h}$，$h=0,1,2$.

1982 年，Fanelli[27]对一类极大平面图的存在性和连通性展开了研究. 对含 13 个 5-度顶点的情况，由 Euler 公式容易推出存在图 $G_n\in F_{n,13}$ 当且仅当 $G_n\equiv 7^1 6^{n-14} 5^{13}$. 在此基础上，Fanelli 得到 $\exists G_n\in F_{n,13}\Leftrightarrow n\geq 17$[27]. 对含 14 个 5-度顶点的情况，他证明了存在任意 $n(\geq 16,\neq 17)$-阶恰含 14 个 5-度顶点，其余顶点度数 ≥ 6 的极大平面图，并给出定理(文献[27]：定理 2.3)：$\forall n\geq 16$，$n\neq 17$，$\exists G_n\in F_{n,14}$. 进一步，当 $n<19$ 时，$\exists G_n\equiv 7^2 6^{n-16} 5^{14}$，但不存在 $G_n\equiv 8^1 6^{n-15} 5^{14}$；当 $n\geq 19$ 时，$\exists G_n\equiv 7^2 6^{n-16} 5^{14}$，$\exists G_n\equiv 8^1 6^{n-15} 5^{14}$. 最后，他又给出了此类图是 5-连通的一个充分条件：若 $\exists G_n\in F_{n,14}$ 且 $n\leq 25$，则 G_n 是 5-连通的. 另外，当 $n=26$ 时，存在连通度为 4 的 $G_n\in F_{n,14}$；当 $n=33$ 时，存在连通度为 3 的 $G_n\in F_{n,14}$.

1983 年，Fanelli[30]对 $G_n\in F_{n,k}$ 的连通性进行了进一步研究，得到了一些 G_n 是 4,5-连通时 n,k 所满足的较一般性的条件，扩展了前面所述的 $F_{n,12}$，$F_{n,13}$ 是 5-连通时的结论. 他得到：$\forall n\geq 19$，$\exists G_n\in F_{n,15}$；$\forall n\geq 18$，$\exists G_n\in F_{n,16}$；$\forall n\geq 21$，$\exists G_n\in F_{n,17}$；$\forall n\geq 20$，$\exists G_n\in F_{n,18}$. 并由此推出对于 $G_n\in F_{n,k}$，$14\leq k\leq 18$ 时 G_n 是 4-连通的一些充分条件：

(1) $k=14$，$16\leq n\leq 32$，$n\neq 17$；

(2) $k=15$，$19\leq n\leq 28$；

(3) $k=16$，$18\leq n\leq 24$；

(4) $k=17$，$21\leq n\leq 22$；

(5) $k=18$，$n=20$.

另外，他给出了 $14\leq k\leq 16$ 时，$G_n\in F_{n,k}$ 是 5-连通的一些充分条件.

以上是极大平面图度序列问题的研究进展，可以看出，所得结果基本上都是建立在一定条件之上的. 要想给出该问题一般性的充分或必要条件，可见是非常困难的，但对于图论研究者来说，这也是一件非常有趣的工作. 在上面工作的基础上，是否能得到一些基于 n,k 的判断 $F_{n,k}$ 存在性的一般性条件？是否能根据极大平面图度序列 $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$，给出判断它是 d_n-连通的一般性的条件？特别地，对于序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，能否给出计算以 π 作为度序列的所有非同构极大平面图的一个有效的算法或计算公式？这些问题需要研究者们的进一步探索.

3 极大平面图的 Hamiltonian 性

众所周知，关于图的 Hamilton 问题的研究已有很长时间. Hamilton 路和 Hamilton 圈最早是在 1856 年 SirWilliam Rowan Hamilton 写给他的一位朋友(Graves)的信中被提出来的，当时是蕴含在一个正十二面体上的数学游戏中[31]. 一个图中的 Hamilton 圈(路)是指包含该图中所有顶点的圈(路). 一个图若包含 Hamilton 圈，则称其为 Hamiltonian 图. 研究 Hamiltonian 问题，当然是希望找到判断一个图是 Hamiltonian 图的方法. 然而，判断一个图是否含有 Hamilton 圈是 NP-完全的. 从而，学者们希望能找到关于 Hamiltonian 存在性的充分或必要条件.

平面图 Hamiltonian 问题的研究最早是在 1880 年，Tait[5-7]证明了 4-色猜想等价于任意一个 3-连通 3-正则平面图都是 3-边可着色的. 因为他相信每一个 3-连通立方图都是 Hamiltonian，从而解决了 4-色猜想. 不幸的是，1946 年，另一位图论大师 Tutte[10]通过一个例子否定了该论断. 下面我们详细地介绍一下极大平面图 Hamilton 问题的研究进展.

首先介绍一些文中用到的定义：

令 H 是连通图 G 的一个真子图，下面考虑两类可能的边集：

(1) 对于 $G-V(H)$ 中的每一个连通分支 F，由 F 中的边以及连接 F 和 H 的边组成的边集；

(2) $E(H)$ 中的每一条边 e 单独归为一类 $\{e\}$. 则称这些类在 G 中的导出子图为 H 在 G 中的桥. 可见，H 不同桥之间的交点只能是 H 中的顶点. 对于 H 中的一个桥 B，称 $V(B)\cap V(H)$ 中的顶点为 B 对 H 的接触顶点.

令 $\omega(G)$ 表示一个图 G 的连通分支的个数. 若对于 G 的每个满足 $\omega(G-S)>1$ 的顶点子集 S 有 $|S|\geq t\omega(G-S)$，则称图 G 是 t-坚韧的. 图 G 的坚韧度是指 G 是 t-坚韧中的最大的 t，用 $\tau(G)$ 表示. 因为完全图没有割集，规定 $\tau(K_n)=\infty(n\geq 1)$，故当 G 不是完全图时，$\tau(G)=\min\{|S|/\omega(G-S)\}$，其中该最小值取遍 G 所有的顶点割集. 1997 年，Plummer[32]

把满足 $\tau(G)=|S|/\omega(G-S)$ 的顶点割集 S 定义成坚韧集.

对于图 G，令 $h(G)$ 表示 G 中最大圈的长度，显然 G 不是 Hamiltonian 当且仅当 $h(G)<|V(G)|$. 令 $\mathcal{G}$ 表示一族图类，如果存在一个实数 b 和 $\mathcal{G}$ 中一类非同构的图序列 G_n，有 $h(G_n)\leq b(v(G_n))^{\sigma}$，则称 σ 为 $\mathcal{G}$ 的脆性指数. 用 $\sigma(\mathcal{G})$ 表示 $\mathcal{G}$ 的所有脆性指数中最大的下界 $\inf\sigma$. 即

$$\sigma(\mathcal{G})=\liminf\frac{\log h(G_n)}{\log v(G_n)},$$

其中，$\liminf$ 取遍所有的 G_n，且 $n\to\infty$，$v(G)\to\infty$. 很明显，对所有非平凡的 $\mathcal{G}$，$\sigma(\mathcal{G})\leq 1$.

关于极大平面图 Hamiltonian 问题，Whitney[33] 在 1931 年证明了 4-连通极大平面图是 Hamiltonian 图；随后，在 1956 年，Tutte[34] 将该结果扩展到了所有 4-连通平面图上（Tutte 定理）：令 G 是一个 2-连通平面图，C_1，C_2 是 G 的有一条公共边 $e'=uv$ 的两个面部圈，e 是 C_1 中异于 e' 的另外一条边，则 G 中存在一个包含边 e，e' 的圈 C' 使得下面两个条件成立：

(1) C' 的每一个桥中至多含有 3 个接触 C' 的顶点；

(2) C' 的每一个含有 $C_1\cup C_2$ 中的一条边的桥中至多含有 2 个接触 C' 的顶点.

Tutte 定理的作用是很强的，通过它，可以推出许多很好的结论. 例如，Nelson 所注意到的"一个 4-连通平面图删去任意一个顶点后是 Hamiltonian 图"，该结论可由 Tutte 定理直接推出（见文献[35]）；但是，1975 年，Plummer 在文献[35]中指出"任意删去两个顶点的图是否是 Hamiltonian 图还是一个尚未解决的问题"；反过来，1978 年，Thomassen[36] 在 Tutte 定理的基础上，证明了：如果一个最小度 ≥ 4 的平面图 G 的每一个删点子图都是 Hamiltonian，那么 G 本身也是 Hamiltonian 图. 另外，Tutte 定理还可以推出其他的一些结论，具体可参考文献[35-36].

文献[34]中对 Tutte 定理的证明比较复杂，其中用到了许多与桥相关的辅助性定理. 因为 Hamilton 圈存在性问题对图论专家来说具有很高的研究价值，故给上述结论一种简短的解释方式是大家所期望的. 当然，若把文献[34]中关于桥的理论用文献来代替，那么其证明过程就会大大简化. 1977 年，Tutte 在文献[37]中花了大部分篇幅研究了桥的理论，并得到了一些 Hamiltonian 图的相关理论.

在 1972 年，Plummer[35] 提出了一个猜想：任何一个 4-连通平面图都是 Hamilton-连通的，即对于任意给定的两个顶点，它们之间都存在一条 Hamilton 路. 1983 年，Thomassen[38] 通过一个证明相对简短的定理，证明了 Tutte 定理和 Plummer 的猜想，它们只是该定理的两个推论；另外，该定理还推出了在平面循环(cyclically)4-边-连通图中，给定的两个顶点之间存在一条长度很长的路. 该定理的具体内容如下：

令 G 是一个 2-连通平面图，C 是它的外部圈. 设 v，e 分别是 C 的一个顶点和一条边，u 是 G 中任意一个不同于 v 的顶点. 则 G 中存在一条包含边 e 的从 u 到 v 的路 P，使得下面两个条件成立：

(1) P 的每一个桥中至多含有 3 个接触 P 的点；

(2) P 的每一个含有 $C_1\cup C_2$ 中的一条边的桥中至多含有 2 个接触 P 的点.

该定理的证明相对于 Tutte 在文献[34]中的证明简化了许多，可见相对于前者，它更具有可读性；另外，相比于 Tutte 定理，该定理更具一般性，应该是关于平面图 Hamiltonian 性的研究中比较好的一个结果.

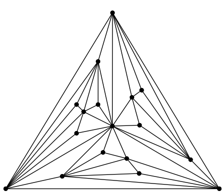
1997 年，Sanders[39] 得到定理：对于 2-连通平面图 G，令 α 是其外圈上的一条边，x，y 是 G 中任意两个不同的顶点，则 G 中含有一个包含 α 的从 x 到 y 的圈. 由此定理，进一步推出：(1) 若 G 是一个 4-连通平面图，x，y 是 G 中两个不同的顶点，$\alpha\neq xy$ 是 G 的一条边，这时，G 中含有一条包含 α 的从 x 到 y 的 Hamilton 路；(2) 每一个 4-连通平面图 G 都有包含 G 中任意两条边的 Hamilton 圈. 这些结果推广了上面 Thomassen[38] 得到的关于路的一个定理. 2010 年，Göring 与 Harant[40] 构造了一个含有 3 条互相之间距离很远的边的 4-连通极大平面图 G，使得 G 中任意一个 Hamilton 圈都不同时经过这 3 条边（对 5-连通极大平面图不成立），从而说明了上面 Sanders 的结果应该是最好的.

由于 Hamiltonian 问题的复杂性，单纯地研究其存在性难度很大，故人们转向了研究限制条件下的 Hamiltonian 问题. 1973 年，Chvátal[41] 首先引入了坚韧度的概念，研究了坚韧度与 Hamilton 圈之间的关系，得到了许多很好的结果，并提出了一些引用度很高的猜想[41-43]. 自从坚韧度的概念被提出来之后，立刻吸引了广大学者的研究兴趣，主要是对坚韧度条件与圈存在性之间的相关性的研究. 其中，许多研究工作都是建立在 Chvátal[41] 提出的一些猜想的基础之上，最具代表性的猜想（t_0-坚韧猜想）至今仍然还是个公开问题（文献[41]猜想 2.6）：是否存在一个有限的常数 t_0 使得每一个 t_0-坚韧图 G 都含有一个 Hamilton 圈？人们曾一度认为当 $t_0=2$ 时该猜

想是对的，但是不幸的是，在 2000 年，Bauer 等人[44]证明了并不是所有的 2-坚韧图都是 Hamiltonian. 到目前为止，t_0-坚韧猜想只被证明在一小部分特殊图类上成立，包括平面图、无爪图(claw-free)和弦图等中的部分图类. 当然，计算一个图的坚韧度已经被证明是 NP-难的[45]. 2006 年，Douglas 等人[46]给出了图坚韧度的一个非常完整清晰的总结，对之前已得的结果进行了分类，其中包括特殊图类、计算复杂性、因子、2-坚韧猜想等等. 由于本文是对极大平面图的相关性质进行总结，故在此就不将其一一列出，具体可参见文献[41,46].

相对于一般图，极大平面图中与坚韧度相关的结论比较少. 由于每个圈都是 1-坚韧的，故一个图如果是 Hamiltonian 图，那么该图是 1-坚韧的，但反过来却不成立. 1980 年，Nishizeki[47]给出了一个构造 1-坚韧但非 Hamiltonian 极大平面图的方法，例如，图 2(a)就是其中的一个，容易看出此图含有分离 3-圈.

1931 年 Whitney 在文献[33]中提出：一个极大平面图若不含分离 3-圈，那么它是 Hamiltonian. 1984 年，Asano 等人[48]给出了该定理的一个简化证明，并给出了在此类图中寻找 Hamilton 圈的一个线性时间算法. 1990 年，Dillencourt[49]通过放松条件“极大平面图”到“近三角剖分图”扩展了 Whitney 的定理，但是仍保留了近三角剖分图中不含分离 3-圈的假设条件. Dillencourt 把不含分离 3-圈的近三角剖分图称为简单三角剖分图(NST-triangulations)，证明了此类图在其弦满足给定稀疏条件时是 Hamiltonian 图，并证明了在线性时间下就可以从这类图中寻找到 Hamilton 圈. 特别地，Dillencourt 给出了 1-坚韧的不含分离 3-圈的非 Hamiltonian 简单三角剖分图(如图 2(b)).


(a) 一个1-坚韧非Hamiltonian极大平面图

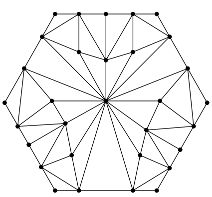

(b) 一个1-坚韧非Hamiltonian NST-triangulation

图 2 两个例图

1973 年，Grünbaum 和 Walther[50]最早引入了脆性指数(shortness exponent)的概念，并研究了正整数 q,r 在各种取值时图类 $\mathcal{G}(q,r)$ 的脆性指数，$\mathcal{G}(q,r)$表示每个面的边界至多 q 条边，每个点的度数至多为 r 的平面图类. 1991 年，Dillencourt[51]对 1-坚韧极大平面图的脆性指数进行了研究，并证明了该类图的脆性指数不超过 $\log_7 6$. 1996 年，Michal[52]通过一篇“注”进一步研究了 1-坚韧极大平面图的脆性指数，并改进了 Dillencourt 的结果，他得到 1-坚韧极大平面图的脆性指数不超过 $\log_6 5$. 另外，他还给出了一个 13 个顶点的 1-坚韧非 Hamilton 极大平面图，这要比 Nishizeki 在文献[47]和 Dillencourt 在文献[51]中给出的例子的顶点数少.

对于极大平面图来说，由 Whitney 在文献[33]中的定理可以推出一个非 Hamilton 极大平面图的坚韧度不超过 2/3. 1995 年，Harant 与 Owens[53]证明了坚韧度≤5/4 的一类极大平面图的脆性指数小于 1.

1994 年，Jung[54]研究了无限阶极大平面图中的 Hamilton 路问题. 他在一个无限阶 4-连通且含有 1 个或 2 个无限度顶点的 VAP-free 极大平面图(VAP 是指无限平面图中的一个点 p，满足对任意 $\varepsilon>0$，$D(p,\varepsilon)$中都含有无限多个点[55])中，构造了一个 one-way 无限阶 Hamilton 路，并证明了每一个恰含一个端点的无限阶 4-连通极大平面图都有一个 one-way 无限 Hamilton 路，从而把 Whitney[33]的结论扩展到了无限图中.

另外，由于极大平面图结构的特殊性，故若含有 Hamilton 圈，那么一定不止含有一个，从而学者们开始对极大平面图的 Hamilton 圈计数问题产生了兴趣. 1979 年，Hakimi、Schmeichel 与 Thomassen[56]研究了一个具有 n 个顶点的 Hamilton 极大平面图中最少 Hamilton 圈个数的问题，构造了一类恰含 4 个 Hamilton 圈的 $n(\geq 12)$-阶极大平面图，并证明了每个 4-连通 n-阶极大平面图至少包含$n/\log_2 n$ 个 Hamilton 圈.

上述是关于极大平面图 Hamiltonian 性的研究进展，其实我们希望的是给出 3-连通 3-正则平面图存在 Hamilton 圈的一个充要条件，因为一旦找到，我们就可以知道哪些 3-连通立方图不是 Hamiltonian 图，然后再通过研究这些图的性质和结构来攻克 4-色猜想，但这是相当困难的. 从前面大量研究结果可以看出，要想通过研究平面图的 Hamiltonian 性来寻找一条解决 4 色猜想的道路，几乎是不可能的，但是，许多结果的证明思路和方法还是很值得我们学习和借鉴的.

4 色多项式

所谓图 G 的色多项式是指一个计算 G 的正常

t-着色个数的函数 $f(G,t)$，其中 t 是正整数. 虽然 $f(G,t)$ 定义在正整数上，但是已经证明 $f(G,t)$ 是关于 t 的多项式，从而可视其为定义在实数和复数上的函数. 色多项式最早是由 Birkhoff[57] 于 1912 年提出来的，他希望通过定量研究平面图 G 的 4-着色个数来证明 $f(G,4)>0$，从而解决 4-色猜想. 随后，在 1932 年，Whitney[58] 将色多项式推广到了一般图上，不止局限于平面图，并得到了许多关于它的基本理论. 尽管借助于色多项式理论，Birkhoff 依然没能解决 4-色猜想，然而，1946 年，Birkhoff 和 Lewis[59] 证明了：对平面图 G，当 $t\in[5,\infty)$ 时，$f(G,t)>0$. 另外，他们猜想对于所有 $t\in[4,\infty)$，$f(G,t)>0$. 这样，在实数色根理论中，他们得到了第一个结论. 其中，色多项式 $f(G,t)$ 的色根是指满足 $f(G,z)=0$ 的实数或复数 z. 对于图 G 的色多项式 $f(G,t)$ 和一个区间，如果 G 没有色根在该区间中，那么称其为 G 的 root-free 区间. 同样，如果一族图 $\mathcal{F}$ 中的每个图的色根都不在一个区间中，那么称该区间是这一族图 $\mathcal{F}$ 的 root-free 区间. 显然，对所有图来说，$(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 是两个极大的 root-free 区间. 令 $c(\mathcal{F})$ 表示一族图 $\mathcal{F}$ 中图的色多项式根的上确界，如果 $c(\mathcal{F})<\infty$，则称 $(c(\mathcal{F}),\infty)$ 或 $[c(\mathcal{F}),\infty)$（根据 $c(\mathcal{F})$ 是否为 $\mathcal{F}$ 中某个图的色根）为 $\mathcal{F}$ 的 upper root-free 区间.

1993 年，Jackson[60] 证明了对所有图来说，$(1,32/27)$ 是另外一个极大的 root-free 区间. 这样，再加上 Birkhoff 和 Lewis 在 1946 年的结论，对于平面图色根的研究只需局限在区间 $(32/27,5)$ 即可. 1997 年，Thomassen[61] 进一步强化了 Jackson 的结果，他证明：当 $32/27\leq\lambda_1<\lambda_2$ 时，对于任何一个区间 (λ_1,λ_2)，都存在一个图 G，使得 G 的色根在区间 (λ_1,λ_2) 中. 上面的结果应该是色根区间研究中最好的，到目前为止，还没有见到比他们更好的结果. 另外，Thomassen[61] 提出了一个猜想：平面图类的色根集合是由 0，1 和稠密子集 $(32/27,4)$ 组成的. 该猜想的对错目前还不清楚，因为平面图色根的分布是否在区间 $(32/27,4)$ 中仍不清楚，也可能在区间 $(32/27,4)$ 中还包含某些 root-free 区间.

进一步，由上面 Jackson 的结论可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n\in N$，使得 $f(G_n,t)$ 有一个根属于区间 $(32/27,32/27+\varepsilon)$. 特别注意到，当 $G_n(n\geq1)$ 是平面图时，说明平面图类存在图的色根任意地接近 $32/27$，但是，还并不知道是否存在色根任意接近 4 的平面图.

对于任意整数 n，令 $B_n=2+2\cos(2\pi/n)$，称数 B_n 为第 n 个 Beraha 数. 最早的几个 Beraha 数是 4，0，1，2，$\mathcal{T}^2$，3，…，其中 $\mathcal{T}=(1+\sqrt{5})/2$（注意到该序列的极限是 4）. 1975 年，Beraha[62] 提出了下面的问题（称为 Beraha 问题）：

对于任意 $\varepsilon>0$，是否存在一个极大平面图 G 使得 $f(G,t)$ 有一个根属于区间 $(B_n-\varepsilon,B_n+\varepsilon)$？

如果该问题的答案是肯定的，那么说明存在色根任意接近 4 的平面图. 很显然，当 $n=2,3,4,6$ 时，$B_n\leq3$，从而 Beraha 问题在这些情况下的答案是肯定的. 1973 年，Beraha、Kahane 和 Reid[63] 证明了 Beraha 问题在 $n=7$ 和 $n=10$ 时的答案是肯定的. 1980 年，Beraha、Kahane 和 Weiss[64] 研究了当 $n=5$ $(B_5=\mathcal{T}^2)$ 时的情况，并通过找到一类色根趋向于 $\mathcal{T}^2$ 的极大平面图肯定了此时的 Beraha 问题. 其实，早在 1970 年，Tutte[65] 就证明了：对于任何一个极大平面图 G，$0<|f(G,\mathcal{T}^2)|\leq\mathcal{T}^{5-|V(G)|}$. 此结果只能说明 $|f(G,\mathcal{T}^2)|$ 很小，并不能说明对于极大平面图 G，$f(G,\lambda)$ 有一个任意靠近 $\mathcal{T}^2$ 的根. 到目前为止，当 $n=8,9$ 和 $n\geq11$ 时，Beraha 问题仍是一个公开问题.

对于平面图的 upper root-free 区间的研究主要是 1997 年 Thomassen[61] 的一些工作：

结论 1.　下面 3 类图有相同的 upper root-free 区间：

（1）平面图类；（2）极大平面图类；（3）不含 K_5-minor 的图类.

其中，一个图 G 的 minor 是指 G 通过一系列的删点、删边和缩边运算后得到的任意一个图. 因为 K_5 不含 $K_{3,3}$-minor 且 4 是 $f(K_5,t)$ 的一个根，故不含 $K_{3,3}$-minor 图类的 upper root-free 区间不含 4. 为此，Thomassen 又得到了另外一个结论.

结论 2.　不含 $K_{3,3}$-minor 图类的 upper root-free 区间是 $I\backslash\{4\}$，其中 I 是平面图类的 upper root-free 区间.

近三角剖分图的色根的研究始于 1946 年，Birkhoff 和 Lewis[59] 首先得到了下述结论：

如果 G 是一个外圈长度为 k 的近三角剖分图，$t\leq2$，则

$$|f(G,t)|\geq|t(t-1)(t-2)^{k+d-2}(t-3)^{n-k-d}|,$$

其中，n 表示 G 的阶数，d 表示 G 中正常 digon 的个数. 在一个近三角剖分图中，一个 digon 是指一个长度为 2 的分离圈；一个关于顶点 u,v 的正常 digon 是指一个内部不含其它 uv 边的 digon[66].

由上述结论，还可以推出：如果 G 是一个近三角剖分图，$t\in(1,2)$，则 $f(G,t)$ 非零且带符号

$(-1)^{|V(G)|}$. 2008 年，Dong 和 Koh[67] 推广了该结论：对任意 2-连通无环平面图 G，如果 $f'(G)\le 4$，且对于 G 的任意独立集 S，满足 $c(G-S)\le |S|<f'(G)$，则对所有 $t\in(1,2)$，有 $(-1)^{|V(G)|}f(G,t)>0$，其中，$f'(G)$ 表示 G 中所有边界不是 3-圈的面的个数，$c(G)$ 表示图 G 的连通分支数.

在色多项式的研究过程中，学者们发现了两个比较特殊的极大平面图：$\overline{K}_2+C_4$ 和 $\overline{K}_2+C_5$，因为它们的色多项式分别为 $t(t-1)(t-2)(t^3-9t^2+29t-32)$ 和 $t(t-1)(t-2)(t-3)(t^3-9t^2+30t-35)$，而 2.546602… 和 2.677814… 分别是它们的一个色根. 在对极大平面图的非整数色根的研究中，Woodall[68-69] 相信 2.546602… 是一个非常重要的值，并证明了：对于 n-阶极大平面图 G 和所有的实数 $t\in(2,2.546602\cdots)$，有 $f(G,t)$ 是非零的且带符号 $(-1)^{n+d+1}$. 其中，d 表示 G 中 proper digons 的个数，2.546602… 是 $t^3-9t^2+29t-32$ 唯一的一个实数根. 而对于区间 (2.677814…, 3)，目前还不知道它是不是极大平面图色多项式的 root-free 区间. 为此，1992 年，Woodall[69] 提出了下面的猜想：

如果 G 是极大平面图，则对于所有 $t\in(2.677814\cdots,3)$，$f(G,t)$ 是非零的. 如果 G 是 4-连通且非 eulerian 的，则对所有 $t\in(2.677814\cdots,3)$，$f(G,t)$ 是非零的且带符号 $(-1)^n$，并有唯一的一个属于区间 (2.546602…, 2.677814…) 的根，其中 n 表示 G 的阶数.

1968 年，Read[70] 对图的色多项式进行了概述，并提出了问题：是否可以找到一个充分必要的代数条件来判断一个多项式是某个图的色多项式. 他注意到色多项式的系数的绝对值构成了单峰序列. 另外，Read 又提出问题：两个图色等价的充要条件是什么，是它们有相同的色多项式吗？特别地，Chao 和 Whitehead Jr[71] 在 1978 年定义了色唯一的概念：对于图 G，如果没有其它图与它有相同的色多项式，则称 G 是色唯一的. 他们在文献[71]中给出了许多类这样的图.

在 20 世纪 60 年代，由于 4-色猜想仍然没有被解决，Hall、Siry 和 Vanderslice[72]，Berman 和 Tutte[73] 开始对平面图复数色根展开研究. 当时计算机的可用性还不是很强，故研究复数色根可行的方法就是依靠经验. 1979 年，Beraha 和 Kahane[74] 找到了一类复数色根任意接近 4 的平面图，从而推断不可能给出 4-色定理的一个复分析证明. 2004 年，Sokal[75] 进一步研究了该问题，找到了一类平面图，其复数色根在 4 的复邻域内是稠密的，实际上是在整个 $|x-1|\ge 1$ 区域.

对于是否存在实色根任意接近 4 的平面图问题，在 2008 年以前一直未被解决[76]，因为 Jackson[76] 谈到他所知道的平面图中最大的实色根是 3.8267…(Woodall 发现的一个 21 个顶点的图). 然而，2008 年，Royle[77] 解决了此问题，找到了许多类实色根任意接近 4 的极大平面图.

色多项式是攻克 4-色猜想的一个非常有力的工具，尽管还没有成功，但是研究过程中得到了许多可以借鉴的思想和结论. 另外，色多项式不仅局限于平面图，在一般图上也有深入的研究，并得到了很多结果，其中一个简洁易懂的递推公式如下：

$$f(G,t)=f(G-e,t)-f(G\cdot e,t).$$

2005 年，Dong 等人[66] 出了一本专著对图的色多项式理论进行了概述. 分别从多项式与色多项式之间的关联性、实色根色多项式、整数根色多项式、复数根色多项式等方面介绍了关于图色多项式理论的发展情况，详细地总结了不同图类色多项式的研究结果，如一般图、3-连通图、Hamiltonian 图、平面图、极大平面图以及近三角剖分图等，并给出了相应的证明过程.

另外，本文作者许进教授得到了一个关于极大平面图色多项式的递推公式，详情可以在网上查到 (arXiv:0911.1587v3). 该公式把极大平面图的着色与图结构有机地结合起来，有助于我们后续对平面图着色的进一步研究.

从平面图色多项式理论得到的结果来看，虽然已经证明存在平面图的实数色根无限地接近 4，但毕竟不是 4，故这并不能否定 4-色猜想的正确性. 事实上，借助于计算机辅助计算，4-色猜想已经变成了 4-色定理，也就是说不可能找到色根为 4 的平面图. 另一方面，以往得到的关于平面图色多项式理论方面的研究，也没能用纯粹的数学方法证明 4-色猜想并带来更多的希望. 但是，色多项式理论的研究推动了图论的发展，促进了组合与代数两个数学分支之间的学科融合.

5 极大平面图的生成运算系统

令 $\mathcal{M}$ 表示一类极大平面图，I 表示 $\mathcal{M}$ 中某些阶数较小的图的集合，称为初始对象集，Φ 表示作用在 $\mathcal{M}$ 上的运算的集合. 如果 $\mathcal{M}$ 在 Φ 下是封闭的，并且 $\mathcal{M}$ 中的任意一个图都可以从 I 中的一个图经过一

系列 Φ 中的运算得到，那么称 $\langle I;\Phi\rangle$ 为 $\mathcal{M}$ 的生成运算系统. 研究极大平面图如何生成是非常重要的. 首先，它可以提供一个基本的归纳证明思想；其次，它可以被应用到极大平面图的构造与计数方面的算法开发中[78].

早在 1891 年，Eberhard[78] 就展开了对极大平面图构造问题的研究，给出了构造所有极大平面图的运算系统，把这个运算系统记为 $\langle K_4;\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}\rangle$，其中，$K_4$ 为初始对象，$\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ 为运算集，φ_1，φ_2，φ_3 是 Φ 的 3 个算子，具体过程如图 3 所示.

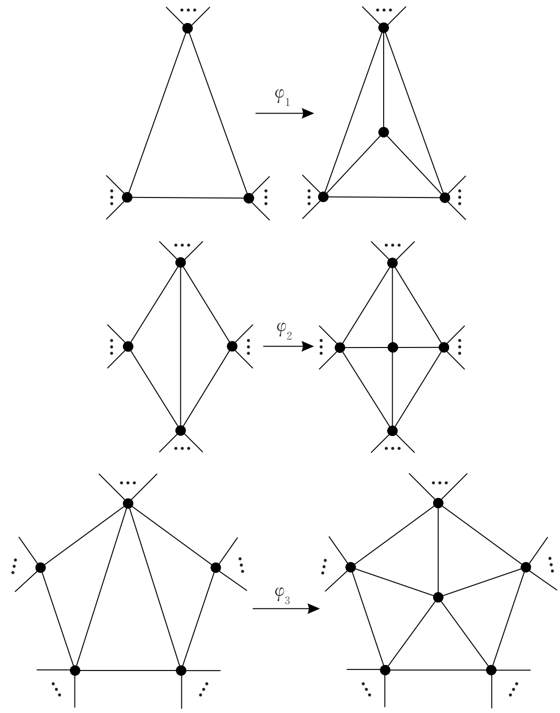


图 3　Eberhard 构造极大平面图的 3 种算子

设 G 是一个极大平面图，C 是 G 中的一个圈. 若 C 内不含顶点，只是 C 上的某些不相邻的顶点之间通过连接边使得 C 内每个面都是三角形，则把 C 称为图 G 的一个纯弦圈，并把 C 内每条边称为 C 的弦. 为方便叙述，我们把极大平面图中的一个三角形也视为一个纯弦圈.

容易看出，Eberhard 的构造方法实际上是把一个极大平面图中圈长分别为 3、4、5 的纯弦圈中的所有的弦删去，然后在圈内添加一个顶点，并让该顶点与圈上每个顶点相连边.

1967 年，Bowen 与 Fisk[79] 在《Mathematics of Computation》上发表了一篇构造所有极大平面图的方法的论文，所用方法与 Eberhard 给出的方法完全相同，并分别给出了 6～12 阶最小度≥3 与最小度≥4的极大平面图的计数，见表 1.

表 1　6～12 阶最小度为 3 与 4 的极大平面图的数目

阶数	$t_n(3)$	$t_n(4)$
6	2	1
7	5	1
8	14	2
9	50	5
10	233	12
11	1249	34
12	7595	130

表 1 中 $t_n(3)$、$t_n(4)$ 分别表示阶数为 n 且最小度≥3 与最小度≥4 的极大平面图的数目. 对极大平面图的计数问题将在下一节详细讨论，这里不再阐述.

Eberhard之后，在1974年，Barnette[80] 与 Butler[81] 独立地给出了构造所有 5-连通极大平面图的方法. 不同于 Eberhard，Barnette 与 Butler 的运算系统中，初始对象是正二十面体；同时，该方法的算子也有 3 个，他们的运算系统被记为 $\langle Z_{20};\Phi=\{\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6\}\rangle$，其中，$Z_{20}$ 为正二十面体，φ_4，φ_5，φ_6 是它的 3 个算子，如图 4 所示，图中省略号表示该顶点所关联的两条边之间可能含有边，也可能不含边，以示每个顶点的度数至少为 5.

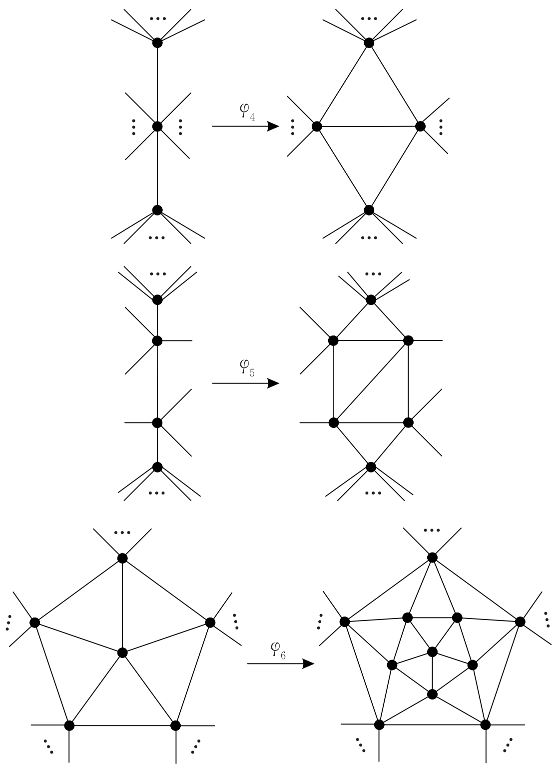


图 4　Barnette 与 Butler 构造极大平面图的 3 种算子

简言之，Barnette 与 Butler 的构造方法是：从正二十面体出发，通过不断地实施如图 4 中所给出的 3 种算子 φ_4，φ_5 或 φ_6，可得到所有的 5-连通极大平面图.

1983年，Batagelj[82](也见Batagelj[83])对Barnette与Butler的方法进行了改进，更确切地讲，是将运算系统中的一个算子进行了更换.其初始对象仍是正二十面体，运算子也有3个，他们的运算系统被记为$\langle Z_{20};\Phi=\{\varphi_4,\varphi_5,\varphi_7\}\rangle$，其中$\varphi_7$称为边翻转算子，如图5所示，其中$\varphi_7$作用前的图中，顶点$x$与$y$不相邻.

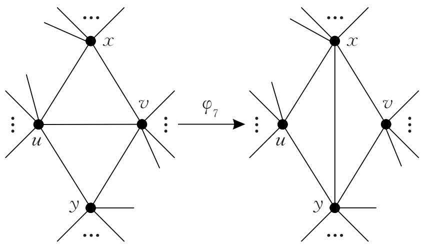


图5 边翻转算子

其实，边翻转算子并不是Batagelj的首创，这个概念早在1936年就由Wagner[84]提出来了.由于目前对边翻转算子的研究较为深入，故在后面专门对此方面给予较为详细的讨论.

1985年，Batagelj[85]给出了一种非常简单的构造所有极大平面图的方法.其初始对象为K_4，他的运算系统被记为$\langle K_4;\Phi=\{\varphi_8\}\rangle$，其中，$\varphi_8$是它的唯一一个算子，如图6(a)所示.可以看出算子φ_8与算子φ_4类似，但对作用的图结构要求弱一些，不需要限制两端点的度数大于等于4.

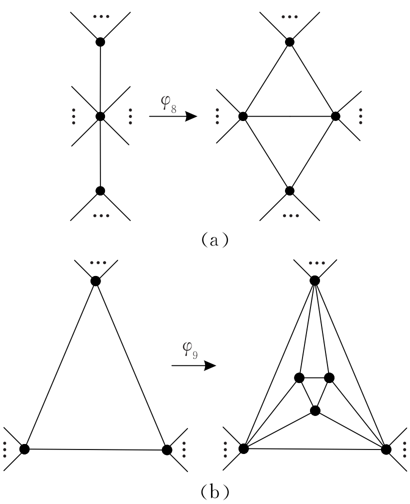


图6 Batagelj构造极大平面图的算子

同一篇文章中，Batagelj主要给出了一种构造所有顶点度数均为偶数的极大平面图的方法.其初始对象是正八面体，算子有2个，他们的运算系统被记为$\langle Z_8;\Phi=\{\varphi_8,\varphi_9\}\rangle$，其中，$Z_8$为正八面体，$\varphi_8$，$\varphi_9$是它的两个算子，如图6(a)、图6(b)所示.即从正八面体出发，通过实施运算φ_8，φ_9可得到所有顶点度数为偶数的极大平面图.Batagelj利用此递归过程，给出了所有度数为偶数的极大平面图是3-可着色(见1890年Heawood[8]、2011年Tsai与West[86])的另一种证明.

2005年，Brinkmann和McKay[87]对Barnette与Butler以及Batagelj的工作进行了更为细致的研究，给出了构造最小度为5的极大平面图的一种有效的方法，指出了上述4种算子φ_4，φ_5，φ_6，φ_7在什么情况下可以构成含分离3-圈、分离4-圈以及分离5-圈的最小度为5的极大平面图.在此基础上，综合利用上述4种算子，给出了一种算法和相应的程序.特别地，利用构造性的方法，给出了12～40阶的所有最小度为5的极大平面图的个数.其中阶数为40且最小度为5的3-连通、4-连通、5-连通的极大平面图分别有8 469 193 859 271，7 488 436 558 647，5 925 181 102 878个.这里要说明的是，在处理同构问题上，利用的是McKay[88]在1998年给出的算法.

关于生成极大平面图的算法，1996年，Avis[89]得到了一个时间复杂度为$O(r\cdot f(n,r))$的生成所有n-阶带根的3-连通极大平面图的算法.其主要方法为：首先构造n-阶标准极大平面图(恰含两个顶点的度数为$n-1$的n-阶极大平面图)；其次，通过边翻转运算得到所有极大平面图.

2004年，Nakano[90]给出的算法可在$O(r\cdot f(n,r))$时间内生成所有n-阶带根的3-连通近三角剖分图，具体方法为：首先定义生成逻辑树，使树中的每个顶点对应一个满足条件的图；再根据生成的逻辑树得到每个近三角剖分图.其中r表示近三角剖分图外圈上顶点的个数，$f(n,r)$表示外圈上有r个顶点的n-阶近三角剖分图的个数.对于生成所有n-阶极大平面图，Nakano的基于生成逻辑树的算法的时间复杂度为$O(n^3\cdot h(n))$，其中$h(n)$表示n-阶非同构极大平面图的个数.

2007年，Brinkmann与McKay[91]利用标准构型路(见文献[88])的方法引入了Plantri运算规则，并给出了生成极大平面图的算法实现——Plantri程序①.

可以看出，已有多种方法可以生成所有的极大平面图，然而这些生成过程很难与图的点着色联系

① The program plantri，http://s.anu.edu.au/～bdm/plantri

起来. 本文作者许进教授给出了一种通过扩轮运算生成所有极大平面图的方法(详见 arXiv：0911.1587v3)，该方法有效地在图的生成过程与着色之间建立了联系.

6　极大平面图的计数

研究平面图的计数问题，尤其是极大平面图，可以有利于我们更清楚地认识平面图的结构，从而解决一些相关的问题. 由于4-色猜想成立只需证明每个5-连通的极大平面图是4-可着色的即可[92]，故若能在计算4-可着色5-连通极大平面图个数的基础上，给出4-色猜想的一个数学证明，将是一件非常有意义的工作.

1962年，Tutte[93]首次讨论了带根极大平面图的计数问题，并给出了计算公式. 设 t^3_{n+2} 表示所有 $n+2$ 阶($3n$ 条边，$2n$ 个三角形)带根3-连通极大平面图的数目，则

$$t^3_{n+2}=\frac{2(4n-3)!}{n!(3n-1)!},$$

其中极大平面图的根是指外圈上指定的一个顶点. 他还得到了所有 $n+2$ 阶带根2-连通极大平面图的数目 t^2_{n+2}，则

$$t^2_{n+2}=\frac{2^{n+1}(3n)!}{n!(2n+2)!}.$$

1964年，Brown[94]将Tutte的结果推广到带根3-连通近三角剖分图的计数问题上. 设 t^3_{n+m} 表示所有 $n+m+3$ 阶带根3-连通近三角剖分图的数目，其中 n 表示极大平面图所有内部点的个数，$m+3$ 表示所有外部点的个数，$n,m\geq 0$，则

$$t^3_{n+m}=\frac{2(2m+3)!(4n+2m+1)!}{(m+2)!m!n!(3n+2m+3)!}.$$

同年，Mullin[95](也见Mullin[96])研究了带根2-连通极大平面图的计数问题，给出了其计算公式与渐近公式. 设 t^2_{n+m} 表示所有 $n+m+3$ 阶带根2-连通近三角剖分图的数目，则

$$t^2_{n+m}=\frac{2^{n+1}(2m+3)!(3n+2m+2)!}{(m+1)!^2n!(2n+2m+4)!},$$

其中 n 表示内部点的个数，$m+3$ 表示外部点的个数，$m\geq -1$. 由Stirling公式可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$t^2_{n+m}\sim\frac{1}{4}\frac{(2m+3)!}{(m+1)!^2}\left(\frac{27}{2}\right)^n\left(\frac{9}{4}\right)^{m+1}n^{-5/2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Mullin[96]还得到了所有简单的带根近三角剖分图的计数公式. 设 t_{n+m} 表示所有 $n+m+3$ 阶简单的带根近三角剖分图的数目，则

$$t_{n+m}=\frac{(2m+2)!(3n+m-1)!}{n!(m-1)!(m+2)!(2n+m+1)!},$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$t_{n+m}\sim\frac{(2m+2)!}{(m-1)!(m+2)!}\frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^m n^{-5/2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

Bender与Canfield[97]在1986年、Gao[98]在1991年分别将平面上极大平面图的计数问题推广到了一般曲面上，并得到了相应的计数公式.

2001年，Gao等人[99]研究了5-连通极大平面图的计数问题，设 t_n 表示所有 $n+2$ 阶带根的5-连通极大平面图的数目，则

$$t_n=\frac{3c_3}{4\sqrt{\pi}}n^{-5/2}w_0^{-n}(1+O(1/n));$$

$n+2$ 阶无根5-连通极大平面图的数目渐近于

$$\frac{c_3}{16\sqrt{\pi}}n^{-7/2}w_0^{-n},$$

其中，$w_0\approx 0.24775354$，$c_3\approx 0.00067543010$.

2002年，Gao与Wormald[100]利用生成函数的渐近方法(见文献[101])研究了最小度为3与3-连通最小度为4的带根极大平面图的计数问题，并得到了它们的渐近公式. 其中 n-阶带根最小度为3的极大平面图的数目渐近于

$$\frac{4(1-2x_0)}{3(1+x_0)}x_0^{7/2}(\beta/\pi)^{1/2}n^{-5/2}x_0^{-n},$$

其中，

$$x_0=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\approx 0.0981,$$

$$\beta=\frac{8(520x_0-51)}{3(27030x_0-2651)}\approx 138.6;$$

n-阶带根3-连通最小度为4的极大平面图的数目渐近于

$$(4/3)(1-3x_0)x_0^{7/2}(\beta/\pi)^{1/2}n^{-5/2}x_0^{-n},$$

其中，

$$x_0=(2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)/3,$$

$$\beta=\frac{2048(13+217x_0-473x_0^2)}{59049(1-x_0)},$$

$$\theta=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{27}{217}\sqrt{295}\right).$$

同年，Brinkmann与McKay[91]利用Plantri-算法得到了阶数较小的最小度分别为3,4,5的极大平面图的数目. 他们给出了阶数小于等于23的3-连通极大平面图的数目，其中23-阶的有28615703421545个；给出了阶数小于等于27、最小度为4的3-连通与

4-连通极大平面图的数目，其中 27-阶的数目分别为 16747182732792，4801749063379；并且，给出了阶数小于等于 40、最小度为 5 的 3-连通、4-连通与 5-连通极大平面图的数目，其中 40-阶的数目分别为 8469193859271，7488436558647，5925181102878.

2003 年，Poulalhon 与 Schaeffer[102] 通过建立 3-连通极大平面图与一类平面树之间的一一映射，用不同于 Tutte 的方法，得到了带根 3-连通极大平面图的计数公式.

2008年，Bernardi[103] 利用与 Gao 和 Wormald 所提方法不同的方法，分别对最小度为 2，3，4，5 的 2-连通带根极大平面图的计数问题进行了研究. 设 $t_{n+2}(i)$ 表示所有 $n+2$ 阶带根的且任意与根不相邻顶点的度数至少是 $d=2,3,4,5$ 的 2-连通极大平面图的数目，$i=2,3,4,5$，则 t_{n+2} 的渐近形式为

$$t_{n+2}(i)\sim\lambda_i n^{-5/2}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)^n,$$

其中增长常数 $\rho_i(i=2,3,4,5)$ 分别为

$$\frac{1}{\rho_2}=13.5,\ \frac{1}{\rho_3}\approx 10.20,\ \frac{1}{\rho_4}\approx 7.03,\ \frac{1}{\rho_5}\approx 4.06.$$

可以看出，关于极大平面图计数的许多结果都是针对带根的极大平面图而言的，里面包含了同构的情况，故所得数目要比同构意义下的情况多，这也说明了在同构意义下研究极大平面图的计数问题是非常困难的. 另外，平面图的计数问题的研究也吸引了广大学者的兴趣. 例如，1980 年，Tutte[104] 研究了凸多面体的计数问题；1982 年，Walsh[105] 研究了 3-连通平面图的计数问题；2002 年，Bender 等人[106] 研究了标定 2-连通平面图的计数问题；2005 年，Liskovets 与 Walsh[107] 研究了无环平面图的计数问题；2007 年，Fusy[108] 研究了 k-根平面图的计数问题等.

7 边翻转运算

一类图$\mathcal{F}$的边翻转运算是指对$\mathcal{F}$中的任意一个图 G，删去 G 中的一条边，再添加一条新边，使得所得图仍在$\mathcal{F}$中的运算. 边翻转运算在许多图类中都已被研究，它可以使两个点边数相同的图相互转化. 本文只讨论极大平面图的边翻转运算，更一般的结论可参见文献[109-110].

设 G 为一个极大平面图，边 $e=uv$ 与两个三角形面 uvx，uvy 相邻. 若在 G 中删去边 e，再添加一条新边 $e'=xy$ 后(如图 5 所示)，所得之图仍是极大平面图，则称此运算为边翻转运算，并将边 e 称为可翻转的，如图 7 中边 v_1v_3 是可翻转的.

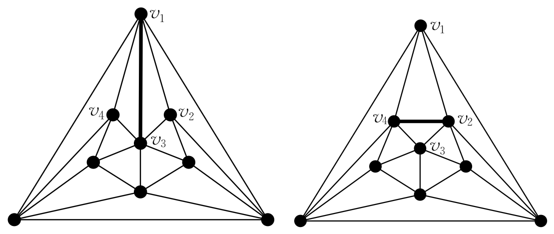


图 7 翻转运算与可翻转的边 v_1v_3

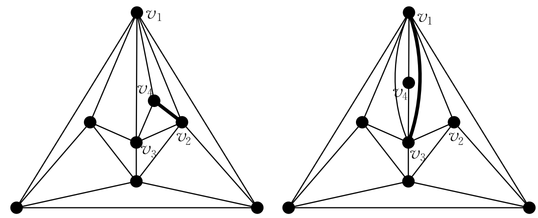
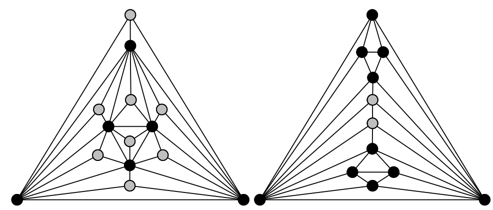


图 8 不可翻转的边 v_2v_4

由于对某些边进行运算后，会出现重边，因此并不是所有的边都是可翻转的，如图 8 中的边 v_2v_4 是不可翻转的.

极大平面图中的一条边不能翻转是因为运算后所得到的极大平面图含重边，即它的连通度为 2. 所以，所有 4-连通极大平面图中的任意一条边都是可翻转的. 若一个极大平面图中存在 3-度顶点，则与 3-度顶点关联的边均是不可翻转的. 对一般的情况，Gao 等人[111] 证明了每个 n-阶极大平面图 G 至少包含 $n-2$ 条可翻转边，且存在一类极大平面图，其可翻转边数恰好为 $n-2$，如图 9(a)；进一步，若 $\delta(G)\geq 4$，则 G 至少包含 $2n+3$ 条可翻转边，且这个下界对某些图类是可达的，如图 9(b).



(a) (b)

图 9 恰含 $n-2$ 条可翻转边与 $\delta(G)\geq 4$ 且恰含 $2n+3$ 条可翻转边的极大平面图

显然边翻转运算将一个极大平面图转化为另一个(可能与运算前的图同构)与其边数相等的极大平面图. 自然会提出下面的问题：一个 n-阶极大平面图能否在有限次边翻转运算后转化为另一个给定的 n-阶极大平面图？Wagner[84] 于 1936 年首次对此问题给出了肯定的回答. 虽然 n-阶极大平面图的个数是 n 的指数级的，但是 Wagner 采用将任意极大平面图转化为一类标准极大平面图的方法，有效地回避了图同构的问题，证明了一个 n-阶极大平面图在

经过至多 $2n^2$ 次边翻转后便可转化为另一个给定的 n-阶极大平面图. 其中标准极大平面图是 Wagner 最早引入的，表示包含两个最大度为 $n-1$ 的顶点的唯一极大平面图，n-阶标准极大平面图记为 Δ_n. 将 Δ_n 中的两个最大度顶点称为控制点. 显然，Δ_n 中除控制点外，恰含两个 3-度顶点，且其余顶点的度数均为 4. 图 10 是一个 8-阶的标准极大平面图. 文中只考虑组合意义下极大平面图的边翻转运算，对几何意义下的翻转运算可参见文献[112].

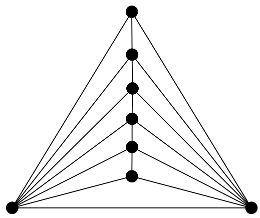


图 10　8-阶标准极大平面图

虽然 Wagner 采用的方法成功地解决了同阶极大平面图之间通过边翻转运算相互转化的问题，但他的方法可能会比实际进行的运算多出很多. 例如对两个可通过一次边翻转运算就可相互转化的极大平面图，利用 Wagner 的方法可能会用 n^2 次边翻转才可转化. 然而，Wagner 的工作引出了许多有趣的问题，例如任意两个极大平面图之间最少通过多少次边翻转运算可相互转化？两个极大平面图相互转化需要的边翻转次数与它们的最大度、连通度等性质有没有关系？什么样的极大平面图之间相互转化时需要的边翻转运算最多？一个极大平面图中最多存在多少条边可同时进行翻转？

这些有关极大平面图边翻转的问题引起了许多学者的关注，并得到了一些重要的结论，下面对这些结论进行详细介绍. 首先引入翻转图的概念，翻转图的顶点集为所有 n-阶非同构极大平面图，两个顶点在翻转图中连边当且仅当它们对应的极大平面图可通过一次边翻转运算相互转化. 容易看出，翻转图可以体现出两个极大平面图在边翻转运算上的相似程度；翻转图是连通的等价于任意两个同阶极大平面图可通过边翻转运算相互转化；翻转图中两个顶点间的距离表示这两个顶点对应的极大平面图之间相互转化需要的最少边翻转运算次数；翻转图中每个顶点的度数小于等于对应极大平面图中可翻转的边数(可能存在同构的情况).

继 Wagner 的工作之后，1993 年，Negami 与 Nakamoto[113] 用一种简短的证明得到了任意 n-阶极大平面图可最多经过 $O(n^2)$ 次边翻转运算就可转化为标准极大平面图 Δ_n，也就是说任意两个 n-阶极大平面图可经过 $O(n^2)$ 次边翻转相互转化. 但是，n-阶极大平面图中通过最多次边翻转运算相互转化的两个图所必需的边翻转次数，即翻转图的直径是否为 $O(n^2)$，仍是未知的.

直到 1997 年，Komuro[114] 证明了翻转图的直径为 $O(n)$. 他得到：(1) 当 $n\geq 13$ ($n\geq 7$) 时，任意两个 n-阶极大平面图可至多通过 $8n-54$ ($8n-48$) 次边翻转运算相互转化；(2) 对 n-阶极大平面图 G，G 转化为 Δ_n 至少需要 $2n-2\Delta(G)-3$ 次边翻转运算；(3) 设 G 与 G' 是两个 n-阶极大平面图，其度序列按升序排列分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 与 $d'_1,d'_2,\cdots,d'_n$，则 G 转化为 G' 至少需要 $\frac{1}{4}D(G,G')$ 次边翻转运算，其中

$$D(G,G')=\sum_{i=1}^{n}|d_i-d'_i|.$$

2003 年，Mori 等人[115] 改进了 Komuro 的上界，证明了任意两个 n-阶极大平面图可至多通过 $6n-30$ 次边翻转相互转化，其中 $n\geq 5$. 并且，Mori 等人得到任意两个 n-阶 Hamilton 极大平面图可至多通过 $4n-20$ 次边翻转运算相互转化，且在运算过程中保持 Hamilton 性不变；任意两个 4-连通极大平面图可至多通过 $4n-22$ 次边翻转运算相互转化；任意 n-阶极大平面图至多通过 $n-4$ 次边翻转运算可转化为 4-连通的，即至多通过 $n-4$ 次边翻转运算可使其为 Hamilton 的.

2007 年，Bose 等人[116] 研究了极大平面图中多条边同时翻转的情况，同时翻转概念是 Hurtado 等人[117] 在 1998 年研究几何意义下近三角剖分图之间通过边翻转运算转化问题时引入的. Hurtado 等人[118] 于 1999 年以及 Galtier 等人[119] 于 2003 年也讨论了近三角剖分图中多条边同时翻转的情况.

对于(半)极大平面图中的边子集 S，如果 S 中的任意两条边不在同一个面的边界上，则称其为独立的. 对 n-阶(半)极大平面图 G 以及 G 中的独立边子集 S，同时翻转运算是指对 S 中的每条边进行翻转运算，所得到图仍是(半)极大平面图. 此时，称独立边子集 S 为可同时翻转的，或称 S 为一个同时翻转. 虽然可同时翻转子集中的边与可翻转边有很大的关系，但它们也有明显的区别. 有些可同时翻转子集中存在的边不是可翻转的，如图 11(a)中，边子集 $S=\{v_1v_3, v_2v_4\}$ 是可同时翻转的，翻转后的图为图 11(b)，但 S 中的边 v_2v_4 不可翻转；有些独立子集中的每条边都是可翻转的，但整个子集不是可同时翻

转的，如图 11(c)中，边 v_1v_2 与 v_3v_4 都是可翻转的，但边子集 $S=\{v_1v_2, v_3v_4\}$不可同时翻转.

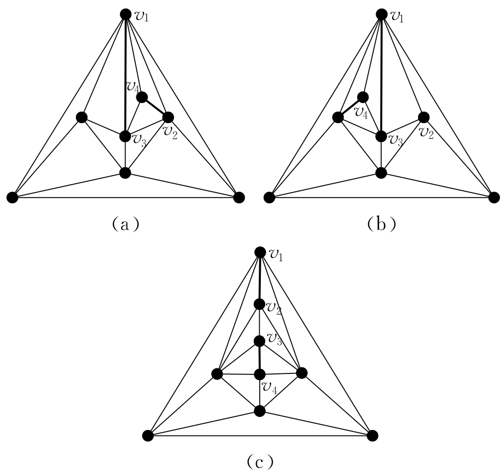


图 11 可同时翻转子集中的边与可翻转的边之间的区别的例子

对同时翻转的情况，自然地会提出：一个极大平面图的同时翻转子集中最多含多少条边？两个 n-阶极大平面图之间最少通过多少次同时翻转运算可相互转化？2007 年，Bose 等人[116]研究了这些问题. 他们证明了：(1) 任意 $n(\geq 6)$-阶极大平面图中存在一个至少含$(n-2)/3$ 条边的同时翻转，任意同时翻转子集最多含 $n-2$ 条边；并且，存在极大平面图其最大同时翻转子集含 $6(n-2)/7$ 条边；(2) 任意 $n(\geq 6)$-阶极大平面图可至多通过 $O(n)$次同时翻转运算转化为 4-连通的，即任意极大平面图可通过同时翻转运算转化为 Hamilton 的；(3) 任意两个 n-阶极大平面图可至多通过 $O(\log n)$次同时翻转运算相互转化，并且，存在一些 n-阶极大平面图对相互转化至少需要 $\Omega(\log n)$次同时翻转运算，其中所有被翻转的边数为 $O(n)$.

2011 年，Bose 等人[120]改进了 Mori 等人给出的关于翻转图直径的上界 $6n-30$，得到任意两个 n-阶极大平面图可至多通过 $5.2n-32.8$ 次边翻转运算相互转化. 进一步，任意 n-阶极大平面图至多通过$\lfloor(3n-6)/5\rfloor$ 次边翻转可转化为 4-连通的；存在 n-阶极大平面图转化为 4-连通的至少需要$\lceil(3n-10)/5\rceil$次边翻转. 可以看出，Bose 等人得到的关于极大平面图转化为 4-连通的上界几乎不能再改进，所以在确定翻转图直径上界的问题上，应该寻找新的方法.

上述研究都是基于非标定极大平面图的. 1992 年，Sleator 等人[121]将 Wagner 在非标定图上的结论推广到标定图，证明了任意两个 n-阶标定极大平面图可至多通过 $O(n\log n)$次边翻转运算相互转化(也可参见文献[111])；并且，存在两个 n-阶标定极大平面图至少需要 $\Omega(n\log n)$次边翻转方可相互转化.

8 极大平面图的分解与覆盖

图 G 的一个分解是指 G 的一族边不交的子图 $F=\{F_1, F_2, \cdots, F_l\}$，满足

$$\bigcup_{i=1}^{l} E(F_i)=E(G) \tag{4}$$

特别地，当 F 中的元素均是圈或均是树时，F 称为 G 的圈分解或树分解. 显然，任意连通无环图都有一个平凡的树分解，即每个子图是一条边. 然而，并不是每个图都有圈分解，因为当一个图 G 含有圈分解时，G 中每个顶点的度数是圈分解中包含该顶点的圈个数的 2 倍，即 G 的每个顶点的度数都是偶数，称这样的图为偶图. 所以，图 G 有圈分解的必要条件是 G 是偶图；另外，Veblen[122]证明了每个偶图均含有一个圈分解. 对图 G 的一个分解 $F=\{F_1, F_2, \cdots, F_l\}$，若 F_i 是树，且 F_i 的阶数为 k_i，则记 F 为$\{k_1, k_2, \cdots, k_l\}$-树分解，$1\leq i\leq l$.

图 G 的一个覆盖是指 G 的满足式(4)的一族子图 $F=\{F_1, F_2, \cdots, F_l\}$. 注意，覆盖中子图的边可以相交. 也就是说，图 G 的一个分解是覆盖，但覆盖不一定是分解. 然而，对森林覆盖来说，它可以相应地转换成树分解，只需将覆盖中重复的边删去. 下面主要介绍对极大平面图的相关研究.

1964 年，Nash-Williams[123]研究了图的树分解问题，得到图 G 可以分解为 t 个森林当且仅当对任意的 $A\subseteq V(G)$，$e(A)\leq t(|A|-1)$，其中 $e(A)$表示两个端点都在 A 中的边数. 利用 Nash-Williams 的结果，容易得到当 G 是平面图时，由 Euler 公式可知 $|E(G)|\leq 3|V(G)|-6$，因此每个平面图都可分解为 3 个森林；每个外平面图都可分解为 2 个森林. 其中 G 称为外平面图是指 G 存在一个平面嵌入使得所有顶点都在一个面的边界上.

1976 年，Kampen[124]进一步讨论了极大平面图的树分解，证明了任意极大平面图含有一个$\{n-1, n-1, n-1\}$-树分解. 1993 年，Ringel[125]对极大平面二部图进行了研究，得到任意极大平面二部图含有一个$\{n-1, n-1\}$-树分解. 1995 年，Ouyang 等人[126]得到任意极大平面二部图含有一个$\{n, n-2\}$-树分解. 1998 年，Shi 等人[127]推广了 Kampen 的结论，得到任意极大平面图含有$\{n-1, n-1, n-1\}$-树分解，$\{n, n-1, n-2\}$-树分解，以及$\{n, n, n-3\}$-树分

解；并且这些树分解可以在多项式时间内被找到.

若图 G 可以被至多 t 个森林与一个最大度为 D 的子图覆盖，则称 G 是 (t,D)-可覆盖的. 由上述树分解的结果可知，任意极大平面图是(3,0)-可覆盖的. 显然，一个图是 (t,D)-可覆盖的当且仅当该图可以被分解为至多 t 个森林和一个最大度为 D 的子图.

2005 年，Balogh 等人[128]给出了图 G 是 (t,D)-可覆盖的一个简单的必要条件(不充分)：对任意不相交的顶点子集 $A,B\subset V(G)$，有

$$f_t(A)+e(A,B)\le D\cdot|A|+t(|A|+|B|-1) \quad (5)$$

其中 $e(A,B)$ 表示 G 中两个端点分别在 A 与 B 中的边数；当 $e(A)\le t(|A|-1)$ 时，$f_t(A)=e(A)$，否则 $f_t(A)=2e(A)-t(|A|-1)$. Lovász 在与 Balogh 等人[128]的一次个人交流中指出当 $t=2, D=3$ 时，存在无穷多的极大平面图不满足式(5)，即这些图不是(2,3)-可覆盖的. Balogh 等人[128]证明了任意平面图 G 可以被 3 个森林 T_1,T_2,T_3 覆盖，且 $\Delta(T_3)\le 8$，即任意平面图是(2,8)-可覆盖的. 他们还得到了任意 Hamiltonian 平面图是(2,6)-可覆盖的，并提出了一个猜想：任意平面图是(2,4)-可覆盖的.

2009 年，Gonçalves[129]证明了 Balogh 等人提出的猜想，即证明了任意平面图 G 可以被 3 个森林 T_1,T_2,T_3 覆盖，且 $\Delta(T_3)\le 4$. 并且，研究了围长限制条件下的平面图覆盖，得到任意围长 $g\ge 6$ 的平面图是(1,4)-可覆盖的；任意围长 $g\ge 7$ 的平面图是(1,2)-可覆盖的.

在树的基础上，Beineke 与 Pippert[130]引入了 k-树的概念. 即从 k-阶完全图 K_k 出发，每次添加一个顶点，并使其与一个 k-阶完全子图中的所有顶点连边，所得之图称为 k-树. 显然，每一棵树是 1-树；k-阶完全图 K_k 是顶点数最少的 k-树. k-树的一个子图称为偏(partial) k-树，例如外平面图是偏 2-树.

1971 年，Chartrand、Geller 与 Hedetniemi[131]提出了一个猜想(CGH 猜想)：每个(极大)平面图可以边划分为两个外平面图，即每个(极大)平面图可以分解为两个外平面图. 由于每个平面图是一个极大平面图的子图，因此该猜想对平面图与极大平面图是等价的. 易证 CGH 猜想对 Hamiltonian 平面图成立，其中，Hamiltonian 平面图指包含一个经过所有顶点的圈的平面图. Whitney[33]在 1931 年证明了 4-连通极大平面图是 Hamiltonian 图；Tutte[34]在 1956 年将该结果扩展到所有 4-连通平面图上. 所以，CGH 猜想对 4-连通平面图成立，即任意 4-连通平面图可以分解为两个外平面图.

为了解决 Chartrand、Geller 与 Hedetniemi 提出的CGH猜想，El-Mallah与Colbourn[132]在1988 年，首次研究了平面图的偏 k-树分解，得到任意平面图可以分解为两个偏 3-树；并且，证明了存在极大平面图 G，G 没有分解 $\{S,T\}$ 使得 S 是偏 2-树，T 是偏 1-树.

1996 年，Kedlaya[133]证明了任意平面图可以分解为两个子图，这两个子图都不含与 K_4 同构的子图. 由于 Wald 与 Colbourn[134]证明了一个图 G 不含与 K_4 同构的子图当且仅当 G 是偏 2-树，并且，Chartrand 与 Harary[135]得到一个图 G 是外平面图当且仅当 G 不含与 K_4，$K_{2,3}$ 同构的子图. 因此，Kedlaya 没有完全解决 CGH 猜想，但改进了 El-Mallah 与 Colbourn 的结果，即证明了任意平面图可以分解为两个偏 2-树. Kedlaya 还提出了一个比 CGH 猜想更强的猜想：设 G 是 4-连通极大平面图，uvw 是 G 的一个三角形；G' 是在 G 的每个面内添加一个顶点并使其与这个面上的 3 个顶点连边所得到的图，面 uvw 内添加的顶点记为 x，则 G' 存在外平面图分解 H_1,H_2 使得：H_1 包含边 ux 与 vx，且在 H_1 中 w 与 u,v 不在同一个连通分支上；H_2 包含边 uw 与 vw，且 uw 与 vw 在 H_2 中是割边.

2000 年，Ding 等人[136]独立地得到了 Kedlaya 的结果，并证明了任意平面图可以分解为两个外平面图与一个 Vee-森林，其中 Vee-森林表示每个连通分支为 $K_{1,1}$ 或 $K_{1,2}$ 的森林.

直到 2005 年，Gonçalves[137]证明了任意平面图可以分解为两个外平面图，即完整地解决了 CGH 猜想.

可以看出，目前关于极大平面图分解的研究主要是针对树分解与外平面图分解进行的. 主要结果可以概述为任意极大平面图可以分解为 3 棵树，也可以分解为两个外平面图. 由于图的一个分解是覆盖，因此任意极大平面图存在 3 棵树的覆盖，也存在两个外平面图的覆盖.

9　极大平面图的生成树

图 G 的生成树是指 G 的一个生成子图，同时又是一棵树. 显然，任意连通图都含有生成树. 图 G 的一个子图集合 F 称为边不交的，如果 F 中任意两个

子图没有公共边.

1961 年,Nash-williams[138] 研究了一般图的边不交生成树,得到了一个图 G 含有 k 棵边不交生成树当且仅当对 G 的任意收缩图 G_P,满足 $|E(G_P)|\geq k(V(G_P)-1)$. 1974 年,Kundu[139] 证明了任意阶数 ≥ 4 的极大平面图含有 2 棵边不交生成树.

对一个图 G,如果 G 中的两条路 P_1,P_2 没有共同的中间顶点,则称这两条路 P_1,P_2 为内部不交的. 如果 k 条路中任意两条是内部不交的,则称这 k 条路是内部不交的. 给定一个图 $G=(V,E)$ 及 G 中的一个顶点 r,若存在 G 的 k 棵生成树 $T_1,T_2,\cdots,T_k$,使得对任意的 $v\in V$,$T_1,T_2,\cdots,T_k$ 中分别连接顶点 r 与 v 的 k 条路是内部不交的,则称 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 是 G 中以顶点 r 为根的 k-独立生成树. 例如,图 12 给出了一个 14-阶极大平面图的 5 棵以 r 为根的独立生成树,见文献[140].

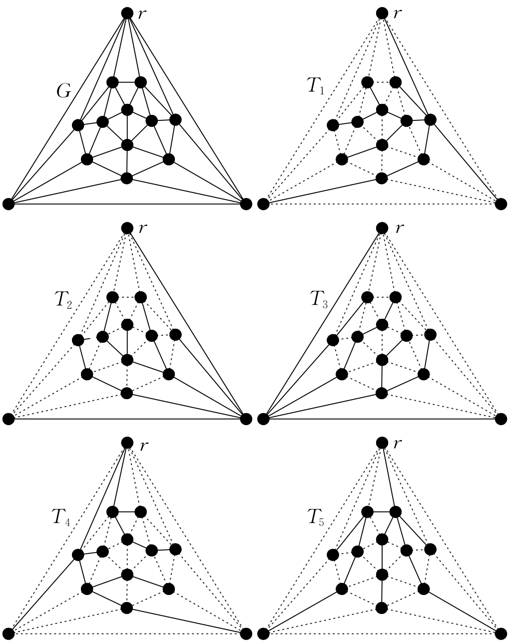


图 12 一个 14-阶极大平面图及其 5 棵以 r 为根的独立生成树

1988 年,Itai 与 Rodeh[141] 证明了对任意 2-连通图 G,G 中存在两棵以任意顶点为根的独立生成树,且这两棵独立生成树可在线性时间内被找到.

同年 Cheriyan 与 Maheshwari[142] 以及 1989 年 Zehavi 与 Itai[143] 分别独立地将 Itai 等人的结果推广到了 3-连通图. 他们证明了对任意 3-连通图 G,G 的顶点数为 n,边数为 m,则 G 中存在 3 棵以任意顶点为根的独立生成树. 并且,Cheriyan 与 Maheshwari 给出了一个算法可在 $O(mn)$ 时间内找到 3 棵独立生成树. Zehavi 与 Itai 提出了一个猜想:任意 k-连通图包含 k 棵以任意给定顶点为根的独立生成树.

1994 年～1995 年,Huck[144-145] 对 4-连通与 5-连通平面图中独立生成树的情形进行了研究,证明了 Zehavi 与 Itai 的猜想对 4-连通与 5-连通的平面图来说是成立的. Huck[145] 给出的证明过程可相应地导出一个寻找 k-独立生成树的算法,所用时间为 $O(n^3)$.

1996 年,Di Battista 等人[146](也见文献[147])给出了一个算法,可在线性时间内找到任意 k-连通平面图中的 k-独立生成树,其中 $k=2,3$. 1998 年,Miura 等人[148] 给出的算法可在线性时间内找到任意 4-连通平面图中的 4-独立生成树. 2000 年,Nagai 与 Nakano[140] 给出的算法可在线性时间内找到任意 5-连通极大平面图中的 5-独立生成树.

可以看出,Zehavi 与 Itai 的猜想对平面图来说是成立的;进一步,对 k-连通极大平面图,存在寻找 k-独立生成树的线性时间算法. 对一般图的情形,由文献[141-143]知,Zehavi 与 Itai 的猜想对 3-连通图是成立的. 2006 年,Curran 等人[149] 证明了 Zehavi 与 Itai 的猜想对 4-连通图也成立,并且,给出了一个算法可在 $O(n^3)$时间内找到 4-独立生成树. 但对 $k\geq 5$ 的情形,Zehavi 与 Itai 的猜想仍是一个公开问题.

2001 年,Hasunuma[150] 在独立生成树的基础上引入了完全独立生成树的概念. 设 T_1,T_2是 G 中的两棵树,若对任意的顶点 $u,v\in V(T_1)\cap V(T_2)$,T_1 与 T_2中从 u 到 v 的路是内部不交的,则称 T_1,T_2是完全独立的. 对图 G 中的 k 棵生成树 $T_1,T_2,\cdots,T_k$,若 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 中任意两棵树是完全独立的,则称 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 是 G 中的完全独立生成树. 设 $T_1,T_2,\cdots,T_k$是 G 中的 k 棵生成树,Hasunuma[151] 证明了 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 是完全独立的当且仅当 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 是边不交的,并且对任意的顶点 $v\in V(G)$,最多存在一个 T_i,使得 v 在 T_i中的度数大于 1.

2002 年,Hasunuma[151] 证明了任意 4-连通极大平面图中存在两棵完全独立生成树,其证明过程可以推导出一个在线性时间内寻找两棵完全独立生成树的算法.

2012 年,Péterfalvi[152] 给出了一个 3-连通极大平面图中不存在两棵完全独立生成树的例子. 这说明 Hasunuma 的结论中 4-连通的条件是不可少的.

寻找一个图的生成树是很有现实意义的,尤其是在赋权图中寻找最小权的生成树(最优树),比如

连线问题等. 1956 年，Kruskal[153] 给出了一个在给定图 G 中需找最优树的好算法，称为 Kruskal 算法，该算法寻找最优树最多需要 $n(n-1)$ 次运算. 独立生成树在网络中有很多应用，特别是在容错协议方面[154-155].

10 相关算法

算法是计算机科学的重要研究领域，许多涉及到需要大量计算的问题（尤其是手工计算不可能实现的时候），人们都希望给出一个算法，然后通过计算机来将其实现.

对于给定的图 G，判断它是否存在 $k(\geq 3)$-着色的问题是 NP-完全的. 1976 年，Lawler[156] 最先从算法角度研究一般图的着色问题，得到了时间复杂度为 $O((1+3^{1/3})^n) \approx O(2.4422^n)$ 的判断图 k-着色的算法；2001 年，Eppstein[157-158] 改进了 Lawler 的算法，将算法时间复杂度减少到 $O(2.415^n)$；2002 年，Byskov[159] 改进到 $O(2.4023^n)$；2006 年，Koivisto[160] 改进到 $O(2^n)$. 特别地，对判断一个给定图 3-着色的算法，Lawler[156] 得到了一个时间复杂度为 $O(1.4422^n)$ 的算法；1994 年，Schiermeyer[161] 将其改进到 $O(1.415^n)$；1995 年，Beigel 与 Eppstein[162] 改进到 $O(1.3446^n)$；2001 年，Beigel 与 Eppstein[163-164] 改进到 $O(1.3289^n)$，这是目前判断图 3-着色算法中最好的结果. 另外，对判断图 4-着色的算法，2003 年，Byskov[165] 给出了一个时间复杂度为 $O(1.7504^n)$ 的算法；2007 年，Fomin 等人[166] 将其改进到 $O(1.7272^n)$.

在对 4-色猜想研究了将近一个世纪后仍不见有好的方法来解决它的时候，数学领域和计算机领域的学者们想到了用计算机来解决这个难题. 大家希望：是否存在一个图顶点着色算法使得在输入一个 n-阶平面图后（例如以邻接矩阵、关联矩阵、弧表示或邻接表的形式等），至多通过 $c \cdot n^{\lambda}$ 步就可以产生 G 的一个正常 4-着色（其中 c 是常数，$\lambda < 2$）？能否给出一个简短的论述来证明：存在判断给定图是否是 4-可着色的多项式算法？

1977 年，Appel、Haken 和 Koch 证明 4-色定理的方法源于 Kempe 的思想：在不可避免集中寻找可约的构型. 最初的不可避免集合中含有 1936 个构型，后面减少到了 1482，1405 和 1256[11-13]. 他们的证明中，不可避免集中的构型是通过复杂的“放电过程（最早由德国数学家 Heesch[167] 提出）”得到的，而证明构型的可约性是通过计算机计算实现的. 另外，对于可约构型的发展，1997 年，Robertson 等人[168-169] 采用 Appel、Haken 和 Koch 的方法，通过一个简单的放电过程，把构型减少到了 633 个. 4-色定理的证明是第一个依靠计算机大量计算的数学证明的例子，可见，在电子计算机发展的早期，这还是一项很有意义的工作.

其实最早用算法的角度来研究 4-色问题的是 Ungar（源自 1986 年与 Jensen 的个人交流，文献[1]：33 页）. 他认为从算法的视角来看，一个问题是“简单的”是指该问题可以在多项式步骤内被解决（最好多项式还有很低的阶）. 1981 年，Matula、Shiloach 和 Tarjan[170,171] 与 Chiba、Nishizeki 和 Saito[172] 分别独立地给出了平面图的线性 5-着色算法. 基于 Appel、Haken 和 Koch 给出的四色定理的计算机辅助证明，以及后来 Robertson 和 Seymour 等人给出的简化证明，1996 年，Robertson 等人[168] 给出了平面图 4-着色的一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法. 最近，在 2013 年，Zhou 等人[173] 通过改进的 cuckoo 搜索优化算法给出了一种更有效的解决平面图 4-着色问题的算法. 相比之下，对于 3-可着色平面图，给出其一个多项式时间的 3-着色算法是不可能的；对于给定的一个平面图 G，给出一个多项式算法判断 G 是否是 3-可着色的也是不可能的. 实际上，这些问题都是 NP-完全的，即使对最大度不超过 4 的图[174-175].

还有一个与算法相关的问题：是否存在一个多项式算法使得在输入一个平面图 G 后，可以输出 G 的所有不同的 4-着色？该问题的答案几乎不可能是肯定的. 实际上，计算一个平面图所有 4-着色问题是一个 $\#P$-完全的，甚至对于所有顶点的度数都为偶数的极大平面图也一样[176].

1990 年，Schnyder[177-178] 证明了每个极大平面图都有一个特殊的分解，使得其内部边被分解成 3 棵树（文献[177-178]中称为 realizer），并证明这样的分解可以在线性时间内被构造出来. 一个极大平面图 G 的 realizer 是指对 G 内部边的一个划分，使其被划分成 3 个满足条件的有向边的集合 T_0, T_1, T_2. Schnyder[178] 证明了 T_0, T_1, T_2 是 3 个有向的根数，而它们的根分别是 G 外部面的 3 个顶点. Realizer 在图的许多算法中都起着重要的作用，同时在画图[179] 和编码[180] 方面也很重要.

2005 年，Bonichon[181] 研究了极大平面图的

realizer 与非交错 Dyck 路对之间的关系，并在它们之间给出了一个双射；证明了把一个 realizer 转换成一对非交错 Dyck 路的运算过程可以在线性时间内完成；利用得到的双射，可以枚举出规模为 n 的 realizer 的数目，并能高效地把它们生成出来.

虽然在算法上已经得到了许多与极大平面图有关的结果，并且给出了 4-色定理的证明，但是大部分数学家仍然希望能给出其简短的数学证明，因为许多算法写下来之后都很长，并且可读性低.

另外，对于极大平面图，还有许多与算法相关的研究，比如极大平面图的生成算法、相互转化算法、计数算法等，分别在前面的章节中已经给出了详细的综述.

11 结论与展望

从 1891 年至今，有众多学者不断地从度序列问题、Hamilton 性、色多项式、生成运算系统、计数问题、边翻转运算、分解与覆盖、生成树以及算法等方面对极大平面图展开了研究. 无论哪一方面，都已经有了深入的研究，并得到了许多非常好的结果. 虽然到目前为止还没能给出 4-色问题的一个简短的数学证明，但是在研究过程中已形成了许多相应的理论，并在一般图中展开. 同时，在对极大平面图的研究过程中，许多有趣的问题被相继提出，且至今仍有很多没有被解决，这些问题有待进一步研究.

本文所述的关于极大平面图各方面的研究结果对平面图结构理论的完善具有很大的意义. 但是，从已有的研究结果来看，对平面图结构的研究并没有与着色建立密切的联系. 然而，要想最终用数学方法解决 4 色问题，不仅要对极大平面图的结构做更为深入的研究，搞清不同类型的极大平面图的特性，更为重要的是要把极大平面图的着色与其结构紧密地联系起来，研究极大平面图的 4-着色类型，从结构上找出影响 4-着色类型和数量的因素. 所以，将极大平面图的结构与着色有机结合起来，研究在着色下极大平面图的结构会更有价值.

我们拟在前人工作的基础上，在后续的工作中进一步研究结构与着色之间的关系，希望找到一种方法把它们紧密地联系在一起. 关于这方面的研究，已经得到了一些结果，有兴趣的读者可到网上查阅(arXiv:0911.1587v3). 另外，基于已有结果，我们在下面提出与着色相关的几个问题：

问题 1. 是否存在极大平面图类 $\mathcal{M}$ 的一个生成运算系统 $\langle I;\Phi\rangle$，使得对任意 $\varphi\in\Phi$，低阶 4-可着色的极大平面图经过运算 φ 后所得到的图仍是 4-可着色的？

问题 2. 能否找到一个关于 4-可着色极大平面图的计数公式？

问题 1 是归纳证明 4-色猜想的关键，问题 2 意味着可以从图计数的角度来证明 4-色猜想，即证明 4-可着色的极大平面图的数目等于所有极大平面图的数目.

问题 3. 一个基于着色的 n-阶极大平面图能否在有限次边翻转运算后转化为另一个给定的基于着色的 n-阶极大平面图？

本文从不同的角度对极大平面图各方面的研究进展进行了总结和评述，希望对该领域后续的研究工作起到一定的辅助作用.

致 谢 审稿人细致地审阅了文章，在书写、文章内容和专业名词等方面提出了宝贵意见，在此表示感谢！

参 考 文 献

[1] Jensen T R, Toft B. Graph Coloring Problems. New York: John Wiley Sons, 1995: 48-49

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. New York: Springer, 2008

[3] Cayley A. On the coloring of maps. Proceedings of the London Mathematical Society, 1878, 9: 148

[4] Kempe A B. On the geographical problem of the four colors. American Journal of Mathematics, 1879, 2(3): 193-200

[5] Tait G P. On the colouring of maps. Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography, London, England, 1879, 80: 501-503

[6] Tait G P. Remarks on the previous communication. Proceedings of the Royal Geographical Society and Monthly Record of Geography, London, England, 1878-1880, 10: 729

[7] Tait G P. Note on a theorem in geometry of position. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1880, 29(2): 657-660

[8] Heawood P J. Map colour theorem. The Quarterly Journal of Mathematics, 1890, 24(1): 332-338

[9] Petersen J. Surle théorème de Tait. L'intermédiaire des Mathématiciens, 1898, 5(1): 225-227

[10] Tutte W T. On Hamiltonian Circuits. Journal of the London Mathematical Society, 1946, 21(2): 98-101

[11] Appel K, Haken W. The solution of the four-color map problem. Scientific American, 1977, 237(4): 108-121

[12] Appel K, Haken W, Koch J. Every planar map is four colorable, I: Discharging. Illinois Journal of Mathematics, 1977, 21(3): 429-490

[13] Appel K, Haken W. Every planar map is four-colorable, II: Reducibility. Illinois Journal of Mathematics, 1977, 21(3): 491-561

[14] Appel K, Haken W. Every planar map is four-colorable. Providence, American Mathematical Society, 1989

[15] Whitney H. Non-separable and planar graphs. Transactions of the American Mathematical Society, 1932, 34(2): 339-362

[16] Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. American Journal of Mathematics, 1932, 54(1): 150-168

[17] Deo N. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974

[18] Baran P. On distributed communication networks. IEEE Transactions on Communications Systems, 1964, 12(1): 1-9

[19] Grünbaum B. Convex Polytopes. New York: Wiley-Interscience, 1967

[20] Erdös P, Gallai T. Graphs with prescribed degrees of vertices. Mat Lápok, 1960, 11(1): 264-274

[21] Hawkins A, Hill A, Reeve J, Tyrell J. On certain polyhedral. The Mathematical Gazette, 1966, 50(1): 140-144

[22] Bowen R. On sums of valences in planar graphs. The Canadian Mathematical Bulletin, 1966, 9(1): 111-114

[23] Chvátal V. Planarity of graphs with given degrees of vertices. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1969, 17(3): 47-60

[24] Schmeichel E F, Hakimi S L. On planar graphical degree sequences. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1977, 32(3): 598-609

[25] Etourneau E. Existence and connectivity of planar graphs having 12 vertices of degree 5 and n-12 vertices of degree 6. Colloquia Mathematics Societatis Janos Bolyai 10, North Holland, Amsterdam, 1975, 2(1): 645-655

[26] Schmeichel E F, Hakimi S L. On the connectivity of maximal planar graphs. Journal of Graph Theory, 1978, 2(4): 307-314

[27] Fanelli S. On the existence and connectivity of a class of maximal planar graphs. Mathematical Statistics, 1982, 19(2): 157-167

[28] Ruscitti A. Sulla struttura delle classi $F_{n,k}$ di grafi planari massimali. Rendiconti di matematica, Serie VI, 1978, 11(1): 243-269

[29] Fanelli S. On a conjecture on maximal planar sequences. Journal of Graph Theory, 1980, 4(4): 371-375

[30] Fanelli S. On the connectivity of maximal planar graphs with minimum degree 5. Annals of Discrete Mathematics, 1983, 18(1): 343-353

[31] Hamilton W R. Letter to John Graves on the icosian (17 Oct., 1856). In the Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (Halberstam H, Ingram R eds.). Cambridge: Cambridge University Press, 1931, 3(1): 612-625

[32] Plummer M D. A note on toughness and tough components. Congressus Numerantium, 1997, 125(1): 179-192

[33] Whitney H. A theorem on graphs. The Annals of Mathematices, 1931, 32(2): 378-390

[34] Tutte W T. A theorem on planar graphs. Transactions of the American Mathematical Society, 1956, 82(1): 99-116

[35] Plummer M D. Problem//Hajnal A, Rado R, Sos V T eds. Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematics Societatis Janos Bolyai 10. North Holland, Amsterdam, 1975, 3(1): 1549-1550

[36] Thomassen C. Hypohamiltonian graphs and digraphs//Alavi Y, Lick D R eds. Theory and Applications of Graphs. Lecture Notes in Mathematics 642. Springer Berlin Heidelberg, Germany, 1978: 557-571

[37] Tutte W T. Bridges and Hamiltonian circuits in planar graphs. Aequationes Mathematicae, 1977, 15(1): 1-33

[38] Thomassen C. A theorem on paths in planar graphs. Journal of Graph Theory, 1983, 7(2): 137-160

[39] Sanders D P. On paths in planar graphs. Journal of Graph Theory, 1997, 24(4): 341-345

[40] Göring F, Harant J. Hamiltonian cycles through prescribed edges of 4-connected maximal planar graphs. Discrete Mathematics, 2010, 310(9): 1491-1494

[41] Chvátal V. Tough graphs and Hamiltonian circuits. Discrete Mathematics, 1973, 5(3): 215-228

[42] Lawler E L, Lenstra J K, Rinnooy Kan A H G, Shmoys B. The Traveling Salesman Problem, a Guided Tour of Combinatorial Optimization. Chichester: John Wiley & Sons, 1985, 3(1): 403-429

[43] Chvátal V, Erdös P. A note on Hamiltonian circuits. Discrete Mathematics, 1972, 2(1): 111-113

[44] Bauer D, Broersma H J, Veldman H J. Not every 2-tough graph is Hamiltonian. Discrete Applied Mathematics, 2000, 99(1-3): 317-321

[45] Bauer D, Hakimi S L, Schmeichel E. Recognizing tough graphs is NP-hard. Discrete Applied Mathematics, 1990, 28(3): 191-195

[46] Douglas B, Hajo B, Edward S. Toughness in graphs — A survey. Graphs and Combinatorics, 2006, 22(1): 1-35

[47] Nishizeki T. A 1-tough non-Hamiltonian maximal planar graph. Discrete Mathematics, 1980, 30(3): 305-307

[48] Asano T, Kikuchi S, Saito N. A linear algorithm for finding Hamiltonian cycles in 4-connected maximal planar graphs. Discrete Applied Mathematics, 1984, 7(1): 1-15

[49] Dillencourt M B. Hamiltonian cycles in planar triangulations with no separating triangles. Journal of Graph Theory, 1990, 14(1): 31-49

[50] Grünbaum B, Walther H. Shortness exponents of families of graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1973, 14(3): 364-385

[51] Dillencourt M B. An upper bound on the shortness exponent of 1-tough, maximal planar graphs. Discrete Mathematics, 1991, 90(1): 93-97

[52] Michal T. On the shortness exponent of l-tough, maximal planar graphs. Discrete Mathematics, 1996, 154(1-3): 321-328

[53] Harant J, Owens P J. Non-Hamiltonian 5/4-tough maximal planar graphs. Discrete Mathematics, 1995, 147(1-3): 301-305

[54] Jung H O. One-way infinite Hamiltonian paths in infinite maximal planar graphs. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitdt, 1994, 64(1): 141-150

[55] Thomassen C. Straight line representations of infinite planar graphs. Journal of the London Mathematical Society, 1977, 3(2): 411-423

[56] Hakimi S L, Schmeichel E F, Thomassen C. On the number of Hamiltonian cycles in a maximal planar graph. Journal of Graph Theory, 1979, 3(4): 365-370

[57] Birkhoff G D. A determinantal formula for the number of ways of coloring a map. The Annals of Mathematics, 1912, 14(1): 42-46

[58] Whitney H. A logical expansion in mathematics. Bulletin of the American Mathematical, 1932, 38(8): 572-579

[59] Birkhoff G D, Lewis D. Chromatic polynomials. Transactions of the American Mathematical Society, 1946, 60(3): 355-451

[60] Jackson B. A zero-free interval for chromatic polynomials of graphs. Combinatorics, Probability & Computing, 1993, 2(3): 325-336

[61] Thomassen C. The zero-free intervals for chromatic polynomials of graphs. Combinatorics, Probability & Computing, 1997, 6(4): 497-506

[62] Beraha S. Infinite Non-Trivial Families of Maps and Chromials [Ph. D. dissertation]. Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1975

[63] Beraha S, Kahane J, Reid R. B_7 and B_{10} are limit points of chromatic zeros. Notices of the American Mathematical Society, 1973, 20(1): 45

[64] Beraha S, Kahane J, Weiss N J. Limits of chromatic zeros of some families of maps. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1980, 28(1): 52-65

[65] Tutte W T. On chromatic polynomials and the golden ratio. Journal of Combinatorial Theory, 1970, 9(3): 289-296

[66] Dong F M, Koh K M, Teo K L. Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Company Pte. Ltd., 2005: xxviii

[67] Dong F M, Koh K M. On planar and non-planar graphs having no chromatic zeros in the interval (1, 2). Discrete Mathematics, 2008, 308(17): 3897-3905

[68] Woodall D R. Zeros of chromatic polynomials, in combinatorial survey//Proceedings of the 6th British Combinatorial Conference. London, England: Academic Press, 1977: 199-223

[69] Woodall D R. A zero-free interval for chromatic polynomials. Discrete Mathematics, 1992, 101(1-3): 333-341

[70] Read R C. An introduction to chromatic polynomials. Journal of Combinatorial Theory, 1968, 4(1): 52-71

[71] Chao C Y, Whitehead Jr E G. On chromatic equivalence of graphs//Alavi Y, Lick D R eds. Theory and Applications of Graphs. Lecture Notes in Mathematics 642. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Germany, 1978: 121-131

[72] Hall G D, Siry J W, Vanderslice B R. The chromatic polynomial of the truncated icosahedrons. Proceedings of the American Mathematical Society, 1965, 16(4): 620-628

[73] Berman G, Tutte W T. The golden root of a chromatic polynomial. Journal of Combinatorial Theory, 1969, 6(3): 301-302

[74] Beraha S, Kahane J. Is the four-color conjecture almost false? Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1979, 27(1): 1-12

[75] Sokal A D. Chromatic roots are dense in the whole complex plane. Combinatorics, Probability and Computing, 2004, 13(2): 221-261

[76] Jackson B. Zero of chromatic and flow polynomials of graphs. Journal of Geometry, 2003, 76(1-2): 95-109

[77] Royle G. Planar triangulations with real chromatic roots arbitrarily close to 4. Annals of Combinatorics, 2008, 12(2): 195-210

[78] Eberhard V. Zur Morphologie der Polyeder. Leipzig, Teubner, 1891

[79] Bowen R, Fisk S. Generation of triangulations of the sphere. Mathematics of Computation, 1967, 21(98): 250-252

[80] Barnette D. On generating planar graphs. Discrete Mathematics, 1974, 7(3-4): 199-208

[81] Butler J W. A generation procedure for the simple 3-polytopes with cyclically 5-connected graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1974, 26(3): 686-708

[82] Batagelj V. An inductive definition of the class of all triangulations with no vertex of degree smaller than 5//Proceedings of the 4th Yugoslav Seminar on Graph Theory. Novi Sad, Serbia, 1983: 15-25

[83] Batagelj V. An improved inductive definition of two restricted classes of triangulations of the plane. Combinatorics and Graph Theory. Banach Center Publications, PWN-Polish Scientific Publishers. Warsaw, Polish, 1989, 25: 11-18

[84] Wagner K. Bemerkungen zum vierfarbenproblem. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1936, 46(1): 26-32

[85] Batagelj V. Inductive classes of graphs//Proceedings of the 6th Yugoslav Seminaron Graph Theory. Dubrovnik, Yugoslav, 1985: 43-56

[86] Tsai M T, West D B. A new proof of 3-colorability of Eulerian triangulations. Ars Mathematica Contemporanea, 2011, 4(1): 73-77

[87] Brinkmann G, McKay B D. Construction of planar triangulations with minimum degree 5. Discrete Mathematics, 2005, 301(2-3): 147-163

[88] McKay B D. Isomorph-free exhaustive generation. Journal of Algorithms, 1998, 26(2): 306-324

[89] Avis D. Generating rooted triangulations without repetitions. Algorithmica, 1996, 16(6): 618-632

[90] Nakano S. Efficient generation of triconnected plane triangulations. Computational Geometry Theory and Applications, 2004, 27(2): 109-122

[91] Brinkmann G, McKay B D. Fast generation of planar graphs. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry-MATCH, 2007, 58(2): 323-357

[92] Saaty T L, Kainen P C. The four-color problem. Assaults and conquest. New York: McGraw-Hill, 1977

[93] Tutte W T. A census of planar triangulations. Canadian Journal of Mathematics, 1962, 14(1): 21-38

[94] Brown W G. Enumeration of triangulations of the disk. Proceedings of the London Mathematical Society, 1964, 14(3): 746-768

[95] Mullin R C. Enumeration of rooted triangular maps. The American Mathematical Monthly, 1964, 71(9): 1007-1010

[96] Mullin R C. On counting rooted triangular maps. Canadian Journal of Mathematics, 1965, 17(1): 373-382

[97] Bender E A, Canfield E R. The asymptotic number of rooted maps on a surface. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1986, 43(2): 244-257

[98] Gao Z. The number of rooted triangular maps on a surface. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1991, 52(2): 236-249

[99] Gao Z, Wanless I M, Wormald N C. Counting 5-connected planar triangulations. Journal of Graph Theory, 2001, 38(1): 18-35

[100] Gao Z, Wormald N C. Enumeration of rooted cubic planar maps. Annals of Combinatorics, 2002, 6(3-4): 313-325

[101] Bender E A. Asymptotic methods in enumeration. SIAM Review, 1974, 16(4): 485-515

[102] Poulalhon D, Schaeffer G. Optimal coding and sampling of triangulations//Baeten J C M, Lenstra J K, Parrow J, Woeginger G J eds. Automata, Languages and Programming. LNCS 2719. Springer, Berlin, Germany, 2003: 1080-1094

[103] Bernardi O. On triangulations with high vertex degree. Annals of Combinatorics, 2008, 12(1): 17-44

[104] Tutte W T. On the enumeration of convex polyhedral. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1980, 28(B): 105-126

[105] Walsh T. Counting non-isomorphic three connected planar maps. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1982, 32(1): 33-44

[106] Bender E A, Gao Z C, Wormaldy N C. The number of labeled 2-connected planar graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, 2002, 9: ＃R43

[107] Liskovets V A, Walsh T R. Counting unrooted loopless planar maps. European Journal of Combinatorics, 2005, 26(5): 651-663

[108] Fusy E. Counting unrooted maps using tree-decomposition. Séminaire Lotharingien de Combinatoire B54A, 2007, Article B54Al

[109] Bose P, Hurtado F. Flips in planar graphs. Computational Geometry, 2009, 42(1): 60-80

[110] Bose P, Verdonschot S. A history of flips in combinatorial triangulations, arXiv: 1206.0303, 2012

[111] Gao Z C, Urrutia J, Wang J Y. Diagonal flips in labeled planar triangulations. Graphs and Combinatorics, 2001, 17(4): 647-657

[112] Lawson C. Transforming triangulations. Discrete Mathematics, 1972, 3(4): 365-372

[113] Negami S, Nakamoto A. Diagonal transformations of graphs on closed surfaces. Science Reports of the Yokohama National University. Section 1, Mathematics, Physics, Chemistry, 1993, 40(1): 71-97

[114] Komuro H. The diagonal flips of triangulations on the sphere. The Yokohama Mathematical Journal, 1997, 44(2): 115-122

[115] Mori R, Nakamoto A, Ota K. Diagonal flips in Hamiltonian triangulations on the sphere. Graphs and Combinatorics, 2003, 19(3): 413-418

[116] Bose P, Czyzowicz J, Gao Z, et al. Simultaneous diagonal flips in plane triangulations. Journal of Graph Theory, 2007, 54(4): 307-330

[117] Hurtado F, Noy M, Urrutia J. Parallel edge flipping//Proceedings of the 10th Canadian Conference on Computational Geometry. Montreal, Canada, 1998: 26-27

[118] Hurtado F, Noy M, Urrutia J. Flipping edges in triangulations. Discrete and Computational Geometry, 1999, 22(3): 333-346

[119] Galtier J, Hurtado F, Noy M, et al. Simultaneous edge flipping in triangulations. International Journal of Computational Geometry and Applications, 2003, 13(2): 113-133

[120] Bose P, Jansens D, van Renssen A, et al. Making triangulations 4-connected using flips//Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry. Toronto, Canada, 2011: 241-247

[121] Sleator D, Tarjan R, Thurston W. Short encodings of evolving structures. SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1992, 5(3): 428-450

[122] Veblen O. An application of modular equation in analysis situs. The Annals of Mathematics, 1912, 14(2): 86-94

[123] Nash-Williams C St J A. Decompositions of finite graphs into forests. Proceedings of the London Mathematical Society, 1964, 39: 12

[124] Kampen G R. Orienting planar graphs. Discrete Mathematics, 1976, 14(4): 337-341

[125] Ringel G. Two trees in maximal planar bipartite graph. Journal of Graph Theory, 1993,17(6): 755-758

[126] Ouyang K, Liu Y P. Proof of a Ringel's conjecture. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(19): 18-19

[127] Shi M Y, Li Y J, Tian F. Tree decompositions for a class of graphs. Discrete Mathematics, 1998, 189(1): 221-232

[128] Balogh J, Kochol M, Pluhár A, Yu X. Covering planar graphs with forests. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2005, 94(1): 147-158

[129] Gonçalves D. Covering planar graphs with forests, one having bounded maximum degree. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2009, 99(2): 314-322

[130] Beineke L W, Pippert R E. Properties and characterizations of k-trees. Mathematika, 1971, 18(1): 141-151

[131] Chartrand G, Geller D P, Hedetniemi S. Graphs with forbidden subgraphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1971, 10(1): 12-41

[132] El-Mallah E S, Colbourn C J. Partitioning the edges of a planar graph into two partial k- trees//Proceedings of the 19th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing. Baton Rouge, USA, 1988, 66: 69-80

[133] Kedlaya K S. Outerplanar partitions of planar graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1996, 67(2): 238-248

[134] Wald J A, Colbourn C J. Steiner trees, partial 2-trees and minimum IFI networks. Networks, 1983, 13(2): 159-167

[135] Chartrand G, Harary F. Planar permutation graphs. The Annales de l'Institut Henri Poincaré B, 1967, 3(1): 433-438

[136] Ding G, Oporowski B, Sanders D P, Vertigan D. Surfaces, tree-width, clique-minors, and partitions. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2000, 79(2): 221-246

[137] Gonçalves D. Edge partition of planar graphs into two outerplanar graphs//Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. Baltimore, USA, 2005: 504-512

[138] Nash-williams C S J. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. Proceedings of the London Mathematical Society, 1961, 36: 44-50

[139] Kundu S. Bounds on the number of disjoint spanning trees. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1974, 17(2): 199-203

[140] Nagai S, Nakano S. A linear-time algorithm to find independent spanning trees in maximal planar graphs//Proceedings of the Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG 2000. LNCS 1928. 2000: 290-301

[141] Itai A, Rodeh M. The multi-tree approach to reliability in distributed networks. Information and Computation, 1988, 79(1): 43-59

[142] Cheriyan J, Maheshwari S N. Finding nonseparating induced cycles and independent spanning trees in 3-connected graphs. Journal of Algorithms, 1988, 9(4): 507-537

[143] Zehavi A, Itai A. Three tree-paths. Journal of Graph Theory, 1989, 13(2): 175-188

[144] Huck A. Independent trees in graphs. Graphs and Combinatorics, 1994, 10(1): 29-45

[145] Huck A. Independent trees in planar graph. Graphs and Combinatorics, 1999, 15(1): 29-77

[146] Di Battista G, Tamassia R, Vismara L. Output-sensitive reporting of disjoint paths. Department of Computer Science, Brown University: Technical Report CS-96-25, 1996

[147] Di Battista G, Tamassia R, Vismara L. Output-sensitive reporting of disjoint paths. Algorithmica, 1999, 23(4): 302-340

[148] Miura K, Takahashi D, Nakano S, Nishizeki T. A linear-time algorithm to find four independent spanning trees in four-connected planar graphs//Proceedings of the 24th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'98). Lecture Notes in Computer Science 1517, Smolenice Castle, Slovakia, 1998: 310-323

[149] Curran S, Lee O, Yu X. Finding four independent trees. SIAM Journal on Computing, 2006, 35(5):1023-1058

[150] Hasunuma T. Completely independents panning trees in the underlying graph of a line digraph. Discrete Mathematics, 2001, 234(1-3): 149-157

[151] Hasunuma T. Completely independent spanning trees in maximal planar graphs//Proceedings of the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG2002). Lecture Notes in Computer Science 2573. Berlin, Germany, 2002: 235-245

[152] Péterfalvi F. Two counterexamples on completely independent spanning trees. Discrete Mathematics, 2012, 312(4): 808-810

[153] Kruskal Jr J B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proceedings of the American Mathematical society, 1956, 7(1): 48-50

[154] Bao F, Igarashi Y. Reliable broadcasting in product networks with Byzantime faults//Proceedings of the 26th Annual International Symposium on Fault-Tolelant Computing (FTCS'96). Sendai, Japan, 1996: 262-271

[155] Obokata K, Iwasaki Y, Bao F, Igarashi Y. Independent spanning trees of product graphs and their construction//Proceedings of the 22nd Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG'96). Lecture Notes in Computer Science 1197. Cadenabbia, Italy, 1996: 338-351

[156] Lawler E L. A note on the complexity of the chromatic number problem. Information Processing Letters, 1976, 5(3): 66-67

[157] Eppstein D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring//Proceedings of the 7th Workshop Algorithms and Data Structures. Lecture Notes in Computer Science 2125. Providence, USA, 2001: 462-470

[158] Eppstein D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring. Journal of Graph Algorithms and Applications, 2003, 7(2): 131-140

[159] Byskov J M. Chromatic number in time $O(2.4023^n)$ using maximal independent sets. Center for Basic Research in Computer Science(BRICS): Technical Report RS-02-45, 2002

[160] Koivisto M. An $O*(2^n)$ algorithm for graph coloring and other partitioning problems via inclusion-exclusion//Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS'06). Berkeley, USA, 2006: 583-590

[161] Schiermeyer I. Deciding 3-colourability in less than $O(1.415^n)$ steps//Proceedings of the 19th International Workshop Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Lecture Notes in Computer Science 790. Utrecht, Netherlands, 1994: 177-188

[162] Beigel R, Eppstein D. 3-coloring in time $O(1.3446^n)$: A no-MIS algorithm//Proceedings of the 36th IEEE Symposium Foundations of Computer Science. Milwaukee, USA, 1995: 444-453

[163] Eppstein D. Improved algorithms for 3-coloring, 3-edge-coloring, and constraint satisfaction//Proceedings of the 12th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Washington DC, USA, 2001: 329-337

[164] Beigel R. Eppstein D. 3-coloring in time $O(1.3289^n)$. Journal of Algorithms, 2005, 54(2): 168-204

[165] Byskov J M. Algorithms for k-colouring and finding maximal independent sets//Proceedings of the 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia, USA, 2003: 456-467

[166] Fomin F V, Gaspers S, Saurabh S. Improved exact algorithms for counting 3-and 4-colorings//Lin G ed. Computing and Combinatorics. LNCS 4598. Springer, Heidelberg, Germany, 2007: 65-74

[167] Heesch H. Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/ZÄurich, 1969

[168] Robertson N, Sanders D P, Seymour P D, Thomas R. A new proof of the four colour theorem. Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, 1996, 2(1): 17-25

[169] Robertson N, Sanders D P, Seymour P D, Thomas R. The four color theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1997, 70(1): 2-43

[170] Matula D W, Shiloach Y, Tarjan R E. Two linear-time algorithms for five-coloring a planar graph. Computer Science Department, Stanford University, USA: Technical Report STAN-CS-80-830, 1980

[171] Matula D W, Shiloach Y, Tarjan R E. Analysis of two linear-time algorithms for five-coloring a planar graph//Proceedings of the 12th S-E Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium. Baton Rouge, USA, 1981, 33: 407

[172] Chiba N, Nishizeki T, Saito N. A linear 5-coloring algorithm of planar graphs. Journal of Algorithms, 1981, 2(4): 317-327

[173] Zhou Y Q, Zheng H Q, Luo, Q F, Wu J Z. An improved cuckoo search algorithm for solving planar graph coloring problem. Applied Mathematics & Information Science, 2013, 2(7): 785-792

[174] Stockmeyer L J. Planar 3-colorability is NP-complete. SIGACT News, 1973, 5(3): 19-25

[175] Garey M R, Johnson D S, Stockmeyer L J. Some simplified NP-complete graph problems. Theoretical Computer Science, 1976, 1(3): 237-267

[176] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco, USA: Freeman WH and Company, 1979

[177] Schnyder W. Planar graphs and poset dimension. Order 1989, 5(3): 23-343

[178] Schnyder W. Embedding planar graphs on the grid//Proceedings of the 1st ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms. San Francisco, USA, 1990: 138-148

[179] Kant G. Drawing planar graphs using the lmc-ordering//Proceedings of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundatons of Computer Science. Washington, USA, 1992: 101-110

[180] Chuang R C N, Garg A, He X, et al. Compact encodings of planar graphs via canonical ordering and multiple parentheses //Proceedings of the 25th International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP'98). Aalborg, Denmark, 1998, 1443: 118-129

[181] Bonichon N. A bijection between realizers of maximal plane graphs and pairs of non-crossing Dyck paths. Discrete Mathematics, 2005, 298(1): 104-114

XU Jin, born in 1959, Ph. D, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include graph theory and combinatorial optimization, bio-computer, inteligent computing and systems engineering etc.

LI Ze-Peng, born in 1987, Ph. D. candidate. His main research interests include graph theory and combinatorial optimization.

ZHU En-Qiang, born in 1983, Ph. D. candidate. His main research interests include graph theory and combinatorial optimization.

Background

The research object of many problems is the maximal planar graph, such as the famous Four-Color Problem, uniquely Four-Colorable planar graphs problem, and decomposition and covering of planar graphs etc. Especially, Four-Color Problem attracts a lot of scholars due to the simplicity of its narrative and the difficulty to solve it. In the process of studying the Four-Color Problem, many interesting topics about the maximal planar graph were proposed successively. For instance, degree sequence, Hamilton characteristic, chromatic polynomial, operational system, enumeration, decomposition and covering, together with spanning tree, generating algorithm, etc.

There are a strong relationship between the structure and the coloring of maximal planar graphs. Since the Four-Color Conjecture was proposed in 1852, no mathematical proofs have been found until now. The main reason maybe that the structure, especially the structure based on 4-coloring, of maximal planar graphs did not be studied in depth. So it is worth clearing up the research progress in all aspects of maximal planar graphs.

In this paper, we summarized the research advances of some typical topics about maximal planar graphs, including degree sequence, Hamilton characteristic, chromatic polynomial, generating operation system, operational system, enumeration, decomposition and covering, spanning tree, and some algorithms. Furthermore, the main results of these problems were investigated and analyzed in detail. Our work provides other scholars the convenience for studying the relevant topics about maximal planar graphs. This study is supported by the National Basic Research Program (973 Program) of China under Grant Nos. 2013CB32960, 2013CB329602, the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 60974112, 30970960. Our research team produces a lot of good work in this area, especially in the aspect of the coloring of graphs.