

# DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法

谢承旺<sup>1,2)</sup> 余伟伟<sup>3)</sup> 郭华<sup>2)</sup> 张伟<sup>4)</sup> 张琼冰<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup>(华南师范大学数据科学与工程学院 广东 汕尾 516600)

<sup>2)</sup>(南宁师范大学计算机与信息工程学院 南宁 530100)

<sup>3)</sup>(北京航空航天大学计算机学院 北京 100191)

<sup>4)</sup>(华东交通大学理学院 南昌 330013)

<sup>5)</sup>(湖南科技大学计算机科学与工程学院 湖南 湘潭 411201)

**摘要** 现实中不断涌现的高维多目标优化问题对传统的基于 Pareto 支配的多目标进化算法构成巨大挑战. 一些研究者提出了若干改进的支配关系,但仍难以有效地平衡高维多目标进化算法的收敛性和多样性. 提出一种动态角度向量支配关系动态地刻画进化种群在高维目标空间的分布状况,以较好地收敛性与多样性之间取得平衡;另外,提出一种改进的基于  $L_p$ -范式( $p < 1$ )的拥挤距离度量方法以有效地度量高维目标空间中解群的多样性. 设计了一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法 DAV-MOEA,该算法利用动态角度向量支配关系增强选择压力,运用改进的基于  $L_p$ -范式( $p < 1$ )的拥挤距离维持解群的多样性. 实验研究了动态角度向量支配关系、改进的拥挤距离方法以及 DAV-MOEA 算法在 5-、8-和 10-目标的 DTLZ 和 WFG 基准测试实例上的 IGD 与 HV 指标性能. 实验结果表明,动态角度向量支配关系、改进的拥挤距离方法和 DAV-MOEA 算法在高维目标空间中能够获得显著较优或颇具竞争力的收敛性和多样性. 由此表明所提出的支配关系、拥挤距离度量方法和 DAV-MOEA 算法在高维目标空间中颇具前景.

**关键词** 动态角度向量支配关系;高维多目标优化;进化算法;多样性;收敛性

**中图法分类号** TP391 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2022.00317

## DAV-MOEA: A Many-Objective Evolutionary Algorithm Adopting Dynamic Angle Vector Based Dominance Relation

XIE Cheng-Wang<sup>1,2)</sup> YU Wei-Wei<sup>3)</sup> GUO Hua<sup>2)</sup> ZHANG Wei<sup>4)</sup> ZHANG Qiong-Bing<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Data Science & Engineering, South China Normal University, Shanwei, Guangdong 516600)

<sup>2)</sup>(College of Computer and Information Engineering, Nanning Normal University, Nanning 530100)

<sup>3)</sup>(School of Computer Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191)

<sup>4)</sup>(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013)

<sup>5)</sup>(School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201)

**Abstract** More and more many-objective optimization problems (MaOPs) are presented in the real-world, which pose a stiff challenge to the conventional Pareto based multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs). Some researchers have proposed some modified dominance relations for solving MaOPs by modifying the Pareto dominance relation. However, these modified ones still

收稿日期:2021-03-02;在线发布日期:2021-09-13. 本课题得到国家自然科学基金项目(61763010,61802125,12161039)、广西自然科学基金项目(2021GXNSFAA075011)、广西“八桂学者”项目(厅[2016]21号)、江西省自然科学基金项目20212ACB211002)、湖南省自然科学基金青年项目(2020JJ5202)、湖南省教育厅科研项目(18C0331)和广西研究生教育创新计划资助项目(YCSW2020194)资助. 谢承旺, 博士, 教授, 中国计算机学会(CCF)高级会员, 主要研究领域为智能计算. E-mail: chengwangxie@m.s.cn. 余伟伟, 博士研究生, 中国计算机学会(CCF)会员, 主要研究方向为智能计算和软件工程. 郭华, 硕士研究生, 主要研究方向为智能计算. 张伟(通信作者), 博士, 副教授, 主要研究方向为计算系统生物学、复杂网络和计算智能. E-mail: wzhang\_math@whu.edu.cn. 张琼冰, 博士, 讲师, 中国计算机学会(CCF)会员, 主要研究方向为智能计算与智能信息处理.

have difficulties in balancing the convergence and diversity. A dynamic angle vector based dominance relation (DAV) is proposed to dynamically describe the distribution of evolutionary populations in the objective space to better balance the convergence and diversity. In addition, a modified simplified Harmonic normalized crowding distance method based on  $L_p$ -norm ( $p < 1$ ) (SHND- $L_p$ ) is also proposed to measure the diversity in many-objective space more effectively and efficiently. Based on the above, a many-objective evolutionary algorithm based on DAV and SHND- $L_p$  (DAV-MOEA) is developed to solve MaOPs. Several experiments are conducted to validate the performance of the DAV, SHND- $L_p$ , and DAV-MOEA in terms of  $IGD$  and  $HV$  indicators on the 5-, 8-, and 10-objective DTLZ and WFG benchmark test instances. The empirical results demonstrate that the DAV, SHND- $L_p$ , and DAV-MOEA can obtain significantly superior or competitive performance in terms of convergence and diversity in solving MaOPs. Overall, the DAV, SHND- $L_p$ , and DAV-MOEA are promising in solving MaOPs.

**Keywords** dynamic angle vector based dominance relation; many-objective optimization; evolutionary algorithm; diversity; convergence

## 1 引言

现实中存在大量需要同时优化多个目标的问题,即多目标优化问题(Multi-Objective Optimization Problem, MOP). MOP 问题求解的结果通常是一组折中解,即 Pareto 解集或非劣解集<sup>[1]</sup>. 进化算法(Evolutionary Algorithm, EA)具有隐并行性及其对待解问题的数学性质不作假设,因而适于求解各种 MOP 问题<sup>[2]</sup>. 在众多的多目标进化算法(Multi-Objective Evolutionary Algorithm, MOEA)中,基于 Pareto 占优的 MOEA 算法是其中一类重要的算法,其在求解目标数较少的 MOP 问题(如具有 2 至 3 个目标)时具有较好的性能<sup>[3]</sup>. 典型范例包括 NSGA-II<sup>[4]</sup>、SPEA2<sup>[5]</sup> 和 PESA-II<sup>[6]</sup> 等.

近年来,现实应用中涌现出要求同时优化更多目标的问题,如无人机群路径规划<sup>[7]</sup>和混合动力汽车控制问题<sup>[8]</sup>等. 这些问题的目标数目超过 3 个,通常被称为高维多目标优化问题(Many-Objective Optimization Problem, MaOP). MaOP 问题的出现给基于 Pareto 最优性的 MOEA 算法带来了挑战,其中的困难包括:(1)进化算法的选择压力降低;(2)产生大量支配抵触解(Dominance Resistance Solution, DRS)<sup>[9]</sup>;(3)形成主动多样性促进(Active Diversity Promotion, ADP)机制<sup>[10]</sup>. 在 DRS 和 ADP 共同作用下,基于 Pareto 占优的 MOEA 算法在求解 MaOP 问题时将难以收敛到待解问题真实的 Pareto 前沿上.

鉴于 Pareto 占优关系在高维目标空间可扩展性差,研究者从不同的视角提出了多种改进的支配关系,粗略地可将其分为:(1)修改目标值的方法. 如  $\epsilon$ -支配关系<sup>[11]</sup>、锥体  $\epsilon$ -支配关系<sup>[12]</sup>、CDAS(Controlling Dominance Area of Solution)关系<sup>[13]</sup>、S-CDAS(Self-Controlling Dominance Area of Solution)<sup>[14]</sup> 和 grid 支配<sup>[15]</sup> 等;(2)目标计数的方法. 典型范例包括:(1- $k$ )-支配<sup>[16]</sup>、*favor* 关系<sup>[17]</sup>、 $\epsilon$ -*prferred* 关系<sup>[18]</sup> 和  $L$ -支配<sup>[19]</sup> 等;(3)改进 Pareto 最优性. 包括  $\alpha$ -支配<sup>[20]</sup> 和 GPO(Generalized Pareto Optimality)最优性<sup>[21]</sup> 等;(4)利用小生境的方法. 如 SDR(Strengthen Dominance Relation)关系<sup>[3]</sup>、 $\theta$ -支配<sup>[22]</sup> 和 RP-支配<sup>[23]</sup> 等;(5)利用角度的方法. 如利用张角的方法<sup>[24]</sup>、利用余弦相似度的方法<sup>[25]</sup>、利用角度和权重的方法<sup>[26]</sup> 以及新近提出的基于角度的支配方法 AD (Angle Dominance)<sup>[27]</sup>. 总体上,在已有改进的支配方法中有的强调收敛性而多样性不足,有的侧重多样性而收敛性较差,极少能较好地平衡高维目标解群的收敛性与多样性. 其次,大多数改进的支配方法需要预设参数,不便于使用. 最后,尽管已有利用角度定义的支配方法较适于求解 MaOP 问题,但它们大都只利用当代种群而非全部历史种群的信息来定义支配关系,因而不利于 MOEA 算法全局寻优.

基于此,提出一种基于动态角度向量的支配关系(Dynamic Angle Vector based dominance relation, DAV). DAV 较之已有利用角度的支配方法,其具有如下特点:(1)利用进化种群的历史信息指导群体搜索,使算法可以在更广阔的区域寻优;(2)解

个体的角度向量根据种群的分布状况自适应地计算,能较好地刻画种群在高维目标空间分布情况,有利于平衡高维目标解群的收敛性与多样性;(3) DAV 支配无需预设参数,易于使用。不仅如此,本文还利用  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 改进了我们此前提出的简化 Harmonic 归一化拥挤距离方法<sup>[28]</sup>,以更好地保持高维目标解群的多样性。在上述工作的基础上,我们将 DAV 支配和基于  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 的拥挤距离方法嵌入到经典的 NSGA-II 算法框架以分别替代其原有的 Pareto 支配和拥挤距离度量,设计了一种基于动态角度向量支配的高维多目标进化算法 (Dynamic Angle Vector dominance relation based Many-Objective Evolutionary Algorithm, DAV-MOEA)。为检验 DAV-MOEA 算法及其重要组件的有效性,本文设计了四组实验:第一组实验用于分析  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 中参数  $p$  的合适设置;第二组实验用于比较 DAV 支配和几种代表性的改进支配关系,如 S-CDAS<sup>[14]</sup>、grid 支配<sup>[15]</sup>、 $\theta$ -支配<sup>[22]</sup>、SDR 支配<sup>[3]</sup> 和 AD 支配<sup>[27]</sup> 在相同进化环境下求解 MaOP 问题的性能;第三组实验用于比较本文改进的拥挤距离度量方法和简化 Harmonic 归一化拥挤距离度量方法<sup>[28]</sup> 以及 Harmonic 平均距离方法<sup>[29]</sup> 在高维目标空间维持解群多样性的能力;第四组实验用于比较 DAV-MOEA 算法与几种高效的高维多目标进化算法,如 RVEA<sup>[30]</sup>、NSGA-III<sup>[31]</sup>、MOEA/DD<sup>[32]</sup>、MOMBI-II<sup>[33]</sup> 和 Two-Arch2<sup>[34]</sup> 在高维目标的 DTLZ<sup>[35]</sup> 和 WFG<sup>[36]</sup> 系列测试问题上的性能。

本文第 2 节是 MOP 问题的基本概念;第 3 节描述动态角度向量支配关系。第 4 节给出一种改进的拥挤距离度量方法;第 5 节是 DAV-MOEA 算法的流程及其时间复杂性分析;第 6 节是本文的实验与分析;最后是本文的结论部分。

## 2 MOP 问题的基本概念

不失一般性,一个具有  $n$  个决策变量,  $M$  个目标函数的最小化 MOP 问题可形式化表示如下:

$$\begin{cases} \min y = F(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))^T \\ \text{s. t. } x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里的  $M$  表示目标数,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  是决策(变量)空间  $\Omega$  中的点,  $\mathbb{R}^M$  是目标空间,且  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$  包含了  $M$  个实值目标函数。通常,当  $M \geq 4$  时,式(1)中的 MOP 问题又被称为 MaOP 问题。以下是 MOP 问题几个重要的概念。

**定义 1.** Pareto 支配。设  $x^1, x^2 \in \Omega$  是式(1)中 MOP 问题的任意两个解,称  $x^1$  Pareto 支配  $x^2$  (记为  $x^1 < x^2$ ) 当且仅当  $\forall i \in (1, \dots, M): f_i(x^1) \leq f_i(x^2) \wedge \exists j \in (1, \dots, M): f_j(x^1) < f_j(x^2)$  成立。

**定义 2.** Pareto 最优解。设  $x^* \in \Omega$  是 Pareto 最优解当且仅当不存在其他的解  $x \in \Omega$  使得  $x < x^*$  成立。Pareto 最优解通常也称为 Pareto 非支配解或 Pareto 非劣解。

**定义 3.** Pareto 最优解集。Pareto 最优解集 (Pareto optimal Set, PS) 是所有 Pareto 最优解的集合,即  $PS = \{x^*\} = \{x \in \Omega \mid \nexists x' \in \Omega: x' < x\}$ 。

**定义 4.** Pareto 最优前沿。Pareto 最优前沿 (Pareto optimal Front, PF) 是 PS 在目标空间中的投影,即  $PF = \{F(x) \in \mathbb{R}^M \mid x \in PS\}$ 。

**定义 5.** 理想点。理想点 (ideal point)  $z^* = (z_1^*, \dots, z_M^*)^T$  最小化式(1)中 MOP 问题所有的目标函数,它的第  $i$  个分量  $z_i^*$  定义为  $z_i^* = \min_{x \in \Omega} f_i(x)$ 。

**定义 6.** 最差点。最差点 (nadir point)  $z^{\text{nad}} = (z_1^{\text{nad}}, \dots, z_M^{\text{nad}})^T$  由式(1)中 MOP 问题的 Pareto 最优前沿上的最差值组成,它的第  $i$  个分量  $z_i^{\text{nad}}$  定义为  $z_i^{\text{nad}} = \max_{x \in PS} f_i(x)$ 。

通常,理想点  $z^*$  和最差点  $z^{\text{nad}}$  界定了 MOP 问题的解集在目标空间中的分布范围。

## 3 动态角度向量支配关系

### 3.1 DAV 支配关系的定义及其性质

DAV 支配关系根据每一代种群在目标空间的分布而自动地调整解群在目标空间中的坐标系,并逐代地计算解个体的角度向量。由于进化种群在每一代的分布不尽相同,即便是相同的个体,其不同世代所获得的角度向量一般也不相同。该支配方法能动态地刻画种群的分布情况,可较好地平衡收敛性与多样性。此外,DAV 支配中个体的角度向量仅与个体在目标空间中的位置有关,亦即仅仅与其所处世代种群的分布有关,而且在计算相同世代种群个体的角度向量时,进化代数  $t$  可视为常数,因此 DAV 支配无需用户预设参数。不仅如此,DAV 支配还满足反自反、反对称和传递性之性质,其能够在种群上建立严格的偏序关系(性质证明详见附录),因此可将 DAV 支配嵌入到一些经典的非支配排序方法<sup>[37-38]</sup> 中以实现种群个体有效分层。下面以最小化 MOP 问题为例,给出几个与 DAV 支配密切相关的概念:

**定义 7.** 历史极优点. 设点  $z_t^* = (z_{1,t}^*, \dots, z_{M,t}^*)$  是种群自初始代(第 0 代)到当前代(第  $t$  代)以来所获得的历史极优点, 且  $z_t^*$  的第  $i$  个分量可表示为  $z_{i,t}^* = \min(\bigcup_{\tau=0}^t f_{i,\tau}^{\min}(P_\tau))$ . 这里的  $P_\tau$  表示第  $\tau$  代种群,  $f_{i,\tau}^{\min}(P_\tau) (i=1, \dots, M)$  表示种群  $P_\tau$  在第  $i$  个目标上的最小值,  $M$  为目标数.

**定义 8.** 历史极差点. 设点  $z_t^{\text{nad}} = (z_{1,t}^{\text{nad}}, \dots, z_{M,t}^{\text{nad}})^T$  是种群自初始代到当前代以来所获得的历史极差点, 且  $z_t^{\text{nad}}$  的第  $i$  个分量可表示为  $z_{i,t}^{\text{nad}} = \max(\bigcup_{\tau=0}^t f_{i,\tau}^{\max}(P_\tau))$ , 这里的  $f_{i,\tau}^{\max}(P_\tau) (i=1, \dots, M)$  表示种群  $P_\tau$  在第  $i$  个目标上的最大值.

**定义 9.** 动态规范目标空间. 设  $P_t$  是当前代种群, 设  $O_t = (O_{1,t}, \dots, O_{M,t})$  为  $P_t$  所在目标空间坐标系之原点, 且  $O_{i,t} = z_{i,t}^* (i=1, \dots, M)$ , 则  $O_t$  确定了种群  $P_t$  的动态规范目标空间.

不难看出, 这里的动态规范目标空间将根据每一代种群的分布自适应地进行调整. 换言之, 每一代种群的规范目标空间坐标系将随着历史极优点的变化而改变.

**定义 10.** 最大投影点集. 设  $P_t$  是当前代种群, 则  $P_t$  在动态规范目标空间各目标轴上的最大投影点构成了种群  $P_t$  的最大投影点集  $\Lambda$ , 且  $\Lambda = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ , 而  $P_t$  在第  $i$  维目标轴上的最大投影点  $p_i$  可表示为  $p_i = (O_{1,t}, \dots, O_{i-1,t}, z_{i,t}^{\text{nad}}, O_{i+1,t}, \dots, O_{M,t}) (i=1, \dots, M)$ , 这里的  $z_{i,t}^{\text{nad}}$  为  $z_t^{\text{nad}}$  第  $i$  维的分量.

**定义 11.** 动态角度向量. 设  $x$  是当前代种群  $P_t$  中任意个体, 则  $x$  的动态角度向量  $\theta_t^x$  可表示为  $\theta_t^x = (\theta_{1,t}^x, \dots, \theta_{M,t}^x)$ . 这里的  $\theta_{i,t}^x (i=1, \dots, M)$  表示在动态规范目标空间中个体  $x$  与第  $i$  维目标轴上的最大投影点  $p_i$  的连线与第  $i$  维的目标轴方向所形成的较小的夹角.

**定义 12.** 动态角度向量支配关系, DAV. 设  $x$  和  $y$  是当前代种群  $P_t$  中任意两个个体,  $\theta_t^x$  和  $\theta_t^y$  分别表示  $x$  和  $y$  的动态角度向量, 即  $\theta_t^x = (\theta_{1,t}^x, \dots, \theta_{M,t}^x)$ ,  $\theta_t^y = (\theta_{1,t}^y, \dots, \theta_{M,t}^y)$ . 若个体  $x$  DAV 支配个体  $y$  (记为  $x <_{\text{DAV}} y$ ) 当且仅当  $\forall i \in (1, \dots, M): \theta_{i,t}^x \leq \theta_{i,t}^y \wedge \exists j \in (1, \dots, M): \theta_{j,t}^x < \theta_{j,t}^y$ .

为直观解释动态角度向量支配关系, 图 1 以二维目标空间为例示意了当前种群  $P$  中任意个体  $x$  和  $y$  之间可能存在的 DAV 支配和 DAV 非支配关系. 在不影响表达 DAV 支配含义的前提下这里省略了进化代数  $t$  的记号(下同).

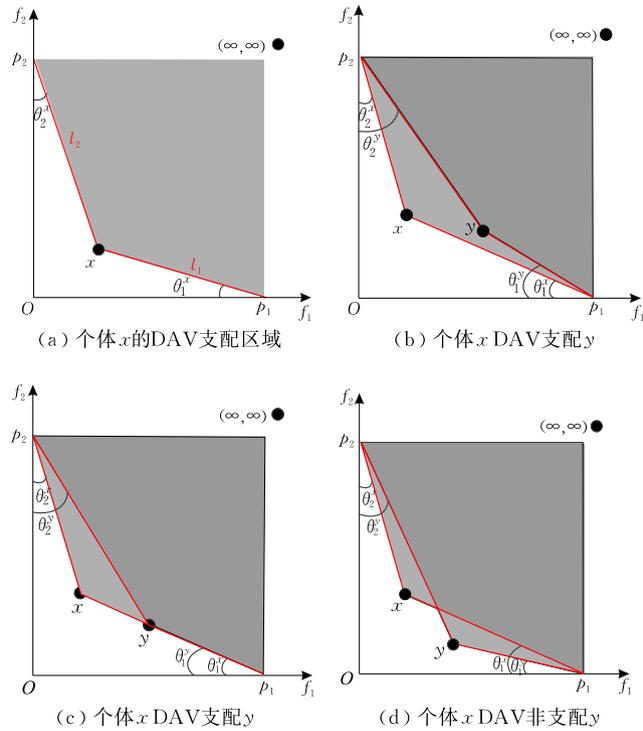


图 1 二维目标空间中 DAV 支配与 DAV 非支配关系示意图

图 1(a) 表示个体  $x$  DAV 支配的区域, 其中  $l_1$ 、 $l_2$  分别表示个体  $x$  与  $f_1$ 、 $f_2$  目标轴上的最大投影点  $p_1$ 、 $p_2$  的连线,  $\theta_1^x$  和  $\theta_2^x$  分别表示  $l_1$ 、 $l_2$  与  $f_1$ 、 $f_2$  目标轴方向上的较小夹角. 显然, 个体  $x$  动态角度向量的任意分量  $\theta_i^x$  的取值范围为  $[0, \pi/2]$ . 图 1(b) 表示个体  $x$  DAV 支配个体  $y$  的一种情形, 其满足了  $\theta_1^x < \theta_1^y$  且  $\theta_2^x < \theta_2^y$  之条件. 图 1(c) 表示了个体  $x$  DAV 支配  $y$  的另一种情形, 与图 1(b) 所不同是, 这里满足的条件为  $\theta_1^x = \theta_1^y$  和  $\theta_2^x < \theta_2^y$ . 图 1(d) 示意了个体  $x$  DAV 非支配个体  $y$  的情形, 其满足的条件为  $\theta_1^x < \theta_1^y$  和  $\theta_2^x > \theta_2^y$ .

进一步地, 为直观表示 DAV 支配的有效性, 图 2 以二维目标空间中具有连续平滑 Pareto 前沿的简单情形为例, 示意 DAV 在保持种群收敛性和多样性方面的能力. 图中的实心圆点表示保留个体, 空心圆点表示被淘汰个体. 在图 2(a) 的种群中包含了 7 个解个体, 即  $x_1, x_2, \dots, x_7$ , 它们在 Pareto 意义下均为非劣解, 但在 DAV 意义下, 只有  $x_2$  和  $x_5$  是非支配解, 其余的均为 DAV 被支配个体. 图 2(a) 较好地表明了 DAV 支配比 Pareto 支配能更好地区分那些 Pareto 非劣解; 不仅如此, 图 2(a) 中两个 DAV 非支配个体(即  $x_2$  和  $x_5$ ) 较之那些 DAV 被支配个体(即  $x_1, x_3, x_4, x_6$  和  $x_7$ ), 它们的收敛性要明显地优于那些 DAV 被支配个体, 这表明 DAV 支配能促

进种群的收敛性. 图 2(b) 的种群中包含 6 个解个体, 即  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , 它们在 Pareto 意义下均为非支配解, 其中  $x_3$  和  $x_4$  较为拥挤, 而个体  $x_1, x_2, x_5$  和  $x_6$  的分布性则较好. 在 DAV 意义下,  $x_1, x_2, x_4, x_5$  和  $x_6$  被视为 DAV 非支配解将予以保留, 而  $x_3$  因被确认为 DAV 被支配个体而遭淘汰. 图 2(b) 直观地表明了 DAV 支配关系亦能促进种群的多样性.

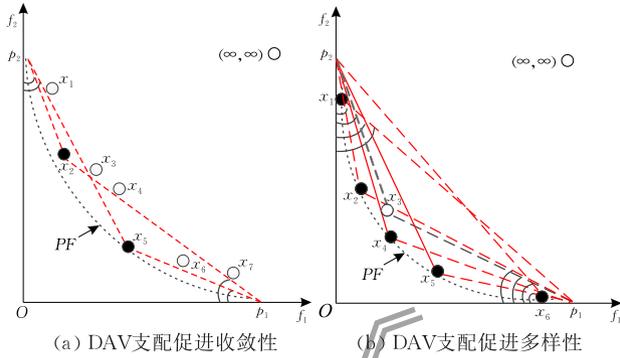


图 2 DAV 支配关系促进收敛性和多样性的示意图

### 3.2 DAV 支配与 S-CDAS 及 AD 支配的异同点

DAV 支配与 S-CDAS 支配<sup>[14]</sup> 较类似, 二者都需要在目标空间构建最大投影点集或边界点集, 并且都保留边界解, 但它们存在如下不同点: (1) S-CDAS 在重构解群的目标空间坐标系时需要利用一个极小的常数  $\delta$  对目标空间进行平移, 并建议  $\delta$  的取值为  $10^{-6}$  或  $10^{-4}$ , 而 DAV 支配在构建种群目标空间坐标系时无需额外的参数, 其仅仅根据解群自身的分布状况自动地构造; (2) 二者作用对象不同. S-CDAS 是对由 NSGA-II 算法产生的非劣支配层逐层执行 S-CDAS 非支配排序, 而 DAV 支配则是对当前代的解群执行 DAV 非支配排序; (3) S-CDAS 需要修改个体的目标函数值, 然后再确认支配关系, 而 DAV 支配无需修改个体的目标函数值即可确认支配关系. 必须指出, 修改个体的目标函数值意味着改变个体在目标空间中的位置, 其对获得结果的可靠性可能造成影响. 最后, 根据文献[3]的研究, S-CDAS 支配所获得解集的收敛性和多样性均较差, 而 DAV 支配致力于平衡所获解集的收敛性和多样性, 而且本文的实验亦表明了 DAV 支配在保持收敛性和多样性方面要显著地优于 S-CDAS.

AD 支配<sup>[27]</sup> 是新近提出的一种角度支配关系, AD 支配与 DAV 支配的相同点在于, 二者都利用解个体在目标空间中的角度向量定义支配关系, 所不同的是: (1) AD 支配中需要利用参数  $k$  来控制解个体的支配区域, 且  $k$  值越小, 个体的支配区域越大. 为了获得较好质量的解集, 文献[27]建议  $k$  取值为

50. 相比之下, DAV 支配无需用户预设参数, 更易于使用; (2) DAV 支配记录了自初始种群以来所获得的历史极优值和历史极差值, 且利用历史极优值和历史极差值分别调整种群所在目标空间坐标系和计算个体的动态角度向量. 由于 DAV 支配能动态刻画种群在整个进化过程中的分布情况, 以期能较好地平衡算法的收敛性和多样性. 相比之下, AD 支配仅计算当前种群的极优点与极差点, 并利用它们来计算解个体的角度向量. 二者相比, DAV 支配显然能利用更多的信息指导解群逼近 Pareto 前沿, 从而有利于算法全局寻优.

## 4 改进的拥挤距离度量方法

高维多目标优化除了要求获得的解群具有较好的收敛性之外, 还要求解集中的个体分布尽量均匀且广泛, 亦即具有较好的多样性. 种群的多样性体现了个体在目标空间中的位置分布, 而个体之间的结合和联系主要表现为它们在目标空间的疏密远近. 为克服 Harmonic 平均距离方法 (Harmonic Average Distance, HAD) 度量高维空间个体拥挤度的不足<sup>[29]</sup>, 我们此前提出了利用简化 Harmonic 归一化距离方法 (Simplified Harmonic Normalized crowding Distance, SHND) 保持解群的多样性<sup>[28]</sup>. 但需指出, 该简化拥挤距离度量方法使用的是  $L_2$ -范式距离 (即欧氏距离), 而欧氏距离实际上并不能精确地度量高维空间中个体之间的远近, 其原因在于高维空间中各目标是独立地进行处理的, 不同的目标其最邻近的个体亦不相同. 另外, 文献[34]的研究也表明, 在基于  $L_p$ -范式的距离度量中, 参数  $p$  越小, 种群中最邻近个体距离与最远个体距离之间的差异将更加显著. 为有效度量高维空间中解个体的拥挤程度, 这里将  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 距离度量引入到这种简化的 Harmonic 归一化距离度量中以替换其原有的  $L_2$ -范式, 即提出一种基于  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 简化的 Harmonic 归一化距离度量方法 (Simplified Harmonic Normalized crowding Distance based on  $L_p$ -norm, SHND- $L_p$ ), 以期较好地维持高维目标解群的多样性.

对于种群中个体  $i$  (种群规模为  $N$ ), 假设在目标空间中个体  $i$  与其他个体之间的距离由近及远依次为  $d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,N-1}$ , 则个体  $i$  的 Harmonic 平均距离如式(2)所示:

$$d_i = \frac{N-1}{\frac{1}{d_{i,1}} + \frac{1}{d_{i,2}} + \dots + \frac{1}{d_{i,N-1}}} \quad (2)$$

不难看出,式(2)中的 Harmonic 平均距离考虑了  $i$  与种群中所有个体的距离,计算代价大. 值得注意的是,种群中相对较远的个体由于其对当前个体拥挤度的影响可以忽略,以免引入不必要的偏差和计算资源的耗费,并且这种情形在高维目标空间表现得尤为明显. 因此,在不影响度量准确性的情况下,可考虑将参与距离计算的个体数目从  $N$  减少至  $k$ ,并取  $k = \lfloor \log_2 N \rfloor$ ,这样简化后的 Harmonic 距离如式(3)所示:

$$d_i = \frac{k-1}{\frac{1}{d_{i,1}} + \frac{1}{d_{i,2}} + \dots + \frac{1}{d_{i,k-1}}} \quad (3)$$

由于种群个体之间的距离  $d$  可为任意正数,为方便计算,对  $d_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,k$ ) 用归一化方法进行规范,可得归一化距离为  $((d_{i,j} - d_{\min}) / (d_{\max} - d_{\min}))$ ,这里的  $d_{\min}$  和  $d_{\max}$  分别为种群个体的最邻近距离和最远距离. 为了使  $d_i$  和  $d_{i,j}$  保持一致,经适当变换后可得距离  $[1 - (d_{i,j} - d_{\min}) / (d_{\max} - d_{\min})]$ . 一般地,距离越近的个体对当前个体拥挤度的影响越大,为进一步扩大这种差异,对相对距离进行平方,即  $((d_{i,j} - d_{\min}) / (d_{\max} - d_{\min}))^2$ . 籍此可得改进的拥挤距离计算方法,如式(4)所示:

$$d_i = \frac{k}{\sum_{j=1}^k \left[ 1 - \left( \frac{d_{i,j} - d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}} \right)^2 \right]} \quad (4)$$

由式(4)可知,改进的拥挤距离度量方法仅考虑当前个体局部邻域内  $k$  个个体,而并非种群中所有个体,相比 Harmonic 平均距离度量,这里的度量方法明显减少了计算量. 假设种群规模为  $N$ ,决策空间的维度为  $n$ ,目标数为  $M$ ,由于简化的拥挤距离度量仅考虑种群中  $\lfloor \log_2 N \rfloor$  个最邻近个体,其时间复杂度要明显少于 Harmonic 平均距离的复杂度  $O(Mn \log_2 n)$ ,减少量为  $O(N(N-1 - \lfloor \log_2 N \rfloor))$ . 因此,改进后的拥挤距离度量方法的时间复杂度为  $O(Mn \log_2 n) - O(N(N-1 - \lfloor \log_2 N \rfloor))$ . 另外,式(4)中个体之间距离的计算采用的是  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ),而参数  $p$  的取值将在实验部分讨论.

种群中的个体由于具有共同相邻的个体而联系在一起,因此拥挤距离度量能在一定程度上反映出当前个体在种群中的整体分布;同时,基于局部邻域内远近不同的个体对当前个体拥挤程度影响不同而采取的放大策略和归一化方法,能更好地度量个体

的邻域分布. 因此,这里改进的拥挤距离度量方法可从局部和整体上维持解群的多样性.

## 5 DAV-MOEA 算法

为较好地平衡高维多目标进化算法的收敛性与多样性,这里将 DAV 支配和 SHND- $L_p$  距离度量嵌入到 NSGA-II 算法框架中以分别替换其原有的 Pareto 支配和拥挤距离度量<sup>[4]</sup>,设计了一种基于动态角度向量支配的高维多目标进化算法 DAV-MOEA. 该算法具有两个显著特点:(1)利用基于动态角度向量支配的非支配排序方法将种群划分为若干 DAV 非支配层;以及(2)利用 SHND- $L_p$  度量方法评估 DAV 非支配层上个体的拥挤程度. 算法 1 给出了 DAV-MOEA 算法的流程.

### 算法 1. DAV-MOEA 算法.

输入:种群规模  $N$ ,决策变量数目  $n$ ,MaOP 问题目标数目  $M$ ,最大迭代次数  $T_{\max\text{gen}}$

输出:最末代种群  $P_{\max\text{gen}}$

1. 初始化
  - 1.1 初始化迭代计数器  $t=0$ ;
  - 1.2 在 MaOP 问题决策空间内随机产生  $N$  个初始点,形成初始种群  $P_0$ ;
  - 1.3 计算  $P_0$  中所有解点的目标值向量  $\mathbf{FV}^1(0), \dots, \mathbf{FV}^N(0)$ ;
2. 计算  $P_0$  的历史极优点  $\tilde{z}^*(0)$  和历史极差点  $\tilde{z}^{\text{nad}}(0)$ ;
3. 以  $\tilde{z}^*(0)$  为坐标原点构建  $P_0$  的动态规范目标空间  $O_0$ ;
4. 确定种群  $P_0$  的动态规范目标空间  $O_0$  的最大投影点集  $\Delta(0) = \{p_1(0), \dots, p_M(0)\}$ ;
5. 计算  $P_0$  中各个体的动态角度向量;
6.  $[F_1, F_2, \dots] \leftarrow \text{dynamic\_angle\_vector\_based\_non\_domination\_sorting}(P_0)$ ; //基于 DAV 非支配排序
7.  $\text{crowdDist} \leftarrow \text{SHND-}L_p(F_1, F_2, \dots)$ ; //利用 SHND- $L_p$  方法度量非支配层上个体的拥挤距离
8. WHILE ( $t < T_{\max\text{gen}}$ )
  9. 构建交配池:  $P_t^{\text{mating}} = \text{Mating\_selection}(P_t)$ ;
  10. 重组运算:  $P_t^{\text{recombination}} = \text{Recombination}(P_t^{\text{mating}})$ ;
  11. 变异运算:  $P_t^{\text{offspring}} = \text{Mutation}(P_t^{\text{recombination}})$ ;
  12. 合并子种群和父种群:  $P_t^{\text{union}} = P_t \cup P_t^{\text{offspring}}$ ;
  13.  $[\tilde{z}^*(t), \tilde{z}^{\text{nad}}(t)] \leftarrow \text{Updation\_historical\_point}(P_t^{\text{union}})$ ; //更新历史极优点和历史极差点
  14. 计算  $P_t^{\text{union}}$  的最大投影点集:  $\Delta(t) = \{p_1(t), \dots, p_M(t)\}$ ;
  15. 计算  $P_t^{\text{union}}$  中各个体的动态角度向量;
  16.  $[F_1, F_2, \dots] \leftarrow \text{dynamic\_angle\_vector\_based\_non\_domination\_sorting}(P_t^{\text{union}})$ ;
  17.  $\text{crowdDist} \leftarrow \text{SHND-}L_p(F_1, F_2, \dots)$ ;

18. 确定最小的  $k$  值,使其满足  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| \geq N$ ;
19. IF  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| > N$  THEN
20. 根据拥挤度从 DAV 非支配层  $F_k$  中删除  $(|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| - N)$  个具有最差拥挤距离的个体;
21. END IF
22.  $P_{t+1} = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ ;
23. 更新迭代计数器:  $t = t + 1$ ;
24. END WHILE
25. 输出最末代种群  $P_{\maxgen}$ .

算法 1 的第 6 步利用 DAV 支配将进化群体分为若干层,其中第一层为群体的 DAV 非支配层,第二层为群体中去掉第一层个体后所获得的 DAV 非支配层,第三层为在群体中去掉第一层和第二层个体后所获得的 DAV 非支配层,如此反复,直至群体中所有个体均被划分至相应的非支配层;第 9 步 *Mating\_selection* 利用二元锦标赛策略从种群  $P_t$  中选取较优的  $N/2$  个个体置于交配池,个体胜出的判据为:首先考虑它们的非支配层排序,其次是根据改进的拥挤距离度量;第 10 步 *Recombination* 对交配池中的群体  $P_t^{\text{mating}}$  执行仿二进制交叉获得规模为  $N$  的种群  $P_t^{\text{recombination}}$ ;第 11 步 *Mutation* 对种群  $P_t^{\text{recombination}}$  执行多项式变异,获得子种群  $P_t^{\text{offspring}}$ ;第 13 步 *Updation\_historical\_point* 计算种群  $P_t^{\text{union}}$  的历史极优点和历史极差点,并用于第 14 步构建种群  $P_t^{\text{union}}$  的最大投影点集.特别地,DAV-MOEA 算法的第 7 步和第 17 步均需要对各 DAV 非支配层上个体利用  $L_p$ -范式( $p < 1$ )计算它们的拥挤距离.

由于欧氏距离在高维空间中并不能精确地度量解个体之间的拥挤程度,DAV-MOEA 算法利用基于  $L_p$ -范式( $p < 1$ )的距离度量方法度量个体的拥挤度.算法 2 为 SHND- $L_p$  度量方法的流程.

#### 算法 2. SHND- $L_p$ 度量方法.

输入:非支配层  $F_i$

输出:度量后的非支配层  $F_i$

1. 初始化:将  $F_i$  层上各个体的拥挤距离初始化为无穷大值;
2. 将  $F_i$  层上个体按其  $f_1$  值进行排序,保留在  $f_1$  上取得最大值和最小值的个体,并对其余个体执行如下操作:
3. 计算个体  $i$  与其他个体  $j$  之间的  $L_p$ -范式的距离:  
 $Dis(i, j) = \text{norm}(\mathbf{objFun}(i) - \mathbf{objFun}(j), p < 1)$ ;
4. 设置  $Dis(i, j) = Dis(j, i)$ ;
5. 确定最大的拥挤距离  $MaxDis$  和最小的拥挤距离  $MinDis$ ;
6. 计算各个体的归一化距离:  $Dis(i) = \sum (Dis(i, j) / (MaxDis - MinDis))$ ;
7. 输出度量后的非支配层  $F_i$ .

算法 2 的第 3 步  $\text{norm}(\cdot)$  为 Matlab 工具中计算范式距离的函数,  $\mathbf{objFun}(x)$  是个体  $x$  的目标函数值向量.值得一提的是, Wang 等人<sup>[39]</sup>也研究了  $L_p$  方法,但它与这里的  $L_p$ -范式距离显著不同:首先,文献[39]中的  $L_p$  方法指的是一族加权的标量化方法,这些标量化方法将一个 MOP 问题转化为若干单目标优化问题以协同求解.而本文的  $L_p$ -范式是用于度量高维目标空间解点的距离;其次,  $p$  值的含义不同.  $L_p$  标量化方法中的  $p$  值对于平衡算法的选择压力及其在不同 PF 几何上的鲁棒性至关重要,且  $p \geq 1$ . 而  $L_p$ -范式中的  $p$  指的是距离计算的范型(例如:  $p = 2$  表示欧氏距离,  $p = 1$  表示曼哈顿距离),且对于高维目标空间两点的距离,本文采用  $p < 1$  进行度量.

设  $N$  表示种群规模,  $M$  表示 MaOP 问题的目标数,决策空间维度为  $n$ ,算法最大的迭代次数为  $T_{\maxgen}$ ,则 DAV-MOEA 算法的时间复杂性可分析如下:

(1) 步骤 1 的初始化阶段包括 3 个子步,其中初始化迭代器的时间为  $O(1)$ ,生成初始群体的时间复杂性为  $O(Nn)$ ,计算初始群体目标函数值的时间复杂度为  $O(NM)$ ,因此步骤 1 的时间复杂度为  $O(1) + O(Nn) + O(NM) = \max(O(Nn), O(NM))$ ;

(2) 步骤 2、3、4 和 5 分别计算历史极点、构建规范目标空间、确定最大投影点集以及计算动态角度向量的时间复杂度均为  $O(NM)$ ;

(3) 步骤 6 对群体执行 DAV 非支配排序,其过程类似于 NSGA-II 中的非支配排序方法,其时间复杂度为  $O(MN^2)$ <sup>[41]</sup>;

(4) 步骤 7 利用 SHND- $L_p$  方法度量各 DAV 非支配层个体的拥挤距离的时间复杂度为  $O(Mn \log_2 n) - O(N(N-1 - \lfloor \log_2 N \rfloor))$ ;

(5) 算法从步骤 8 进入循环,循环体内步骤 9、10、11 和 12 分别构建交配池、重组、变异和合并种群的时间复杂度均为  $O(Nn)$ ;步骤 13、14 和 15 分别更新历史极点、确定最大投影点集以及计算合并种群动态角度向量的时间复杂度均为  $O(NM)$ ;步骤 16 执行 DAV 非支配排序的时间复杂度为  $O(M(2N)^2)$ ;步骤 17 利用 SHND- $L_p$  方法度量拥挤距离的时间复杂度为  $O(Mn \log_2 n) - O(N(N-1 - \lfloor \log_2 N \rfloor))$ ;步骤 18~23 的时间复杂度为  $O(NM)$ ;因此循环体内总的时间复杂度为  $O(MN^2)$ . 算法一共迭代  $T_{\maxgen}$  次,因此循环体内的时间复杂度为  $O(T_{\maxgen} MN^2)$ ;

(6) 步骤 25 输出最末代种群的时间复杂度为  $O(NM)$ .

综上, DAV-MOEA 算法的时间复杂度为  $\max(O(Nn), O(NM)) + O(NM) + O(MN^2) + (O(Mn \log_2 n) - O(N(N-1 - \lfloor \log_2 N \rfloor))) + O(T_{\max\text{gen}} MN^2) = O(T_{\max\text{gen}} MN^2)$ . 由此可见, DAV-MOEA 算法的时间复杂度取决于其所采用的 DAV 非支配排序方法的时间复杂度.

## 6 实验与分析

这里设计四组实验分别用于分析高维目标空间中  $L_p$ -范数( $p < 1$ )参数  $p$  的合适设置、比较 DAV 支配和其他七种改进的支配关系的性能、比较 SHND- $L_p$  度量方法和其他两种拥挤距离度量方法的性能以及比较 DAV-MOEA 算法与其他五种高维多目标进化算法的性能, 以验证 DAV-MOEA 算法及其组件的有效性.

### 6.1 测试问题

实验利用 DTLZ<sup>[35]</sup> 和 WFG<sup>[36]</sup> 两个系列的测试问题考察算法求解高维多目标优化问题的性能. 采用这两个测试集的原因在于: (1) DTLZ 和 WFG 系列函数在目标数和决策变量数上具有可扩展性; (2) 这两个系列的测试问题具有多种 Pareto 前沿特征, 它们能从多个方面来检验算法求解 MaOP 问题的能力. DTLZ 测试集包括 DTLZ1~DTLZ7 测试问题, 但由于 DTLZ5 和 DTLZ6 的 Pareto 前沿在 3 维以上目标空间中的性质尚不清晰, 这里仅考虑 DTLZ1~DTLZ4 和 DTLZ7 等 5 个 DTLZ 测试问题. WFG 系列测试问题包含 WFG1~WFG9 等九个测试问题, 它们的 Pareto 前沿具有更加丰富且复杂的特征, 因而对高维多目标优化算法提出了更大的挑战. 表 1 简单描述了这两个系列的测试问题的难度特征.

表 1 DTLZ 和 WFG 系列的测试问题的难度特征

测试问题	特征描述
DTLZ1	线性、多模态
DTLZ2	凹型
DTLZ3	凹型、多模态
DTLZ4	凹型、有偏
DTLZ7	混合、不连续、多模态、比例缩放
WFG1	混合、有偏、比例缩放
WFG2	凸型、不连续、多模态、不可分、比例缩放
WFG3	线性、退化、不可分、比例缩放
WFG4	凹型、多模态、比例缩放
WFG5	凹型、欺骗、比例缩放
WFG6	凹型、不可分、比例缩放
WFG7	凹型、有偏、比例缩放
WFG8	凹型、有偏、不可分、比例缩放
WFG9	凹型、有偏、多模态、欺骗、不可分

### 6.2 性能指标

为综合评估算法的收敛性和多样性, 这里采用两个常用的性能指标, 即超体积指标(Hypervolume, HV)<sup>[40]</sup> 和反转世代距离(Inverted Generational Distance, IGD)<sup>[41]</sup>. HV 和 IGD 是两个综合的性能指标, 它们都能同时度量近似解集的收敛性和多样性.

HV 指标通过计算目标空间中被非劣解集覆盖的区域大小来评估算法的性能. HV 指标也称为 Lebesgue 测度, 它在理论上具有良好的数学性质, 即在所有的一元指标中, HV 是一种能够判定非支配解集  $X$  不比另一个非支配解集  $Y$  要差的方法, 而且它可与 Pareto 关系保持一致. 对于一个近似 Pareto 前沿  $A$  而言, 其 HV 值的计算公式为

$$HV(A) = \Lambda \left( \bigcup_{p \in A} \{x \mid p > x > x_{ref}\} \right) \quad (5)$$

式(5)中,  $\Lambda$  为 Lebesgue 测度,  $x_{ref}$  为参照点. 对于 2-目标优化问题, HV 是坐标区域的面积; 对于 3-目标优化问题, HV 是三维空间构成的体积; 对于 3 维以上目标的优化问题, HV 表示超体值. 通常, HV 的值越大, 解集的质量越高, 亦即算法的收敛性与多样性等综合性能越好.

IGD 指标度量了真实的 Pareto 前沿到所获近似 Pareto 前沿之间的距离. 由于实验中采用的 DTLZ 和 WFG 系列测试问题的真实 Pareto 前沿是已知的, 通过在真实 Pareto 前沿上均匀采样多样性的点, 计算这些采样点到近似 Pareto 解点之间的距离则既能反映解集的收敛性又能反映多样性. 一般而言, IGD 指标值越小, 表明近似 Pareto 前沿的收敛性和多样性越好. 假设  $P$  是 MOP 问题真实 Pareto 解集, IGD 性能指标可利用式(6)进行计算:

$$IGD(A, P) = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} Dist_i \quad (6)$$

其中,  $Dist_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{m=1}^M \left( \frac{f_m(p_i) - f_m(a_j)}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \right)^2}$  为归一化后的最小欧氏距离; 和  $f_m^{\min}$  分别表示集合  $P$  在第  $m$  个目标上获得的最大值和最小值;  $p_i \in P, i=1, 2, \dots, |P|, a_j \in A, j=1, 2, \dots, |A|$ . 实验对各测试函数采样 10000 个均匀分布的 Pareto 最优解点作为真实 Pareto 前沿的近似来计算 IGD 值.

### 6.3 统计方法

为减少随机因素对性能评估的影响, 实验中各算法在每一个测试实例中均独立执行 30 次(每次使用不同的随机数种子)以获得性能指标(IGD 或 HV)的均值和方差. 另外, 实验利用显著水平为

0.05 的 Wilcoxon 秩和检验来分析各算法获得近似解集的性能在统计意义上的差异。

#### 6.4 实验环境

本文所有的实验均在 ThinkPad E565 电脑上运行, 电脑的配置如下: (1) CPU: AMD A10-8700P; (2) 1.8GHz 主频; (3) 8.0GB 内存; (4) Windows 7 X64 位操作系统, 所有算法均在 PlatEMO 平台<sup>[42]</sup>上实现。

#### 6.5 实验参数设置

为公平比较起见, 不同算法在相同测试实例上执行相同的评估次数 (Evaluation Number, EN), 各算法在不同测试实例上的执行代数 ( $T$ ) 则取决于设置的评估次数和种群规模 ( $N$ ), 且满足  $T = EN/N$ 。实验中的各算法利用仿二进制交叉 (SBX) 和多项式变异 (PM) 产生新个体。实验对于不同算法共同的参数取相同的值, 而各算法特定的参数则根据其原始文献中建议值设置。表 2 为实验中的算法所使用 SBX 交叉和 PM 变异算子的参数设置, 而其他一些参数的取值将在相应的实验方案中说明。

表 2 实验中交叉和变异算子的参数设置

参数	取值
种群规模 ( $N$ )	100
SBX 交叉的概率 ( $p_c$ )	1.0
SBX 交叉的分布指数 ( $\eta_c$ )	20
PM 的变异概率 ( $p_m$ )	$1/n$ ( $n$ 为决策变量数目)
PM 的分布指数 ( $\eta_m$ )	20

#### 6.6 实验结果与分析

**实验 1.** 为获得高维多目标优化中基于  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 的拥挤距离度量方法中参数  $p$  的合适取值, 这里测试 DAV-MOEA 算法采用不同  $p$  值的  $L_p$ -范式 (如  $p = 1/M$ ,  $p = 2/M$ ,  $p = 2$ ,  $p = 1$ ,  $p =$

$0.75$ ,  $p = 0.5$ ,  $p = 0.25$  和  $p = 0.1$ ,  $M$  为目标数) 的距离度量方法在 5-、8-和 10-目标的 DTLZ1 ~ DTLZ4 和 DTLZ7 等 15 个测试实例上获得的 IGD 均值。实验中对采用不同  $p$  值的 DAV-MOEA 算法的种群规模均设为 100, 而算法在 5-、8-和 10-目标 DTLZ 问题上的评估次数分别均设为 10 000、30 000 和 50 000, 其所采用的交叉和变异算子的参数值如表 2 所示。

表 3 给出了采用不同  $p$  值 ( $p < 1$ ) 的  $L_p$ -范式拥挤距离度量方法的 DAV-MOEA 算法在 15 个 DTLZ 测试实例上获得的 IGD 均值, 其中单元格括号内的数字表示算法在相应的测试实例和  $p$  值的组合下所获得的 IGD 均值的排名 (数字越小, 排名越靠前), 表内每一行的最好值用粗体突显 (下同)。

从表 3 可以看出, 当  $p = 1/M$ , DAV-MOEA 算法在 15 个 DTLZ 测试例中获得 10 个最佳的 IGD 均值; 当  $p$  取值 0.25 和 0.1 时, DAV-MOEA 算法在 15 个测试例中分别获得 3 个和 2 个最佳的 IGD 均值; 而当  $p$  取  $2/M$ 、2、1、0.75 和 0.5 时, DAV-MOEA 算法在 15 个测试例中无一能取得最佳的 IGD 均值。另外, 从  $Sum/Rank$  的结果来看, 当  $p = 1/M$  时, DAV-MOEA 算法在所有 15 个测试例中获得的总序值之和为 20, 它在 8 种不同的  $p$  值情形下的获得的成绩总体排名第 1; 总体排名第 2 至第 8 的算法对应的  $p$  值依次为 0.25, 0.1,  $2/M$ , 0.5, 0.75, 1 和 2。实验 1 表明采用  $p = 1/M$  的  $L_p$ -范式拥挤距离度量可使算法获得显著较优的 IGD 均值, 而且使算法在不同目标数目的 MaOP 问题中表现鲁棒。鉴于此, 后面实验将  $p$  统一取值为  $1/M$ 。另外, 由于  $M$  表示待解问题的目标数, 因此该方法未引入额外参数, 便于使用。

表 3 采用不同  $p$  值 ( $p < 1$ ) 的  $L_p$ -范式拥挤距离的 DAV-MOEA 算法在 15 个 DTLZ 测试例上获得的 IGD 均值与排名

测试问题 ( $M$ )	$p = 1/M$	$p = 2/M$	$p = 2$	$p = 1$	$p = 0.75$	$p = 0.5$	$p = 0.25$	$p = 0.1$
DTLZ1(5)	<b>0.1316(1)</b>	0.1411(3)	0.1542(7)	0.1488(6)	0.1375(2)	0.1578(8)	0.1457(5)	0.1416(4)
DTLZ1(8)	<b>0.2095(1)</b>	0.2203(3)	0.2758(7)	0.2912(8)	0.2584(6)	0.2489(5)	0.2171(2)	0.2236(4)
DTLZ1(10)	<b>0.2509(1)</b>	0.2728(4)	0.3893(8)	0.35287(7)	0.3356(6)	0.2864(5)	0.2721(3)	0.2565(2)
DTLZ2(5)	<b>0.2106(1)</b>	0.2192(3)	0.2303(5)	0.2451(8)	0.2351(7)	0.2296(4)	0.2124(2)	0.2344(6)
DTLZ2(8)	<b>0.3793(1)</b>	0.4064(2)	0.4314(6)	0.4462(8)	0.4366(7)	0.4297(5)	0.4152(4)	0.4048(3)
DTLZ2(10)	<b>0.4784(1)</b>	0.5047(3)	0.5561(8)	0.5335(7)	0.5269(6)	0.5249(5)	0.5147(4)	0.4913(2)
DTLZ3(5)	0.2496(2)	0.2526(3)	0.2914(8)	0.2422(7)	0.2778(6)	0.2723(5)	<b>0.2479(1)</b>	0.2674(4)
DTLZ3(8)	0.4491(2)	0.4797(4)	0.4965(7)	0.5016(8)	0.4904(6)	0.4842(5)	0.4729(3)	<b>0.4515(1)</b>
DLZ3(10)	<b>0.5487(1)</b>	0.5848(5)	0.5966(7)	0.5903(6)	0.6102(8)	0.5732(4)	0.5678(3)	0.5611(2)
DTLZ4(5)	0.2688(2)	0.2815(4)	0.3012(8)	0.2947(7)	0.2903(6)	0.2844(5)	<b>0.2645(1)</b>	0.2756(3)
DTLZ4(8)	<b>0.3712(1)</b>	0.3943(4)	0.4719(8)	0.4525(7)	0.4063(6)	0.3987(5)	0.3832(2)	0.3841(3)
DTLZ4(10)	<b>0.4609(1)</b>	0.4889(3)	0.5387(8)	0.5256(7)	0.5135(6)	0.5013(5)	0.4955(4)	0.4782(2)
DTLZ7(5)	<b>0.2973(1)</b>	0.3981(3)	0.4369(7)	0.4427(8)	0.4212(5)	0.4296(6)	0.3184(2)	0.4068(4)
DTLZ7(8)	0.7282(2)	0.7343(3)	0.7955(8)	0.7815(7)	0.7667(6)	0.7586(5)	<b>0.70181(1)</b>	0.7454(4)
DTLZ7(10)	1.0128(2)	1.1415(3)	1.7613(8)	1.6081(7)	1.3514(5)	1.4377(6)	1.2519(4)	<b>0.9814(1)</b>
Sum/Rank	20/1	53/4	110/8	108/7	88/6	78/5	41/2	45/3

**实验 2.** 为验证 DAV 支配在高维多目标优化中的有效性,这里将 DAV 支配和几种代表性的改进的支配关系,如 S-CDAS<sup>[14]</sup>、grid 支配<sup>[15]</sup>、 $\theta$ -支配<sup>[22]</sup>、SDR 支配<sup>[3]</sup>和 AD 支配<sup>[27]</sup>,分别嵌入到简单的进化算法框架中,并由此构造出 6 种简单的高维多目标进化算法.此外,为消除进化算法中其他的选择机制对支配选择的影响,6 种算法均仅利用支配关系进行环境选择.具体地,各算法在每一代随机选择父代个体,并利用相同的遗传算子产生规模为  $N$  的子代,随后将子代和父代合并,获得规模为  $2N$  的合并种群.随后,各算法仅使用它们所采用的支配关系对合并种群执行非支配排序,而后进行环境选择以产生下一代种群.如果出现所获得的非支配个体数目大于种群规模的情形,则采用随机截断的方法剔除部分个体,以保持种群规模不变.

由于  $\theta$ -支配采用两层方法生成一定数量的权重向量<sup>[31-33]</sup>,因此采用  $\theta$ -支配的算法的种群规模不能任意设置.为公平和一致起见,其余 5 种算法的种群规模均与利用  $\theta$ -支配的算法保持一致.具体地,6 种算法在 5-目标、8-目标和 10-目标的 DTLZ 问题上种群规模分别设为 212、156 和 276,而评估次数分别设为 20 000、30 000 和 50 000.各算法的 SBX 交叉和 PM 变异算子的参数取值如表 2 所示.另外,对于

其他改进的支配关系,其特定的参数则按照相应文献中的建议值进行设置,如 CDAS 中  $S$  参数设为 0.39; grid 支配中  $div$  参数设为 5;  $\theta$ -支配的  $\theta$  值在目标轴方向上设置为  $10^6$ ,其余情况设为 5; AD 中的参数  $k$  设为 50.

表 4 给出了 6 种嵌入不同支配关系的进化算法在 5-、8-和 10-目标的 DTLZ 系列测试问题上所获得的 IGD 均值与方差.从表 4 可知,在全部 15 个 DTLZ 测试例中,使用 DAV 支配的进化算法获得 8 个最佳的 IGD 均值,采用  $\theta$ -支配的算法获得 4 个最佳的 IGD 均值,利用 SDR 支配的算法获得 3 个最佳的 IGD 均值.另外,从表 4 的 Wilcoxon 秩和检验的结果来看,采用 DAV 支配的进化算法的性能要显著地优于使用其他支配关系的进化算法.比如,从净胜得分(即用劣于的数目减去优于的数目)来看,DAV 支配相对于 S-CDAS、grid 支配、 $\theta$ -支配、SDR 支配和 AD 支配所获得的净胜得分分别为 4、3、5、7 和 10.由此可见,DAV 支配相比其他几种改进的支配关系,其具有显著较优的收敛性和多样性之能力.究其原因,DAV 支配在进化过程中能动态地计算各个体的角度向量,而动态角度向量可自适应地刻画个体在目标空间中的分布情况,从而使算法能够更好地平衡收敛性与分布性.

表 4 六种使用不同支配关系的进化算法在三种不同目标维度的 DTLZ 问题集上获得的 IGD 均值与方差

测试问题(M)	S-CDAS	grid 支配	$\theta$ -支配	SDR 支配	AD 支配	DAV 支配
DTLZ1(5)	0.0741±0.0196=	7.0174±0.8410-	<b>0.0559±0.0094=</b>	0.0569±0.0016=	0.0988±0.0254=	0.0638±0.0148
DTLZ1(8)	0.2016±0.0913-	6.4171±0.7014-	0.0968±0.0143=	0.8175±0.0359-	0.1787±0.0157-	<b>0.0842±0.0015</b>
DTLZ1(10)	0.1562±0.0301=	5.8293±0.4410-	0.1251±0.0184-	1.1303±0.2655-	0.2545±0.1173-	<b>0.1158±0.0233</b>
DTLZ2(5)	1.1418±0.1468-	0.9712±0.0168-	<b>0.1281±0.0212+</b>	0.2231±0.0203-	0.3058±0.0302=	0.2421±0.0189
DTLZ2(8)	1.3014±0.2749-	1.1446±0.0251-	<b>0.2316±0.0451+</b>	0.3982±0.0344=	0.4375±0.0418=	0.3692±0.0271
DTLZ2(10)	1.4507±0.1426-	1.3843±0.0266-	<b>0.3469±0.0404=</b>	0.4887±0.0397=	0.5651±0.0569=	0.4917±0.0454
DTLZ3(5)	5.4662±0.7598-	46.542±5.4016-	2.3005±0.3248-	0.2636±0.0199=	0.6484±0.0598=	<b>0.2574±0.0166</b>
DTLZ3(8)	20.351±2.3017-	48.943±6.0621-	2.1567±0.2987-	0.4201±0.0334=	2.2750±0.2045=	<b>0.3821±0.0287</b>
DTLZ3(10)	31.753±3.4872-	51.548±5.8148-	1.9376±0.1543-	0.4915±0.0384=	4.5119±0.4414=	<b>0.4895±0.0392</b>
DTLZ4(5)	0.8116±0.0551=	0.8067±0.0475=	0.4855±0.0424=	<b>0.1928±0.0188+</b>	0.3613±0.3982=	0.4958±0.0468
DTLZ4(8)	1.2973±0.1446-	0.8339±0.0339=	0.5093±0.0536=	<b>0.3641±0.0274+</b>	0.4957±0.0331=	0.5116±0.0472
DTLZ4(10)	1.5212±0.2175-	0.8647±0.0404=	0.5201±0.0784=	<b>0.4519±0.0355=</b>	0.6339±0.0526=	0.5373±0.0556
DTLZ7(5)	0.4246±0.0157=	2.2774±0.5882-	0.3687±0.0452=	0.5672±0.0436=	3.0104±0.3307-	<b>0.3649±0.0741</b>
DTLZ7(8)	1.8915±0.4072-	2.7499±0.4584-	1.6418±0.1507-	0.8755±0.0921-	4.4846±0.5887-	<b>0.3647±0.0133</b>
DTLZ7(10)	3.4148±0.7833-	3.0351±0.6613-	2.8144±0.2646-	2.3604±0.2417-	5.7110±0.6683-	<b>0.2915±0.0149</b>
+/-/≈	0/4/11	0/3/12	2/7/6	2/9/4	0/10/5	/

注:“+”、“-”和“≈”分别表示该结果显著地优于、劣于和统计上无差别于嵌入 DAV 支配的算法所获得的结果.

为直观表示算法的求解结果,图 3 给出了 6 种算法在 5-目标的 DTLZ7 问题(简记为 DTLZ7(5))上所获非支配解集的平行坐标.其中,这里的非支配解集是各算法在 30 次运行中所获得的最接近于 IGD 均值的近似解集.

从图 3 可以看出,S-CDAS、 $\theta$ -支配、SDR 支配、

DAV 支配和 AD 支配在 5-目标的 DTLZ7 测试实例上获得的解群的收敛性和分布性均较好,而 grid 支配在该测试实例上表现出较差的收敛性和多样性.究其原因,S-CDAS、 $\theta$ -支配、SDR 支配、DAV 支配和 AD 支配在设计过程中已考虑到解群的收敛性与多样性方面的性能,而 grid 支配以个体为中心的

网格计算方式却难以保证种群收敛。

进一步地,图 4 给出了上述 6 种算法在 10-目标的 DTLZ3 问题(简记为 DTLZ3(10))上所获的非支

配解集的平行坐标. 同样,这里的非支配解集亦是各算法在 30 次运行中获得的最接近于 IGD 均值的近似解集.

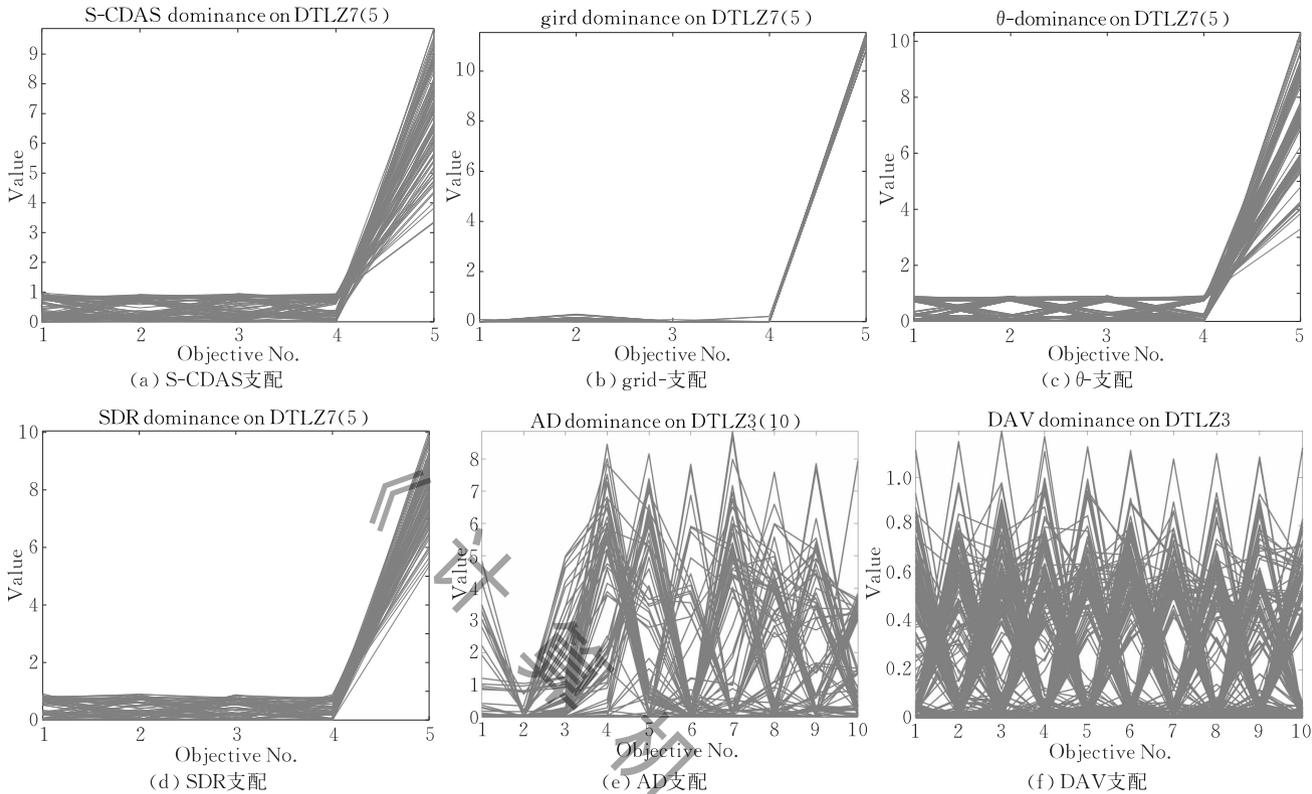


图 3 六种基于不同支配关系的简单进化算法在 DTLZ7(5)上所获最接近于 IGD 均值的近似解集的平行坐标

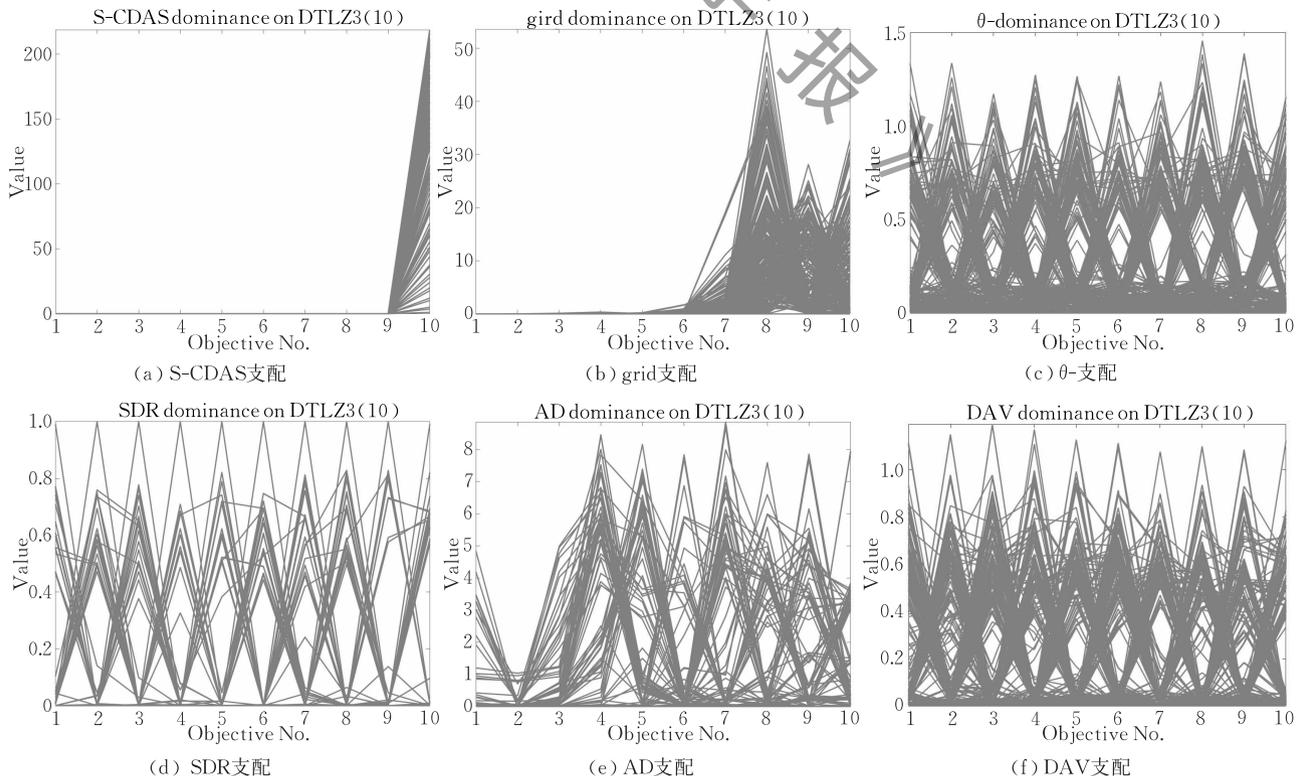


图 4 六种利用不同支配关系的算法在 DTLZ3(10)上所获最接近于 IGD 均值的近似解集的平行坐标

从图 4 可以看出, DAV 支配、 $\theta$ -支配、SDR 支配和 AD 支配在 10-目标 DTLZ3 问题上获得了具有较好收敛性与多样性的解集, 而 grid 支配和 S-CDAS 支配则表现较差, 特别是 S-CDAS 在该测试实例的前 9 个目标上多样性差, grid 支配则在该测试实例的前 6 个目标上多样性差. 图 4 所示的各近似解集的直观结果与表 4 的结果是相吻合的, 它们都表明 DAV 支配在求解 MaOP 问题时能较好地平衡收敛性和多样性, 相比其他改进的支配关系, DAV 支配较适于求解 MaOP 问题.

**实验 3.** 为检验 SHND- $L_p$  度量方法在保持高维目标解群多样性方面的性能, 这里设计将 SHND- $L_p$  ( $p=1/M$ ) 方法与 SHND 方法<sup>[28]</sup> 以及 HAD 方法<sup>[29]</sup> 一同在 DTLZ 系列问题上进行 IGD

性能比较. 实验方案如下: 将 SHND- $L_{1/M}$ 、SHND 和 HAD 三种拥挤距离度量方法分别嵌入 NSGA-II 算法框架内以替代其原有的拥挤距离度量方法, 而保持算法的其他部分不变, 并由此构造出 NSGA-II/SHND- $L_{1/M}$ 、NSGA-II/SHND 和 NSGA-II/HAD 三个 NSGA-II 算法的变种. 新构造的三个算法在 5-、8-和 10-目标的 DTLZ1-4 和 DTLZ7 这 15 个 MaOP 问题测试实例上进行实验. 实验中各算法的种群规模均设为 100; 对于 5-、8-和 10-目标的 DTLZ 系列问题, 其所需的评估次数分别设为 10 000、20 000 和 50 000. 各算法 SBX 交叉与 PM 变异算子的参数设置同表 2. 表 5 给出了三个算法在 15 个 DTLZ 问题实例上所获得的 IGD 均值与方差.

表 5 三种采用不同拥挤距离度量方法的 NSGA-II 算法变种在 DTLZ 测试实例上获得的 IGD 均值与方差

测试问题( $M$ )	NSGA-II/HAD	NSGA-II/SHND	NSGA-II/SHND- $L_{1/M}$
DTLZ1(5)	0.1209±0.00717=	<b>0.0601±0.00365+</b>	0.0963±0.0108
DTLZ1(8)	0.5804±0.0397-	0.4201±0.0337-	<b>0.1751±0.0168</b>
DTLZ1(10)	5.6836±0.5661-	4.3411±0.5352-	<b>1.9562±0.8714</b>
DTLZ2(5)	0.2661±0.0101=	<b>0.2125±0.0021=</b>	0.2290±0.0075
DTLZ2(8)	0.2940±0.0259-	<b>0.1958±0.0074=</b>	0.1998±0.0333
DTLZ2(10)	0.5928±0.0220-	0.4474±0.0633=	<b>0.3423±0.0596</b>
DTLZ3(5)	0.4947±0.4131-	<b>0.2142±0.0019=</b>	0.2303±0.0052
DTLZ3(8)	1.2558±0.7512-	1.3139±0.9291-	<b>0.58401±0.4531</b>
DTLZ3(10)	18.660±1.018-	8.1383±0.2341-	<b>4.0341±0.2396</b>
DTLZ4(5)	<b>0.2134±0.0048+</b>	0.2630±0.0348+	0.7926±0.0015
DTLZ4(8)	<b>0.3266±0.0057+</b>	0.3743±0.1359+	0.9228±0.0518
DTLZ4(10)	0.6118±0.0747=	0.677±0.00155=	<b>0.6068±0.0551</b>
DTLZ7(5)	0.3781±0.0129=	<b>0.3667±0.0162=</b>	0.3866±0.0205
DTLZ7(8)	0.5459±0.0764=	0.5373±0.0129=	<b>0.4984±0.026</b>
DTLZ7(10)	0.7459±0.0542-	0.6832±0.0831=	<b>0.5818±0.0162</b>
+/-/≈	2/8/5	3/4/8	/

注: “+”、“-”和“≈”分别表示该结果显著地优于、劣于和统计上无差别于 NSGA-II/SHND- $L_{1/M}$  算法所获得的结果.

从表 5 可知, NSGA-II/SHND- $L_{1/M}$  算法在全部 15 个 DTLZ 问题实例上获得了 8 个最佳的 IGD 均值, 随后是 NSGA-II/SHND 算法获得了 5 个最佳的 IGD 均值, NSGA-II/HAD 算法仅获得 2 个最佳的 IGD 均值. 另外, 从 Wilcoxon 秩和检验的结果来看, NSGA-II/SHND- $L_{1/M}$  相对于 NSGA-II/HAD 和 NSGA-II/SHND 算法, 其获得的净胜得分分别为 6 和 1. 由此可知, SHND- $L_{1/M}$  拥挤距离度量方法能够获得颇具竞争力的多样性保持能力. 究其原因: 一方面, SHND- $L_{1/M}$  方法仅考虑少数目的邻域个体参与拥挤距离的计算, 一定程度上减少了计算资源的耗费; 另一方面, SHND- $L_{1/M}$  方法采用了归一化和差异放大化策略使得其能更细粒度地度量解个体的拥挤程度. 上述因素使得 SHND- $L_{1/M}$  方法有利于获得较好的多样性保持能力.

**实验 4.** 为验证 DAV-MOEA 算法的有效性,

这里将 DAV-MOEA 与 5 种高效的高维多目标进化算法 RVEA、NSGA-III、MOEA/DD、MOMBI-II 和 Two-Arch2 等一同在 DTLZ 和 WFG 系列测试问题上进行 IGD 和 HV 性能的比较. 由于 RVEA<sup>[30]</sup>、NSGA-III<sup>[31]</sup>、MOEA/DD<sup>[32]</sup> 和 MOMBI-II<sup>[33]</sup> 算法利用两层生成方法产生一定数量的权重向量, 故种群规模要与权重向量的数目保持一致. 这里对各算法种群规模和评估次数设置如下: 对于 5-目标、8-目标和 10-目标的 DTLZ 测试问题, 各算法的种群规模分别依次设为 212、156 和 276, 评估次数分别依次设为 30 000、50 000 和 80 000. DAV-MOEA、MOMBI-II<sup>[33]</sup> 和 Two-Arch2<sup>[34]</sup> 算法的 SBX 交叉和 PM 变异算子的参数全部按表 2 进行设置, 而 RVEA、NSGA-III 和 MOEA/DD 算法的交叉和变异算子中的参数中除交叉分布指数  $\eta_c$  取值 30 之外, 其余参数的取值按表 2 设置. 各对比算法所特有的参数按相

应文献的建议值设置,如(1)在 MOEA/DD 中,邻域的规模  $T$  设为  $[0, 1N]$ ,邻域选择概率  $\delta$  设为 0.9,被子代替换的最大数目  $n_r$  设为  $\lceil 0.01N \rceil$ ,其中  $N$  为种群的规模;(2)在 RVEA 中,APD 中的惩罚参数  $\alpha$  设为 2,控制参考向量调整频度的参数  $f_r$  设为 0.1;(3)MOMBI-II 中,变化阈值  $\alpha$  设为 0.5,容差阈值  $\epsilon$

设为 0.001,极差点的记录大小设为 5;以及(4)在 Two-Arch2 中,多样性档案设为与种群同等规模,收敛性档案的容量设为 100.表 6 给出了六种算法在 5-目标、8-目标和 10-目标的 DTLZ 系列测试问题上获得的 IGD 均值和方差.

表 6 六种算法在三种目标维度的 DTLZ 系列测试实例上获得的 IGD 均值与方差

测试问题(M)	RVEA	NSGA-III	MOEA/DD	MOMBI-II	Two-Arch2	DAV-MOEA
DTLZ1(5)	8.2063±1.4412-	13.899±5.0417-	11.418±1.6025-	<b>85.399±9.8351=</b>	177.23±36.051-	87.531±1.3757
DTLZ1(8)	6.9366±1.4323=	14.877±2.4427-	68.9161±7.1071=	5.3352±11.745=	169.78±16.587-	<b>49.652±1.4154</b>
DTLZ1(10)	5.6799±7.4014=	19.1401±4.3255-	71.8492±6.6154=	81.416±1.4653-	281.95±65.821-	<b>60.322±6.6173</b>
DTLZ2(5)	0.2788±4.0557-	0.3133±0.0192-	0.2452±0.0154-	0.2481±0.07612-	0.3685±0.014-	<b>0.1068±0.0697</b>
DTLZ2(8)	<b>0.3227±1.4755+</b>	0.4423±0.0974+	0.3791±0.0208+	0.4341±0.0127+	0.6777±0.0395=	0.5532±0.0433
DTLZ2(10)	0.5331±8.7278+	0.7776±0.0828+	<b>0.5106±0.0324+</b>	0.5364±0.0339+	0.7833±0.0976+	0.9311±0.0437
DTLZ3(5)	483.452±74.147-	543.675±69.151-	427.53±13.145-	242.61±7.1688=	551.48±45.757-	<b>238.16±0.2921</b>
DTLZ3(8)	325.282±91.157=	436.694±27.771-	250.45±39.723=	<b>175.63±25.787+</b>	587.83±82.851-	312.61±0.4142
DTLZ3(10)	353.695±20.481=	819.223±51.341-	299.39±40.578=	<b>248.65±22.474+</b>	660.62±14.478-	334.65±0.6716
DTLZ4(5)	0.2956±2.8924-	0.3521±0.0217-	0.2733±0.03131-	0.31336±0.0175-	0.3898±0.0523-	<b>0.0923±0.0521</b>
DTLZ4(8)	0.4010±0.1375=	0.6093±0.1645-	0.4081±0.0204=	0.3919±0.0157=	0.6101±0.4942-	<b>0.3108±0.0418</b>
DTLZ4(10)	0.5843±0.1934=	0.8834±0.2952-	0.5962±0.0207=	0.4953±0.0793=	0.8696±0.0279-	<b>0.4193±0.0453</b>
DTLZ7(5)	0.9144±0.1486=	0.8940±0.3102=	2.1437±0.0296-	<b>0.4609±0.1139+</b>	2.1993±0.1242-	0.7144±0.0679
DTLZ7(8)	1.9698±0.4619=	5.2404±1.2781=	1.3969±0.0385=	5.5573±1.6751-	6.8687±0.1738-	<b>1.2331±0.4112</b>
DTLZ7(10)	5.7556±3.7647-	14.0731±1.4547-	1.4231±0.0275=	9.8971±2.4324-	17.092±0.5082-	<b>1.3761±0.4325</b>
+/-/≈	2/5/8	2/12/3	2/5/8	5/5/5	1/13/1	/

注:“+”、“-”和“≈”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 DAV-MOEA 算法所获得的结果.

从表 6 可以看出,在 15 个 DTLZ 测试实例上,DAV-MOEA 算法在 9 个测试实例上获得了最好的 IGD 均值,MOMBI-II 在 4 个测试实例上获得了最佳的 IGD 均值,MOEA/DD 和 RVEA 仅在 1 个测试实例上获得最佳的 IGD 均值,而 NSGA-II 和 Two-Arch2 无一能获得最佳的 IGD 均值.从表 6 的 Wilcoxon 秩和检验的结果来看,DAV-MOEA 算法相比 RVEA、NSGA-III、MOEA/DD、MOMBI-II 和 Two-Arch2,分别获得的净胜得分为 3、10、3、0 和 12,由此表明 DAV-MOEA 算法在求解 DTLZ 系列测试问题时具有显著较优的性能.究其原因,DAV-MOEA 算法利用 DAV 支配关系进行配对选择和环境选择,而且在环境选择中采用基于  $p_{1/M}$ -范式拥挤距离度量各非支配层上个体的拥挤程度,摒弃了目前广泛使用的基于欧氏距离的度量方法,从而使 DAV-MOEA 算法能够在高维目标空间中更有效地度量解个体之间的分布,从而获得较为合理的拥挤度评估.上述几种策略在算法寻优过程中相互协同、共同作用,显著提高了 DAV-MOEA 算法求解复杂 MaOP 问题的性能.

表 7 为六种算法在 5-目标、8-目标和 10-目标的 WFG1-WFG9 测试问题上获得的 HV 均值和方差.需要说明的是,这里计算 HV 值所使用的参考点  $r$  设置为  $(1.1 \times \mathbf{Z}^{nad})$ ,这里  $\mathbf{Z}^{nad}$  表示 MaOP 问题的

最低点.

从表 7 可以看出,在 27 个 WFG 测试例中,DAV-MOEA 算法在 12 个测试例上获得了最佳的 HV 均值,MOMBI-II 算法在 8 个测试例上获得了最佳的 HV 均值,而 NSGA-III、RVEA、MOEA/DD 和 Two-Arch2 分别在 3 个、2 个、1 个和 1 个测试例上获得最佳的 HV 均值.从表 7 的 Wilcoxon 秩和检验的结果来看,DAV-MOEA 算法相较于 RVEA、NSGA-III、MOEA/DD、MOMBI-II、Two-Arch2 算法,它获得的净胜得分则分别为 4、-1、10、7 和 15.由此表明,DAV-MOEA 算法相比其他几种经典的高维多目标进化算法而具有显著较优的 HV 性能.

综合表 6 和表 7 来看,DAV-MOEA 算法相比一些代表性的高维多目标进化算法,它能够在具有多种不同难度特征的基准 MaOP 测试例上获得显著较优的性能.究其原因,DAV-MOEA 算法利用 DAV 支配关系进行配对选择和环境选择,而且在环境选择的过程中采用基于  $p_{1/M}$ -范式度量各非支配层上个体的拥挤距离,摒弃了目前广泛使用的基于欧氏距离的度量方法,从而使得 DAV-MOEA 算法能够在高维目标空间中更有效地度量解个体之间的距离,从而获得较合理的拥挤度度量.以上几种策略在算法进化过程中相互协同、共同作用,显著地提高了 DAV-MOEA 算法求解复杂 MaOP 问题的性能.

表 7 六种算法在三种目标维度的 WFG 系列测试问题上获得的 HV 均值与方差

测试问题(M)	RVEA	NSGA-III	MOEA/DD	MOMBI-II	Two-Arch2	DAV-MOEA
WFG1(5)	0.3016±0.0221-	0.3039±0.0443-	0.2775±0.0174-	0.3085±0.0135-	0.3003±0.0182-	<b>0.4124±0.0635</b>
WFG1(8)	0.2507±0.0704-	0.2524±0.0290-	0.2383±0.0115-	0.3426±0.0485=	0.2515±0.0195-	<b>0.3895±0.0745</b>
WFG1(10)	0.2256±0.0102=	0.2259±0.0562=	0.2170±0.0467=	<b>0.2487±0.0162=</b>	0.2244±0.0568=	0.2423±0.0413
WFG2(5)	0.8210±0.0165=	0.8331±0.0833=	0.8054±0.0182=	<b>0.9005±0.0342e=</b>	0.8082±0.0788=	0.8326±0.0776
WFG2(8)	0.8007±0.0204=	0.8506±0.0212=	0.8022±0.0163=	<b>0.9205±0.0248=</b>	0.81451±0.0189=	0.0832±0.0839
WFG2(10)	0.7860±0.0495=	<b>0.8187±0.0225+</b>	0.7543±0.0209=	0.7848±0.1073=	0.73342±0.0765=	0.7435±0.0201
WFG3(5)	0.6285±0.0344=	0.6323±0.0432=	0.5891±0.0316-	0.5514±0.0627-	0.5428±0.0231-	<b>0.6678±0.0172</b>
WFG3(8)	0.4012±0.0564-	0.6268±0.0351=	0.5268±0.0408-	0.2376±0.0433-	0.5175±0.0308-	<b>0.6373±0.0601</b>
WFG3(10)	0.2736±0.0737-	<b>0.6486±0.3149+</b>	0.4985±0.0131-	0.1980±0.0447-	0.3981±0.0447-	0.5951±0.0344
WFG4(5)	0.6387±0.0115+	0.6267±0.2164+	0.6084±0.0705=	0.5727±0.0362=	<b>0.6415±0.0413+</b>	0.5510±0.0556
WFG4(8)	0.6513±0.2134+	0.6458±0.0136+	<b>0.6564±0.0117+</b>	0.6508±0.0940+	0.6103±0.0425+	0.5646±0.0328
WFG4(10)	0.7054±0.0262=	0.6942±0.0537=	0.6534±0.0674=	<b>0.7355±0.0831=</b>	0.5493±0.0129=	0.5910±0.0623
WFG5(5)	<b>0.7692±0.0434=</b>	0.7102±0.0380=	0.7394±0.0145=	0.7197±0.0138=	0.7665±0.0236-	0.7477±0.0347
WFG5(8)	0.7747±0.0767=	0.7356±0.0767=	0.6972±0.0159-	0.7036±0.0439-	0.0655±0.0887-	<b>0.7890±0.0344</b>
WFG5(10)	0.7837±0.0437=	0.7543±0.0177-	0.6454±0.0237-	0.6915±0.0384-	0.5938±0.0766-	<b>0.8237±0.0520</b>
WFG6(5)	0.5213±0.0959=	0.5025±0.0735=	0.5266±0.0176=	0.4895±0.0244=	0.4195±0.0503-	<b>0.5290±0.0342</b>
WFG6(8)	0.5364±0.0182=	0.5944±0.0290=	0.5218±0.0268=	<b>0.7114±0.0229+</b>	0.3815±0.0982-	0.5920±0.0637
WFG6(10)	0.4944±0.0269-	0.5023±0.0435-	0.4778±0.0953-	<b>0.6596±0.0301+</b>	0.3608±0.0260-	0.6710±0.0125
WFG7(5)	0.5262±0.0414=	<b>0.5858±0.0186=</b>	0.5529±0.0229=	0.5519±0.0530=	0.5123±0.0393=	0.5510±0.0516
WFG7(8)	0.5624±0.0405+	0.6050±0.0133+	0.5657±0.0122=	<b>0.7732±0.0132+</b>	0.46475±0.0376=	0.4897±0.0881
WFG7(10)	0.5636±0.0683+	0.6253±0.0301+	0.5313±0.0230+	<b>0.7435±0.0482+</b>	0.4571±0.0337=	0.4355±0.0537
WFG8(5)	<b>0.5414±0.0160=</b>	0.5294±0.0635=	0.5074±0.0507=	0.3813±0.0349-	0.0454±0.0498-	0.5322±0.0583
WFG8(8)	0.4849±0.0496-	0.5753±0.0250=	0.4933±0.0390-	0.3792±0.0147-	0.3838±0.0978-	<b>0.6196±0.0873</b>
WFG8(10)	0.5706±0.0396=	0.5477±0.0110=	0.4971±0.0472=	0.3629±0.0785-	0.3669±0.0114-	<b>0.6705±0.0735</b>
WFG9(5)	0.5008±0.0870=	0.5303±0.148=	0.4601±0.0189-	0.4013±0.0349-	0.4715±0.0249-	<b>0.5328±0.0116</b>
WFG9(8)	0.53313±0.0383-	0.5249±0.0498-	0.4015±0.0445-	0.3993±0.0147-	0.4365±0.0346-	<b>0.6091±0.0879</b>
WFG9(10)	0.4854±0.0377-	0.5054±0.0341=	0.4483±0.0190-	0.3829±0.0785-	0.3973±0.0287-	<b>0.5797±0.0678</b>
+/-/≈	4/8/15	6/5/16	2/12/13	5/12/10	2/17/8	/

注：“+”、“-”和“≈”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 DAV-MOEA 算法所获得的结果。

进一步地,为直观比较 RVEA、NSGA-III、MOEA/DD、MOMBI-II、Two-Arch2 和 DAV-MOEA 算法的收敛速度,这里以 10-目标的 DTLZ3 问题(简记为 DTLZ3(10))为测试实例,各算法在 DTLZ3(10)实例上均独立执行 30 次,每次运行所需的最大评估次数为 100,000,以获得较为稳定和可靠的 IGD 均值.图 5 为各算法在 DTLZ3(10)测试实例上获得的 IGD 均值随评估次数(EN)增长而变化的轨迹.

从图 5 可以看出,六种算法随评估次数 EN 的增大,它们所获得的 IGD 均值总体上表现出变小的趋势.但相对而言,DAV-MOEA 算法获得的 IGD 均值下降最快,其次是 RVEA 和 NSGA-III 算法,而且 RVEA 和 NSGA-III 经历起始阶段  $10^4$  次评估后,它们的 IGD 均值曲线的变化情况较为接近.随后是 MOMBI-II 和 MOEA/DD 算法,而 Two-Arch2 算法表现最差.一个有趣的现象是,六种算法在经历初始的  $10^4$  次评估后,它们的 IGD 均值能较快下降至一个相对较小的值,而在后续进化过程中,它们的 IGD 均值呈现出缓慢变小的趋势.由于 IGD 能够表征近似解集的收敛性和多样性,而且 IGD 值越小则表明算法获得的近似解集的质量越高.因此,图 5 中各算法所获得 IGD 曲线的轨迹直观地表明了 DAV-MOEA 算法较之其他几种算法而能较快地获得高质量的解集.

## 7 结 论

鉴于已有高维多目标进化算法在有效平衡收敛性和多样性方面尚存较大改善空间,论文提出一种

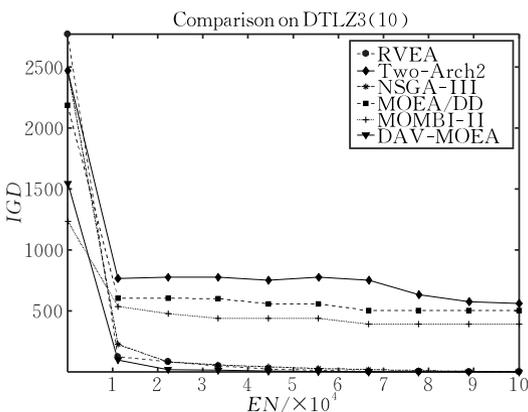


图 5 六种算法在 DTLZ3(10)测试实例上获得的 IGD 均值的变化曲线

动态角度向量支配关系 DAV 和一种基于  $L_p$ -范式 ( $p < 1$ ) 简化的 Harmonic 归一化距离度量方法 SHND- $L_p$ , 并分别将这两种策略嵌入到 NSGA-II 算法框架以设计出一种基于 DAV 支配关系的高维多目标进化算法 DAV-MOEA. 文章通过实验检验了 DAV 支配、SHND- $L_p$  度量和 DAV-MOEA 算法的有效性, 实验结果表明, DAV 支配关系、SHND- $L_p$  度量方法和 DAV-MOEA 算法较之其他对比的方法而具有显著较好的性能, 由此表明本文的算法是一种颇具前景的高维多目标进化算法. 未来将利用一些更加复杂的 MaOP 问题检验 DAV-MOEA 算法的性能, 以及利用 DAV-MOEA 算法求解一些现实应用中的 MaOP 问题, 并不断改进算法的性能.

**致 谢** 感谢匿名评审专家的中肯意见, 使得本文的质量得以提升!

### 参 考 文 献

- [1] Zhou A, Qu B, Li H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 32-49
- [2] Xie Cheng-Wang, Wang Zhi-Jie, Xia Xue-Wen. Multi-objective evolutionary algorithm based on archive-elite learning and opposition-based learning. *Chinese Journal of Computers*, 2017, 40(3): 757-772(in Chinese)  
(谢承旺, 王志杰, 夏学文. 应用档案精英学习和反向学习的多目标进化算法. *计算机学报*, 2017, 40(3): 757-772)
- [3] Tian Ye, Cheng Ran, Zhang Xingyi, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 331-345
- [4] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Computation*, 2002, 6(2): 182-197
- [5] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm//Giannakoglou K, Tsahalis D T, Periaux J, et al, eds. *Proceedings of the Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2002: 95-100
- [6] Corne D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization//*Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. San Francisco, USA, 2001: 283-290
- [7] Besada-Portas E, Torre L D L, Cruz J M D L, et al. Evolutionary trajectory planner for multiple UAVs in realistic scenarios. *IEEE Transactions on Robotics*, 2010, 26(4): 619-634
- [8] Cheng R, Rodemann T, Fischer M, et al. Evolutionary many-objective optimization of hybrid electric vehicle control: From general optimization to preference articulation. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2017, 1(2): 97-111
- [9] Tian Y, Wang H, Zhang X, Jin Y. Effectiveness and efficiency of non-dominated sorting for evolutionary multi- and many-objective optimization. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(4): 247-263
- [10] Purshouse R C, Fleming P J. On the evolutionary optimization of many conflicting objectives. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 770-784
- [11] Laumanns M, Thiele L, Deb K, Zitzler E. Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary Computation*, 2002, 10(3): 263-282
- [12] Batista L, Campelo F, Guimarães F, Ramirez J. Pareto cone  $\epsilon$ -dominance: Improved convergence and diversity in multiobjective evolutionary algorithms//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011: 76-90
- [13] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007: 5-20
- [14] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Self-controlling dominance area of solutions in evolutionary many-objective optimization//*Proceedings of the Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010: 455-465
- [15] Yang S, Li M, Liu X, Zheng J. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721-736
- [16] Farina M, Amato P. A fuzzy definition of "optimality" for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A Systems and Humans*, 2004, 34(3): 315-326
- [17] Drechsler N, Drechsler R, Becker B. Multi-objective optimization based on relation favor//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001: 154-166
- [18] Sulflow A, Drechsler N, Drechsler R. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007: 715-726
- [19] Zou X, Chen Y, Liu M, Kang L. A new evolutionary algorithm for solving many-objective problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 2008, 38(5): 1402-1412
- [20] Ikeda K, Kita H, Kobayashi S. Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal?//*Proceedings of the 2001 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Seoul, South Korea, 2001: 957-962

- [21] Zhu C, Xu L, Goodman E D. Generalization of Pareto-optimality for many-objective evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 299-315
- [22] Yuan Y, Xu H, Wang B, Yao X. A new dominance relation based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(1): 16-37
- [23] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A new decomposition-based NSGA-II for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics; Systems*, 2018, 48(7): 1191-1210
- [24] Chen Zhen-Xing, Yan Xuan-Hui, Wu Kun-An, Bai Meng. Many-objective optimization integrating open angle based congestion control strategy. *ACTA Automatica Sinica*, 2015, 41(6): 1145-1158(in Chinese)  
(陈振兴, 严宣辉, 吴坤安, 白猛. 融合张角拥挤控制策略的高维多目标优化. *自动化学报*, 2015, 41(6): 1145-1158)
- [25] Liu Y, Gong D, Sun J, Jin Y. A many-objective evolutionary algorithm using a one-by-one selection strategy. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2689-2702
- [26] Jiang S, Yang S. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329-346
- [27] Liu Y, Zhu N, Li K, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization. *Information Sciences*, 2020, 509: 376-399
- [28] Yu Wei-Wei, Xie Cheng-Wang, Bi Ying-Zhou, et al. Many-objective particle swarm optimization based on adaptive fuzzy dominance. *ACTA Automatica Sinica*, 2018, 44(12): 2278-2289(in Chinese)  
(余伟伟, 谢承旺, 闭应洲等. 一种基于自适应模糊支配的高维多目标粒子群算法. *自动化学报*, 2018, 44(12): 2278-2289)
- [29] Huang V L, Suganthan P N, Qin A K, Baskar S. Multiobjective differential evolution with external archive and harmonic distance-based diversity measure. *CiteSeerX*, 2008: 1-25
- [30] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, Sendhoff B. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791
- [31] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601
- [32] Li K, Deb K, Zhang Q, Kwong S. Combining dominance and decomposition in evolutionary many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(5): 694-716
- [33] Hernández Gómez R, Coello Coello C A. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization// *Proceedings of the 2015 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Madrid, Spain, 2015: 679-686
- [34] Wang H, Jiao L, Yao X. An improved two-archive algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 524-541
- [35] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable multi-objective optimization test problems// *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation(CEC'02)*. Zurich, Switzerland, 2002: 825-830
- [36] Huband S, Hingston P, Barone L, While L. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506
- [37] Clymont K M, Keedwell E. Deductive sort and climbing sort: New methods for non-dominated sorting. *Evolutionary Computation*, 2012, 20(1): 1-26
- [38] Zhang X, Tian Y, Cheng R, Jin Y. An efficient approach to non-dominated sorting for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(2): 201-213
- [39] Wang Rui, Zhang Qingfu, Zhang Tao. Decomposition-based algorithms using Pareto adaptive scalarizing methods. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(6): 821-837
- [40] While L, Hingston P, Barone L, Huband S. A faster algorithm for calculating hypervolume. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(1): 29-38
- [41] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117-132
- [42] Tian Y, Cheng R, Zhang X, Jin Y. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87

## 附 录.

根据 DAV 支配关系的定义, 不难证明其满足反自反、反对称、传递性和严格偏序关系之性质. 同样地, 对于相同世代的种群个体, 省略进化代数  $t$  的记号不会影响证明过程.

**性质 1.** 反自反. 对于当前种群  $P$  中的任意个体  $x$ , 其满足反自反性, 即  $x \not\prec_{\text{DAV}} x$ .

证明. 根据定义 12, 如果  $x \prec_{\text{DAV}} x$ , 则  $x$  的动态角度向

量中至少存在一个分量满足  $\theta_i^x < \theta_i^x$  ( $i=1, \dots, M$ ). 然而, 在  $x$  角度向量的各分量中并不存在  $\theta_i^x < \theta_i^x$ , 因此个体  $x$  并不能 DAV 支配它本身, 换言之, 个体  $x$  满足反自反性, 即  $x \not\prec_{\text{DAV}} x$  成立, 性质 1 得证. 证毕.

**性质 2.** 反对称. 假设  $x, y$  是当前种群  $P$  中任两个个

体,如果它们满足  $x \prec_{\text{DAV}} y$ ,则  $y \prec_{\text{DAV}} x$  成立.

证明. 由于  $x \prec_{\text{DAV}} y$ ,根据定义 12,对于任意的  $\theta_i^x$  和  $\theta_i^y$  ( $i=1, \dots, M$ ) 而言,存在  $\theta_i^x \leq \theta_i^y$ ,亦即不存在  $\theta_i^x > \theta_i^y$  的情形,因此根据定义 12,个体  $y$  不能 DAV 支配  $x$ ,亦即  $y \not\prec_{\text{DAV}} x$  成立,性质 2 得证. 证毕.

**性质 3.** 传递性. 假设  $x, y$  和  $z$  是当前种群  $P$  中三个个体,如果  $x \prec_{\text{DAV}} y$  且  $y \prec_{\text{DAV}} z$  则  $x \prec_{\text{DAV}} z$ .

证明. 由于  $x \prec_{\text{DAV}} y$ ,因此可得  $\forall i \in \{1, \dots, M\}: \theta_i^x \leq \theta_i^y \wedge \exists j \in \{1, \dots, M\}: \theta_j^y < \theta_j^z$ ,同样地,由于  $y \prec_{\text{DAV}} z$ ,因而

$\forall i \in \{1, \dots, M\}: \theta_i^x \leq \theta_i^z \wedge \exists j \in \{1, \dots, M\}$  成立. 由此可知,对于  $x$  和  $z$  的动态角度向量中的任意分量  $\theta_i^x$  和  $\theta_i^z$  而言,它们满足  $\theta_i^x \leq \theta_i^z$  ( $i=1, \dots, M$ );同时,至少存在一个分量  $\theta_i^z$ ,其满足  $\theta_i^z < \theta_i^x$ ,亦即  $x \prec_{\text{DAV}} z$  成立,性质 3 得证. 证毕.

**性质 4.** 严格偏序关系. DAV 支配关系定义了一种严格偏序关系.

证明. 根据前面的证明,表明 DAV 支配关系满足反自反、反对称和传递性之性质,因此,DAV 支配关系是一种建立在种群  $P$  上的严格偏序关系,性质 4 得证. 证毕.



**XIE Cheng-Wang**, Ph. D., professor.

His main research interest is intelligent computing.

**YU Wei-Wei**, Ph. D. candidate. His main research interests include intelligent computing and software

engineering.

**GUO Hua**, M. S. candidate. Her main research interest is intelligent computing.

**ZHANG Wei**, Ph. D., associate professor. His research interests include computational systems biology, complex networks and computational intelligence.

**ZHANG Qiong-Bing**, Ph. D., lecturer. His research interests include intelligence computation and intelligent information processing.

## Background

This research is supported in part by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61763010 and 61802125, in part by the Natural Science Foundation of Guangxi Province under Grant No. 2021GXNSFAA075011, in part by the Guangxi “BAGUI” Scholar Program, in part by the Natural Science Foundation of Jiangxi under Grant No. 20181BAB, in part by the Natural Science Foundation of Hunan Province Youth Project under Grant No. 2020JJ5202, in part by the Scientific Research Project of Education Department of Hunan Province under Grant No. 18C0331, and in part by the Innovation Project of Guangxi Graduate Education under Grant No. YCSW2020194.

In order to deal with the issue that the performance of most Pareto dominance based MOEAs suffering a serious curse of dimensionality in solving many-objective optimization problems (MaOPs), a variety of methods have been proposed to enhance Pareto dominance for solving MaOPs, which can be roughly divided into the following two categories. The first category focuses on developing new dominance relations, where the basic idea is to increase the probability that two candidate solutions are comparable on MaOPs. The second category is featured by combining Pareto dominance with additional selection criteria.

While the modified dominance relation can generate

relatively higher selection pressure for MOEAs than the conventional Pareto dominance relation, most of them fail to strike a good balance between convergence and diversity, which easily leads to a set of solutions concentrating on a small region of the Pareto fronts. Hence, in this paper we propose a dynamic angle vector based dominance relation (DAV) for MOEAs to solve MaOPs, which can better balance convergence and diversity than existing dominance relations. Furthermore, we design a dynamic angle vector based many-objective evolutionary algorithm (DAV-MOEA) by replacing Pareto dominance and  $L_2$ -norm based crowding distance measure with DAV and  $L_{1/M}$ -norm based simplified and normalized Harmonic crowding distance measure in NSGA-II framework. Extensive experiments show that the DAV and the DAV-MOEA are superior over other modified dominance relations and many-objective evolutionary algorithms, respectively.

Our project aims to optimize many-objective optimization problems, effectively and efficiently. Our team has proposed some effective multi-, and many-objective evolutionary algorithms for solving some complex MOPs and MaOPs, and has published many high-quality research papers in key journals such as Journal of Software and Chinese Journal of Computers.