

基于 Cauchy 分布的非下采样 Shearlet HMT 模型及其图像去噪应用

王相海^{1),2)} 朱毅欢¹⁾ 吕芳²⁾ 苏欣²⁾ 宋传鸣¹⁾

¹⁾(辽宁师范大学计算机与信息技术学院 辽宁 大连 116029)

²⁾(辽宁师范大学数学学院 辽宁 大连 116029)

摘 要 Shearlet 变换作为后小波时代的一个重要的多尺度几何分析工具具有良好的各向异性和方向捕捉性,同时它也可以对诸如图像等多维信号进行一种近最优的稀疏表示.非下采样 Shearlet 变换(NSST)在保持 Shearlet 变换特性的同时还具有平移不变特性,这在具有丰富纹理和细节信息的图像处理中发挥着重要作用.该文首先对图像 NSST 方向子带内系数的概率密度分布进行分析,获得系数的稀疏统计特性和 Cauchy 分布拟合子带内系数的有效性;其次对 NSST 方向子带间系数的联合概率分布进行分析,获得方向子带系数间所具有的持续和传递特性,确定了一种 NSST 子带间树形架构的系数对应关系,进而提出一种 NSST 域隐马尔可夫模树模型(C-NSST-HMT),该模型通过 Cauchy 分布来拟合 NSST 系数,更好地揭示图像 NSST 变换后相同尺度子带内和不同尺度子带间系数的相关性.进一步提出一种基于所提出 C-NSST-HMT 模型的图像去噪算法,该算法对于含噪声方差为 30 和 40 的噪声图像,其去噪后的 PSNR(Peak Signal to Noise Ratio)较 NSCT-HMT 方法分别提高了 1.995 dB 和 1.193 dB.特别对纹理和细节丰富的图像,该算法在去噪的同时,有效地保留了图像的几何信息.

关键词 非下采样 Shearlet 变换;隐马尔可夫树模型;NSST-HMT;Cauchy 分布;支持向量机;图像去噪

中图法分类号 TP391 **DOI 号** 10.11897/SP.J.1016.2018.02496

Cauchy Distribution NSST-HMT Model and Its Applications in Image Denoising

WANG Xiang-Hai^{1),2)} ZHU Yi-Huan¹⁾ LV Fang²⁾ SU Xin²⁾ SONG Chuan-Ming¹⁾

¹⁾(School of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029)

²⁾(School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029)

Abstract With the rapid development of science and technology, as the carrier of multimedia communication, the application of image in life becomes more and more extensive. Due to the external or in situ imaging system, the image produces a lot of noise during the transmission. These noises not only affect the visual effects of the image, but even change the content and quality of the image, which cause great interference in image segmentation, image retrieval, feature extraction and other subsequent digital image processing operations. The purpose of image denoising is to filter out the noise from the noise polluted image and get the original "pure" image, but it also need to ensure that the image of the internal edge and texture structure are not affected too much. In the past few years, the method of image denoising based on the wavelet transform has been concerned. However, although the wavelet transform represent the singular points of images very well, it can not capture the line singularity of the high dimensional signal and the abundant texture information and direction information in the image effectively. In order

收稿日期:2017-03-01;在线出版日期:2017-12-31. 本课题得到国家自然科学基金项目(41671439,61402214)、辽宁省高等学校创新团队支持计划(LT2017013)资助. 王相海,男,1965年生,博士,教授,博士生导师,中国计算机学会(CCF)高级会员,主要研究领域为计算机图形学、图像及多媒体信息处理. E-mail: xhwang@lnnu.edu.cn. 朱毅欢,男,1992年生,硕士研究生,主要研究方向为图像处理. 吕芳,女,1993年生,硕士研究生,主要研究方向为智能图像信息处理. 苏欣,男,1988年生,硕士,主要研究方向为交通图像处理. 宋传鸣(通信作者),男,1980年生,博士,副教授,主要研究方向为图像及视频信息处理、多媒体数字水印技术.

to overcome the above weakness of wavelet transform, other multi-scale analysis tools, for instance Shearlet transform, Bandelet transform, Ridgelet transform, Curvelet transform, Contourlet transform and Directionlet transform, etc., have been proposed in recent years to provide a better representation for the high dimensional singular features of images. Further more, it is a hot issue that how to represent and correlate the image subband coefficients of these multiscale geometric transform effectively. As an important multi-scale geometric analysis tool in the post-wavelet era, Shearlet transform has a good directional sensitivity and anisotropy, and it is a near-optimal sparse representation of multidimensional functions. The Non-Subsampled Shearlet Transform (NSST) maintains the property of Shearlet transformation and also has a translation invariance, which plays an important role in image processing with rich texture and detail information. In this paper, we first analyze the PDD(Probability Density Distribution) of NSST direction subbands, and obtain the sparse statistical properties of the coefficients and the validity of using the Cauchy distribution to fit subband coefficients. Secondly, after analyzing the joint probability distribution of the subband coefficients between the NSST direction subbands, the persistence and transfer characteristics of the subband coefficients in the direction are obtained, which determines a tree transfer relation between NSST subband coefficients. On this basis, an NSST domain Hidden Markov Tree Model based on Cauchy distribution(C-NSST-HMT) is proposed, which can better reveal the same scale sub-band and different scale sub-band the correlation between the coefficients. Furthermore, the proposed C-NSST-HMT model is applied to image denoising to achieve a good denoising effect. Compared with the denoising method based on NSCT-HMT model, after adding the noise with the variance of 30 and 40, the PSNR of the image after denoising increases by 1.995 dB and 1.193 dB on average. Especially for the image with rich texture and detail, the proposed method can effectively remove the noise, while retaining the edge and texture details information of the original image.

Keywords non-subsample Shearlet transform; hidden Markov tree model; NSST-HMT; Cauchy distribution; support vector machine; image denoising

1 引言

近年来,在基于多尺度几何分析图像处理中,人们除了关注各子带内系数的相关性外,同一尺度和不同尺度子带间系数的相关性也引起高度重视,并从不同方面对其进行了深入研究.文献[1-2]对图像的 Wavelet 系数进行隐马尔可夫树(Hidden Markov Tree, HMT)建模,较好地反映了图像 Wavelet 变换后相同尺度子带内和不同尺度子带间系数的相关性,展示了图像 Wavelet 系数的非高斯、聚集和依赖等特性.文献[3]利用 Hilbert 变换对的方向小波提出一种基于改进 Wavelet 域 HMT 模型的图像分割方法,在一定程度上克服了文献[2]中模型所不具有的平移不变性,提高了方向信息的检测能力.

进一步,随着图像多尺度几何分析的发展,出现了多种基于多方向的多尺度变换并受到重视^[4-6],从

而使图像的多方向稀疏表示成为可能.在此基础上,人们对一些变换的 HMT 模型及其应用进行了研究,比如文献[7]将 Curvelet 与 HMT 相结合,提出一种基于 Curvelet 域的 HMT 模型(CDHMT)的图像去噪方法,利用 HMT 模型捕捉 Curvelet 系数之间的尺度从属性,较好地实现了对合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar, SAR)图像相干斑噪声的抑制;文献[8]根据二代 Bandelet 系数的概率分布统计特性结合 HMT 描述了系数尺度间、尺度内和不同方向的图像统计信息,进而提出了二代 Bandelet 域隐马尔可夫树模型(BHMT)的有监督图像分割算法,在边缘保持和方向信息的检测方面获得了较好的效果;文献[9]通过图像 Contourlet 变换系数的 Gaussian 混合概率模型隐状态的 Markov 链来表现尺度间的相关性,构建了 Contourlet 域的 HMT 模型(C-HMT),并将其应用到图像分割和纹理检索中;文献[10]对 Contourlet 子带系数方向传递特性

进行了研究,将方向特征应用于 Contourlet-HMT,提出了一种新的模型,更好地反映了复杂纹理图像的方向特征;文献[11]对非下采样 Contourlet 变换(Nonsampled Contourlet Transform, NSCT)^[12]的系数分布及其各子带系数的依赖性进行了研究,提出了一种 NSCT 域隐 Markov 树模型 NSCT-HMT,在保持平移不变特性的同时,较好地捕捉了不同方向、不同尺度系数之间的相关性。

在基于多尺度变换的 HMT 的构建过程中,对各方向子带系数的概率密度分布表示至关重要,其表示精度往往会直接影响到构建模型的有效性.上述所介绍的图像多尺度变换 HMT 模型大都采用 Gaussian 或混合 Gaussian 分布来逼近子带系数.事实上,对于不同的多尺度变换,均采用 Gaussian 或混合 Gaussian 分布来对相应图像变换的子带系数进行建模未必是一种最佳的方案.如文献[13]中,利用多变量柯西(Cauchy)分布对彩色图像 RGB 三通道信息在 Contourlet 变换域的依赖关系进行描述.文献[14]中,将柯西分布作为超声图像在 Contourlet 变换域的先验模型。

近年来,Shearlet 变换被 Labate D 及其团队提出^[15-18],该变换作为后小波时代一个重要的多尺度几何分析工具,继承了 Wavelet、Curvelet 和 Contourlet 的优点,是一种接近最优的多维函数稀疏表示方法.它采用合成膨胀仿射系统把几何和多尺度变换结合起来构造,增强了基函数的方向敏感程度.相比于 Contourlet,其除了保持多尺度性、局域性、多方向性和基函数各向异性等优点外,对剪切操作没有方向数量的限制;同时离散 Shearlet 变换的逆变换仅需要剪切滤波器的合成,而无需方向滤波器的逆向变换。

本文对图像非下采样 Shearlet 变换(Nonsampled Shearlet Transform, NSST)的子带系数进行统计分析,进而对系数的 Gaussian 混合概率密度分布和 Cauchy 概率密度分布拟合的精度进行了分析和比较,对图像 NSST 系数联合概率分布情况进行了统计分析,在此基础上提出一种基于 Cauchy 分布的图像非下采样 Shearlet 变换 HMT(C-NSST-HMT);进一步,将所提出模型应用到图像高斯白噪声的去噪中,取得了很好的效果.实验结果表明所提出的 NSST-HMT 模型在纹理方向特征的表现上要优于同等情况下的 Contourlet HMT 模型。

2 图像 NSST 系数统计分析

2.1 NSST

Shearlet 变换是后小波时代的一种具有良好的方向敏感性和各向异性的多尺度变换.理论上它是 Wavelet 变换在多维和多方向情况的自然扩展,其核心想法是在伪极网格上切入信号,然后由一维带通滤波器组进行过滤^[19].

考虑 2D 仿射系统 $L^2(R^2)$,对 $\forall f \in L^2(R^2)$ 其 Shearlet 变换定义为

$$f \rightarrow SH_{\Psi} f(a, s, t) = \langle f, \Psi_{a,s,t} \rangle \quad (1)$$

其中 $(a, s, t) \in R^+ \times R \times R^2$ 分别为尺度、剪切和平移参数,且有

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{a,s,t}(x) = (\det(\mathbf{M}_{as}))^{-\frac{1}{2}} \Psi(\mathbf{M}_{as}^{-1}(x-t)) \\ \mathbf{M}_{as} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{as} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \end{array} \right. ,$$

$\Psi \in L^2(R^2)$ 为容许 Shearlet,满足

$$\int_{R^2} \frac{|\hat{\psi}(\delta_1, \delta_2)|^2}{\delta_1^2} d\delta_2 d\delta_1 < \infty.$$

矩阵 \mathbf{M}_{as} 能被分解为 $\mathbf{M}_{as} = \mathbf{B}_s \mathbf{A}_a$, \mathbf{A}_a 和 \mathbf{B}_s 分别为各向异性膨胀矩阵和剪切矩阵,其定义如式(2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2)$$

在频率域上,Shearlet 的几何特性更为直观,比如 $\hat{\Psi}_{a,s,t}$ 是以 s 为斜率的一对梯形区域作为支撑区间,这对梯形区域是基于原点对称的,同时梯形区域的面积并不随着基于参数 a 的旋转而改变.有关 Shearlet 的理论可参见文献[20].

基于下采样的 Shearlet 在多分辨率表示中因采用了下采样过程而在一定程度上丢失了空间支撑.文献[21]参照 NSCT(Nonsampled Contourlet Transform)的形成过程构造了 NSST(Nonsampled Shearlet Transform),该变换利用非下采样 Laplacian 替换了传统的 Laplacian 算法.由于其在频率域中没有下采样操作,所以可以避免在方向滤波中的失真和保证平移不变性.图 1 给出了图像进行两层 NSST 的分解的总体过程,图 2 给出了频率分解图和支撑区域。

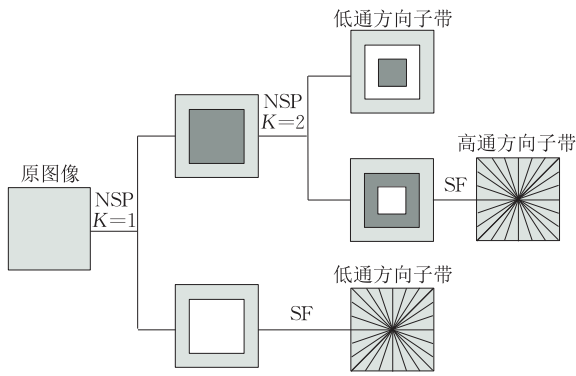
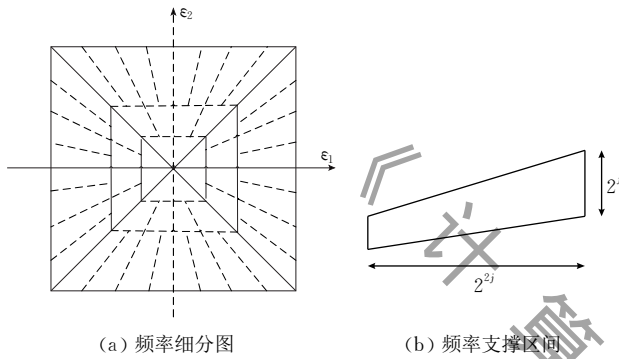


图 1 NSST 多尺度、多方向分解过程



(a) 频率细分图

(b) 频率支撑区间

图 2 NSST 频率分解和支撑区间示意图

2.2 图像 NSST 系数的边缘统计特性分析

为了分析图像 NSST 系数的统计特性,我们选取了 Lena、Cameraman、North Island 和 Shedao 等四幅不同特性的测试图像进行了 3 层、尺度为 2、4、8 个方向子带的 NSST 分解,并对最细尺度子带系数的灰度直方图进行了统计分析(参见图 3),注意到 NSST 系数的分布同样具有“峰高、尾长”的特性,即均值为零、峰度高于 Gaussian 分布,这表明 NSST 同样可有效地对图像进行稀疏表示.此时可以通过“大状态”和“小状态”来对应少量的具有大幅值的系数和大量具有小幅值的系数.这种特性在其他方向子带系数上也同样存在.

进一步,本文选取上述 NSST 方向子带系数峰值作为实验变量,对四幅图像的 NSST 子带进行 GMM(Gaussian Mixture Model)模型和 Cauchy 分布的精度拟合,参数估计采用极大似然方法,拟合度采用式(3)所示的 KS(Kolmogorov-Smirnov)评价指标:

$$KS = \max_{\omega \in R} |F_h(\omega) - F_e(\omega)| \quad (3)$$

其中 $F_h(\cdot)$ 和 $F_e(\cdot)$ 分别表示先验和标准分布函数,二者越接近表明拟合度越高.

Lena

Cameraman

North Island

Shedao

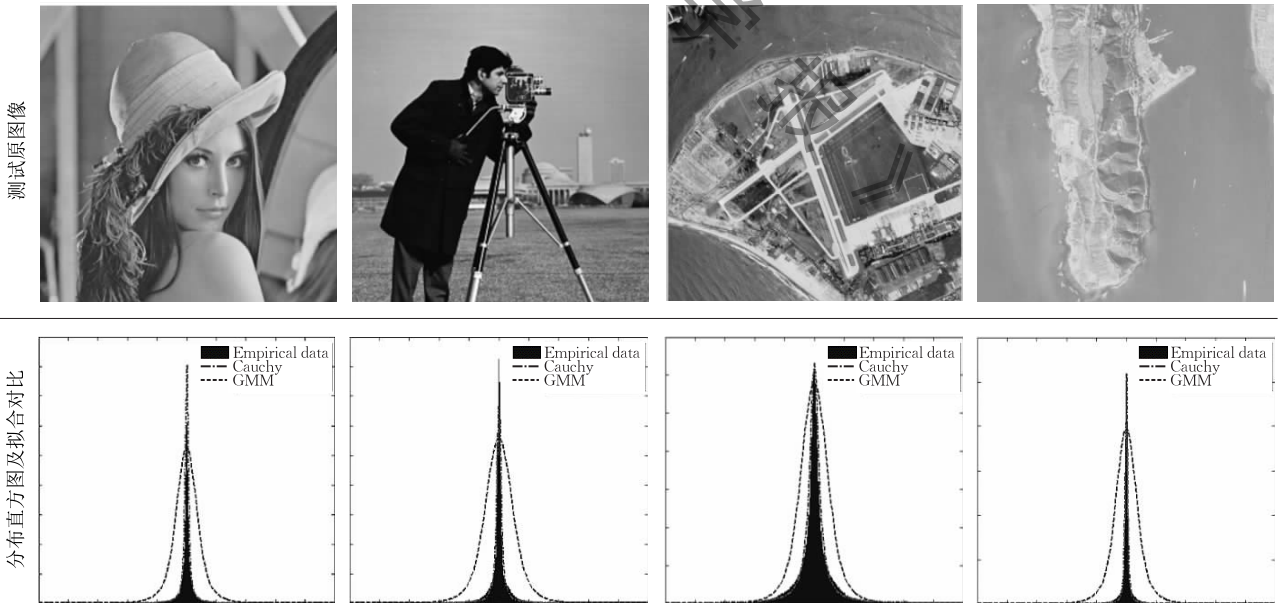


图 3 GMM 和 Cauchy 分布对测试图像系数的拟合结果对比

从表 1 可以看出,对于四幅测试图像的各 NSST 子带系数, Cauchy 分布较 GMM 具有更好的自适应性和拟合效果.具体拟合对比图可参见图 3,

其中点画线条为 Cauchy 拟合,虚线条为 GMM 拟合.

表 1 GMM 和 Cauchy 分布拟合程度 KS 值对比

测试图像	第 1 层 第 1 方向子带 (细尺度子带)		第 1 层 第 2 方向子带		第 2 层 第 1 方向子带		第 2 层 第 2 方向子带		第 2 层 第 3 方向子带		第 2 层 第 4 方向子带	
	GMM	Cauchy	GMM	Cauchy	GMM	Cauchy	GMM	Cauchy	GMM	Cauchy	GMM	Cauchy
	Lena	0.140	0.127	0.115	0.067	0.235	0.134	0.217	0.131	0.161	0.132	0.201
Cameraman	0.128	0.070	0.124	0.039	0.164	0.129	0.165	0.128	0.123	0.102	0.136	0.107
North Island	0.208	0.134	0.167	0.132	0.201	0.135	0.205	0.134	0.195	0.135	0.212	0.133
Shedao	0.163	0.125	0.126	0.112	0.127	0.054	0.130	0.052	0.130	0.021	0.129	0.026

3 基于 Cauchy 分布的 NSST-HMT 模型

3.1 图像 NSST 系数联合概率分布统计分析

为了说明 NSST 方向子带间系数之间的关系,

我们用联合统计特性分析方法对不同子带系数之间的关联情况进行分析. 图 4 给出了 North Island 图像 3 层 NSST 分解, 每层分别产生 2, 4, 8 个方向子带图像.

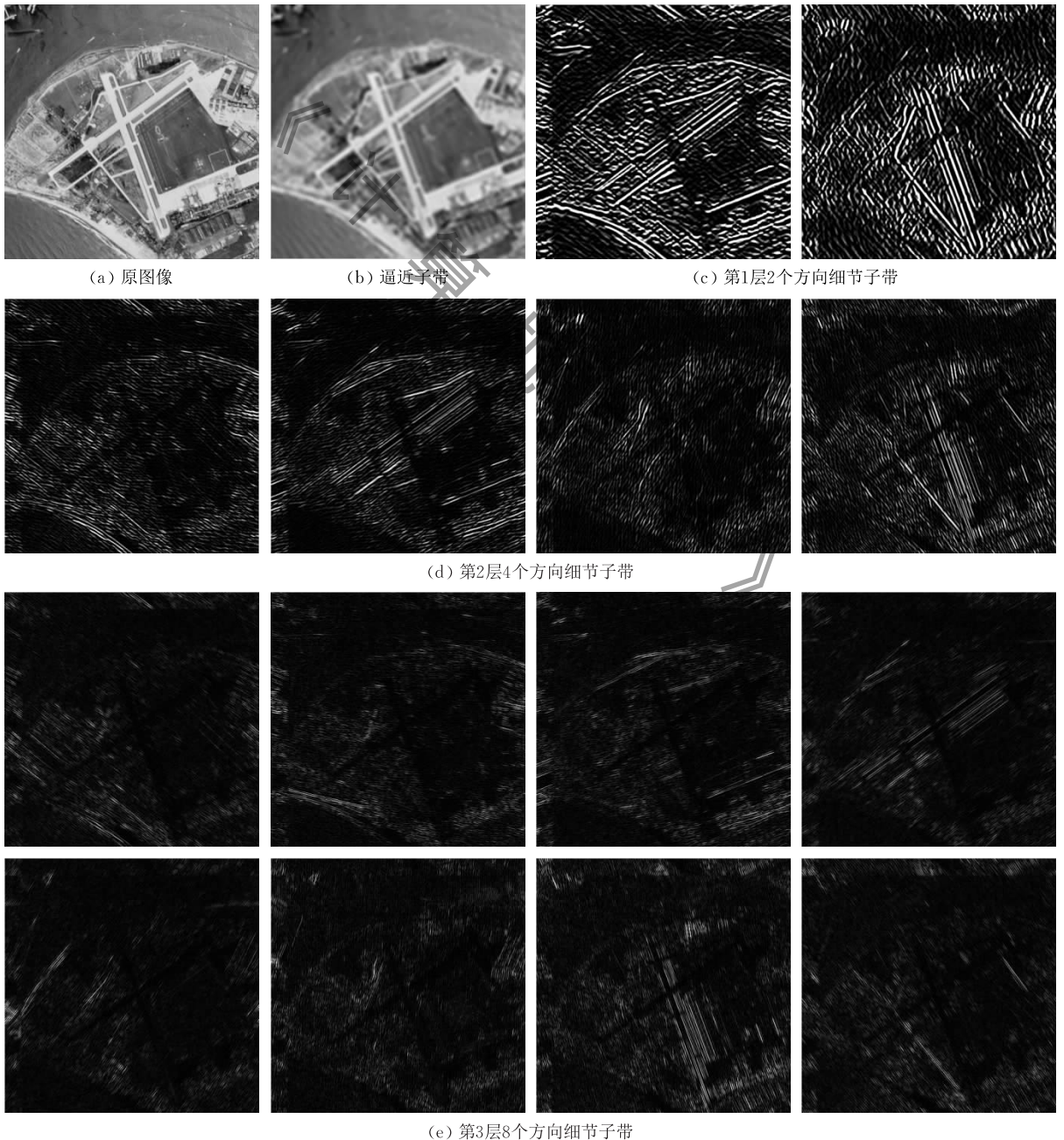


图 4 North Island 图像 3 层 2, 4, 8 个方向 NSST 分解子带图像

首先对 NSST 子带间的系数关系进行定义：对于当前子带的 NSST 系数 X ，定义与 X 在同一子带、相同方向周围的 8 个相邻的系数为邻域系数，记为 NX ；定义在 X 上一尺度，对应方向与 X 空间位置相同的系数为父系数，记为 PX ，即 X 是 PX 的儿子系数；定义与 X 处在同一尺度、不同方向，与 X 空间位置相同的系数为堂兄弟系数，记为 CX 。三种系数关系的示意图参见图 5。

进一步，我们对 Lena、Cameraman、North Island 和 Shedao 四幅测试图像的 NSST 系数的联合统计特征进行了分析，图 6 为其联合概率分布统计结果。

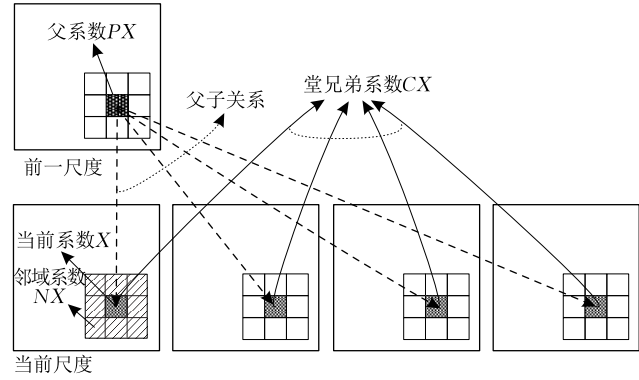


图 5 NSST 子带系数间的关系

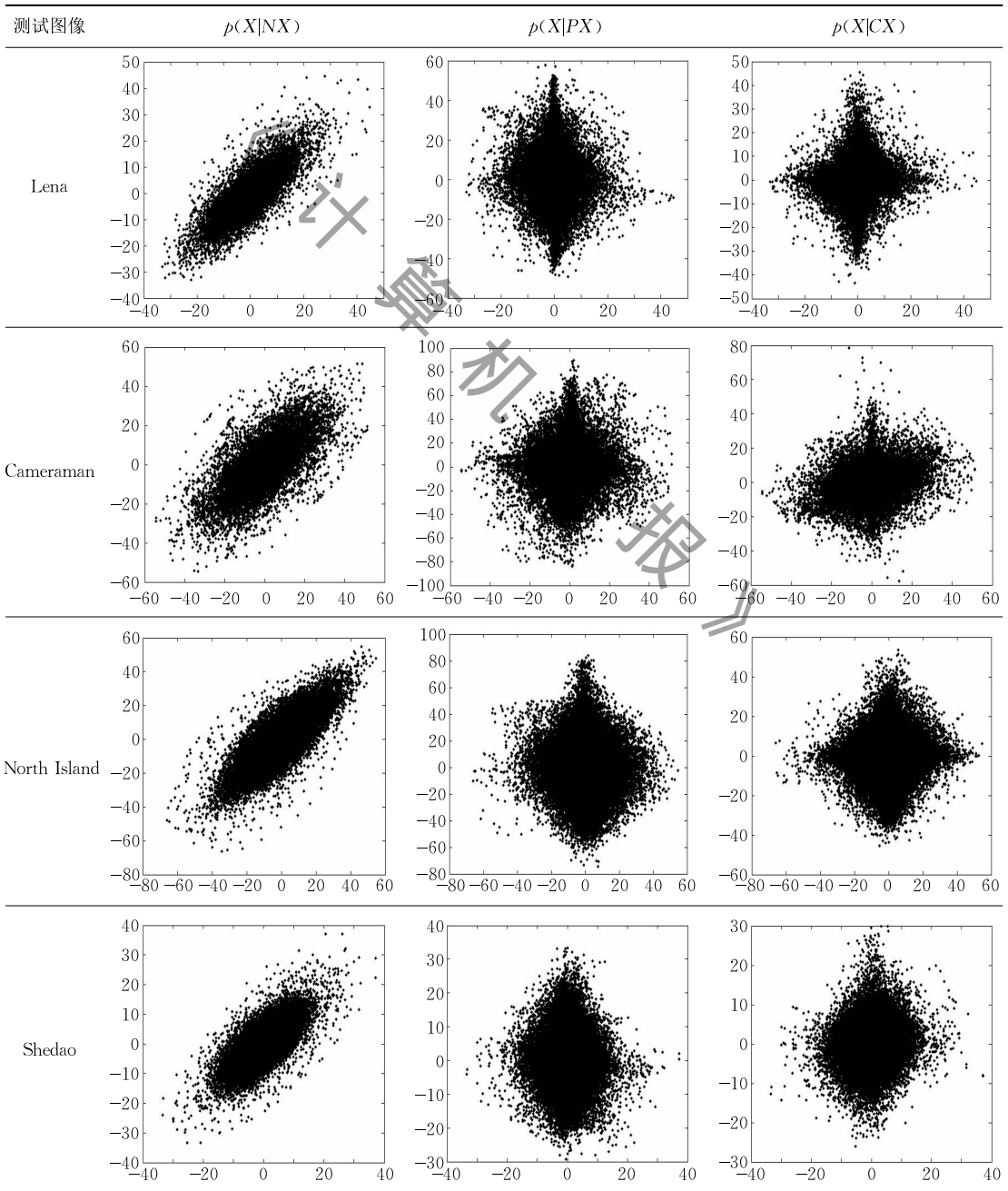


图 6 NSST 方向子带系数联合概率分布统计

可以看出, NSST 系数具有较强的聚集性和持续性, 具体表现在: 同一子带、相同方向的相邻系数互相聚集; 不同尺度间父子系数的相似性很大, 即父系数的大、小状态会大概率影响儿子系数, 父系数预测儿子系数的能力较邻域系数和堂兄弟系数强. 基于该统计特性, 可以确定将 NSST 子带系数间的“父子关系”(参见图 5) 作为 NSST 系数之间的传递关系.

3.2 图像 NSST 系数的 Cauchy 分布拟合

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 则其混合 Cauchy 分布函数(Cauchy distribution function)定义为

$$p(x_i | \theta) = \sum_{m=1,2} \pi_m p_m(x_i | \gamma_m, \delta_m),$$

这里 $m=1$ 和 $m=2$ 分别表示系数的大、小状态; π_m ($m=1, 2$) (满足 $\sum_{m=1,2} \pi_m = 1$) 表示系数取 m 状态的先验概率; $p_m(x_i | \gamma_m, \delta_m)$ ($m=1, 2$) 表示系数取 m 状态的 Cauchy 概率密度函数, 具体参见式(4):

$$p_m(x_i | \gamma_m, \delta_m) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\gamma_m}{(x_i - \delta_m)^2 + \gamma_m^2} \right] \quad (4)$$

这里, γ_m 和 δ_m 分别为 Cauchy 分布的形状参数和位置参数. $\theta = \{(\pi_m, \gamma_m, \delta_m), m=1, 2\}$ 是待估计的 Cauchy 分布的参数, 可通过极大似然估计法进行估计.

针对不同参数 Cauchy 分布概率密度函数的形状图形参见图 7.

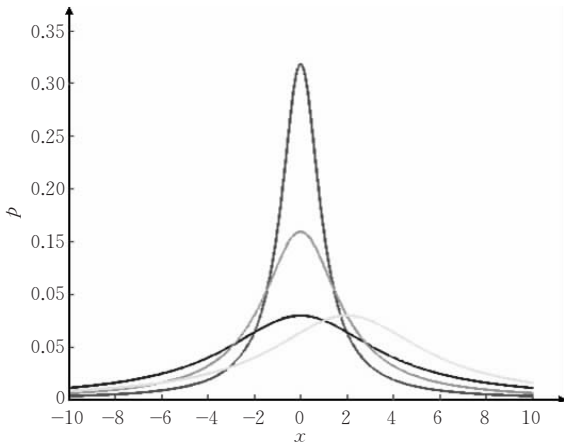


图 7 Cauchy 概率密度函数分布形状图

3.3 C-NSST-HMT 模型的建立及参数统计

对图像进行 L 层 NSST 分解, 获得尺度 $j \in \{1, 2, \dots, L\}$ 的各方向子带, 其中 $j=1$ 和 $j=L$ 分别表示最细尺度和最粗尺度. 设对于分解后的某一方向 k , 构成一个含有 p 个节点的树结构(参见图 5), 记该树结构为 T_1^k , 其中“1”表示树根节点, 此方向上所有的 NSST 系数记为 $N^k = \{N_1^k, N_2^k, \dots, N_p^k\}$, 与之对应的隐状态变量记为 $S^k = \{S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k\}$; 用 T_j^k

表示方向 k 、根节点为 j 的一棵子树, 树结构中任意一节点 i 是变换后的 NSST 系数, 记为 N_i , 该节点对应的隐状态用 S_i 表示, 该节点的父节点记为 $\rho(i)$, N_1 和 S_1 分别表示整个树根节点的系数及其对应的隐状态.

进一步, 选取 Cauchy 分布的概率密度函数(参见式(4))对图像 NSST 分解后的不同方向子带系数进行建模, 并通过状态转移概率矩阵揭示不同尺度相同方向的 NSST 系数之间的传递关系. 用

$$\epsilon_{i, \rho(i)}^{m,n} = f(S_i = m | S_{\rho(i)} = n)$$

表示父系数 $\rho(i)$ 与子系数 T_i 之间的状态转移概率, 即 $\rho(i)$ 的隐状态 $S_{\rho(i)} = n$ 时, T_i 的隐状态 $S_i = m$ 时的条件概率. 由此, 我们可建立一个如下含有 4 个参数的四元组 $\theta_{C-NSST-HMT}$ 表示 NSST 域 HMT 模型:

$$\theta_{C-NSST-HMT} = \{ (P_{N_1}(m), \epsilon_{i, \rho(i)}^{m,n}, \delta_{j,i,m}, \gamma_{j,i,m}) | i=1, 2, \dots, p; m, n=1, 2 \} \quad (5)$$

其中: (1) $P_{N_1}(m)$ 是最粗尺度隐状态树根节点 N_1 的状态概率分布函数, m 表示隐状态的个数; (2) $\epsilon_{i, \rho(i)}^{m,n}$ 为状态转移概率; (3) $\delta_{j,i,m}$ 和 $\gamma_{j,i,m}$ 分别表示第 j 尺度方向子带上隐状态变量 $S_i = m$ 时, Cauchy 分布的位置参数和形状参数.

对于式(5)的参数, 本文采用 HMT-EM 算法迭代进行最优估计, 限于篇幅在此不再赘述, 具体过程可参考文献[10].

4 C-NSST-HMT 模型的图像去噪应用

4.1 一致性支持向量机

Shao 等人在 2013 年提出了一种带有一致性的临近分类器(Proximal Classifier with Consistency, PCC)[22]. 不同于广义特征值临近支持向量机, PCC 在决策和训练过程中, 通过比较一个点与决策和训练过程中的两个超平面之间的距离来强化一致性, 取得了更好的分类精度和效率. 其基本原理如下:

考虑 R^n 空间的二元分类问题, 对于训练集 $\{(x_i, y_j) | i, j \in \{1, 2, \dots, p+q\}; y_m = 1, m \in \{1, 2, \dots, p\}, y_n = -1, n \in \{p+1, p+2, \dots, p+q\}\}$ 和正、负输入集 $\mathbf{X}_+ = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in R^{p \times n}$, $\mathbf{X}_- = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q})^T \in R^{q \times n}$, 线性 PCC 的目标是同时寻找一个形如式(6)的正、负超平面 p_+ 和 p_- 使其每一个能够逼近一类而远离另一类数据.

$$\begin{cases} p_+ : \mathbf{w}_+^T + \mathbf{b}_+ = 0 \\ p_- : \mathbf{w}_-^T + \mathbf{b}_- = 0 \end{cases} \quad (6)$$

记

$$\begin{cases} \mathbf{u}_+ = [\mathbf{w}_+, \mathbf{b}_+]^T, \mathbf{G}_+ = [\mathbf{X}_+, \mathbf{e}_+], \mathbf{H}_+ = \mathbf{G}_+^T \mathbf{G}_+ \\ \mathbf{u}_- = [\mathbf{w}_-, \mathbf{b}_-]^T, \mathbf{G}_- = [\mathbf{X}_-, \mathbf{e}_-], \mathbf{H}_- = \mathbf{G}_-^T \mathbf{G}_- \end{cases}$$

则 PCC 要解决的问题转换为下列优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_- \neq 0} \left\{ \frac{\mathbf{u}_+^T (\mathbf{H}_+ - \nu \mathbf{H}_-) \mathbf{u}_+ + \delta \|\mathbf{u}_+\|^2}{\|\mathbf{u}_+\|^2} + \frac{\mathbf{u}_-^T (\mathbf{H}_- - \nu \mathbf{H}_+) \mathbf{u}_- + \delta \|\mathbf{u}_-\|^2}{\|\mathbf{u}_-\|^2} \right\} \quad (7)$$

其中 ν 为正的折中参数, $\delta > 0$ 为权重因子, $\|\cdot\|$ 为二范数.

一旦式(7)解 \mathbf{u}_+ 和 \mathbf{u}_- 被获得, 则可根据一个新的样本 $\mathbf{x} \in R^n$ 更加接近于哪个超平面来确定其属于“+”和“-”的哪个类, 具体可通过式(8)来实现:

$$\text{Class } j = \arg \min_{j=+,-} \frac{|\mathbf{w}_j^T \mathbf{x} + \mathbf{b}_j|}{\|\mathbf{u}_j\|} \quad (8)$$

4.2 去噪过程

对于原图像(包含噪声)的 NSST 系数 y , 其看成为由无噪声图像和噪声的 NSST 系数 x 与 n 组成. 去噪的目的为通过已知含噪声系数 y 来估计出原始图像系数 x . 本文提出去噪算法的过程如算法 1 所示.

算法 1. 去噪算法.

Step1. 对含噪声图像进行尺度从粗到细依次为 2, 4, 8 个方向子带的 3 层 NSST 分解;

Step2. 利用样本分位数(Ranked Set Sample, RSS)^[23]方法估算高频子带系数 y 系数中柯西混合模型参数 $\Theta_{(j,k,i),m}^{(y)} = (\delta_{(j,k,i),m}^{(y)}, \gamma_{(j,k,i),m}^{(y)})$, 其中 j, k, i 分别表示为尺度、方向及系数;

Step3. 对含噪声图像的 NSST 系数 y 应用 PCC 方法进行分类, 筛选出有意义系数 y' , 即下列“二元图”中连续非零点所对应的 NSST 系数, 过程如下:

Step3.1. 利用下面判别式构造 $y(i, j)$ 系数所对应的“二值图” $I(i, j)$, 其中 $j \in \{1, 2, 3\}$ 为系数所在的层数, i 为系数在该层的序号; 如果否则

$$I(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } |y(i, j)| > t_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

其中 t_j 为基于分解层子带的阈值, 表达式为^[24]

$$t_j = \frac{\sigma \times \sqrt{2 \ln N}}{e^{(j-1)/(j+1)}}, \quad \sigma = \frac{(|y(i, j)|) \text{ 中位数}}{0.6745}$$

N 为第 j 层子带系数个数.

Step3.2. 对二值图 I , 按照文献[24]中关于有意义数据的“非零联通”原则, 在非零的联通路径上选取具有一定长度的非零点, 并选择与之具有相同位置的 NSST 系数组成特征向量 \mathbf{F}_k^1 ; 同时在标记为 0 的系数中选择与之相同数量的点所对应的 NSST 系数组成特征向量 \mathbf{F}_k^2 , 从而形成训练样本集 $\Omega_k = \{\mathbf{F}_k^1, \mathbf{F}_k^2\} (k=1, 2, \dots, M)$;

Step3.3. 将样本集 $\Omega_k = \{\mathbf{F}_k^1, \mathbf{F}_k^2\}$ 送入 PCC, 可从 y 中

分离出有意义的系数 y' .

Step4. 利用本文提出的基于混合 Cauchy 分布的 C-NSST-HMT 模型对系数 y' 建模, 获得该模型的参数如下:

$$\theta_{\text{C-NSST-HMT-}y'} = \{P_{N_1}(m), \epsilon_{i,\rho(i)}^{m,n}, \delta_{j,i,m}, \gamma_{j,i,m}\}.$$

具体变量和符号的说明参见 3.3 节.

Step5. 利用 Step4 构造的 C-NSST-HMT 模型的参数与估计出的含噪系数参数 $\Theta_{(j,k,i),m}^{(y)}$ 做差, 作为噪声系数模型, 即有

$$\Theta_{(j,k,i),m}^{(\text{noise})} = \begin{cases} \Theta_{(j,k,i),m}^{(y)} - \Theta_{(j,k,i),m}^{(y')}, & \Theta_{(j,k,i),m}^{(y)} - \Theta_{(j,k,i),m}^{(y')} \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Step6. 由于不含噪声系数与含噪声系数独立并符合相同的 Cauchy 模型, 因此先将先验模型 $\theta_{\text{C-NSST-HMT-}y'}$ 的模型参数作为去噪后图像的 HMT 参数模型^[25], 有

$$\theta_{\text{C-NSST-HMT-}x} = \{P_{N_1}(m), \epsilon_{i,\rho(i)}^{m,n}, \delta_{j,i,m}, \gamma_{j,i,m}\},$$

当状态 $S_{j,k,i}$ 一定时, 利用 Bayes 估计可得

$$E[x_{j,k,i} | y'_{j,k,i}, \theta_{\text{C-NSST-HMT-}x}, S_{j,k,i}] = \frac{\Theta_{(j,k,i),m}^{(x)}}{\Theta_{(j,k,i),m}^{(x)} + \Theta_{(j,k,i),m}^{(\text{noise})}} \times y'_{j,k,i}.$$

Step7. 最后利用 EM 算法获得在样本为有意义系数 y' , 并且在模型 $\theta_{\text{C-NSST-HMT-}x}$ 参数已知情况下状态为 m 的概率 $p(S_{j,k,i} = m | y'_{j,k,i}, \theta_{\text{C-NSST-HMT-}x})$, 进而获得去噪图像 x 的如下估计:

$$E[x_{j,k,i} | y'_{j,k,i}, \theta_{\text{C-NSST-HMT-}x}] = \sum_m \left[\frac{p(S_{j,k,i} = m | y'_{j,k,i}, \theta_{\text{C-NSST-HMT-}x}) \times \Theta_{(j,k,i),m}^{(x)}}{\Theta_{(j,k,i),m}^{(x)} + \Theta_{(j,k,i),m}^{(\text{noise})}} \times y'_{j,k,i} \right].$$

Step8. 利用 $E[x_{j,k,i} | y'_{j,k,i}, \theta_{\text{C-NSST-HMT-}x}]$ 可获得去噪图像 x 的 NSST 估计系数, 进而通过逆 NSST 获得去噪图像.

4.3 实验与分析

为了验证所提出模型的有效性, 本文进行了大量的仿真实验, 试验中 NSST 的非下采样多尺度、方向滤波器分别采用的是‘dmaxflat7’和‘maxflat’, 图像被分解为 3 层, 各层的子带数分别为 2, 4 和 8, 分解的方向数分别为 16, 32, 64, 实验环境为 Matlab R2009b. 测试图像选取了 North Island、Shedao、Lena、Cameraman 四幅图像, 其大小为 512×512 .

表 2 给出了图像“Cameraman”通过 EM 算法训

表 2 C-NSST-HMT 模型参数

		$k=1$		$k=2$	
		State 1	State 2	State 1	State 2
$p_{1,k,1}$		0.7139	0.2861	0.7507	0.2493
$A_{2,k,1}$	State 1	0.9647	0.0002	0.9652	0.0626
	State 2	0.0353	0.9998	0.0348	0.9374
$A_{3,k,1}$	State 1	0.8934	0.1285	0.9244	0.2806
	State 2	0.1066	0.8715	0.0756	0.7194
$\gamma_{1,k,1}$		1.3631	9.4599	1.2006	14.6028
$\delta_{1,k,1}$		2.0447	14.1899	1.8010	21.9043
$\gamma_{2,k,1}$		1.5002	4.4932	2.3919	7.2362
$\delta_{2,k,1}$		2.2503	6.7398	3.5878	10.8544
$\gamma_{3,k,1}$		0.2160	1.1934	0.3232	2.0307
$\delta_{3,k,1}$		0.3240	1.7900	0.4848	3.0461

练所获得的不同方向、不同尺度下第一个子带的模型参数,其中参数下标依左至右顺序分别表示尺度、方向和子带。

进一步,通过在图像中叠加不同噪声等级的高斯白噪声来研究图像的去噪效果,采用峰值信噪比(*PSNR*)作为去噪效果的评价指标;进一步与相关的HMT模型进行了对比,包括NSCT-HMT^[11]、BLS-GSM^[26]、NL-Means^[27]、BM3D^[28]。

表3给出了对测试图像施加不同程度噪声后去噪图像的*PSNR*值比较情况,表4给出了不同去噪方法的用时对比。从实验统计结果可以看见,本文提出的基于C-NSST-HTM模型的去噪算法较对比模型去噪后图像的*PSNR*得到一定程度的提高,平均可提高1.995 dB;从算法的用时情况看,除了明显低于NSCT-HMT方法外,与其它三种方法相比略有提高。

表3 不同模型去噪方法的*PSNR*对比

图像	噪声方差	<i>PSNR</i> /dB					
		噪声图像	NSCT-HMT	BLS-GSM	NL-Means	BM3D	Proposed
North Island	15	24.60	27.73	30.36	27.30	29.89	30.82
	20	22.09	27.36	28.95	26.92	28.86	29.67
	30	18.60	26.46	27.04	26.21	27.17	28.06
	40	16.09	25.44	25.77	25.27	25.46	26.50
	50	14.15	24.34	24.83	23.94	24.87	25.36
Shedao	15	24.61	30.75	32.58	30.14	32.31	33.38
	20	22.10	30.53	31.56	29.75	31.45	32.43
	30	18.60	29.91	30.14	28.94	30.11	31.10
	40	16.08	29.16	29.38	28.82	29.49	29.60
	50	14.15	28.32	28.46	27.96	28.19	28.53
Lena	15	24.60	29.77	33.67	28.80	32.59	33.95
	20	22.13	29.54	32.40	28.53	31.49	32.72
	30	18.58	29.09	30.60	28.04	29.76	31.10
	40	16.09	28.43	29.33	27.29	28.92	29.50
	50	14.13	27.63	28.34	26.57	27.98	28.46
Cameraman	15	24.61	28.24	33.36	29.13	33.32	34.58
	20	22.11	27.99	31.44	28.92	31.14	32.96
	30	18.59	27.86	29.93	28.70	29.25	31.14
	40	16.07	26.98	28.97	27.94	28.98	29.18
	50	14.14	26.31	27.73	27.33	28.06	28.13

表4 不同模型去噪方法的运行时间对比

(单位: s)

图像	NSCT-HMT	BLS-GSM	NL-Means	BM3D	Proposed
North Island	403.15	8.37	4.95	10.08	15.30
Shedao	411.07	9.12	5.07	11.35	16.71
Lena	381.86	8.03	4.61	10.13	15.06
Cameraman	402.55	8.45	4.76	11.26	16.31

图8给出了测试图像在噪声方差为30高斯白噪声情况下的不同模型的去噪结果。图9是North

Island图像局部区域放大2倍的各方法去噪后图像的显示结果,可以看出对于具有较多纹理信息与细节信息的遥感图像,本文提出的去噪算法不仅能够有效地去除噪声,而且原图像中的许多边缘和纹理细节特征也得到了很好的保留。

此外,表5给出了本文所提出的去噪算法与近年来相关方法去噪的对比性统计结果,其中WPT^[29]为一种基于广义高斯分布的统计最优自适应小波包阈值去噪方法,DST^[30]为一种基于离散Shearlet变

表5 不同方法去噪的*PSNR*对比

图像	噪声方差	<i>PSNR</i> /dB					
		噪声图像	WPT ^[29]	DST ^[30]	NST ^[31]	EST-HMT ^[32]	Proposed
Boat	20	22.09	30.55	30.71	30.87	—	31.25
	30	18.60	29.12	28.69	29.01	—	29.12
	40	16.09	—	27.44	27.63	—	27.73
	50	14.15	25.91	26.45	—	—	26.41
Barbara	20	22.10	31.78	—	30.03	29.51	31.99
	30	18.60	29.82	—	27.84	27.42	29.78
	40	16.08	—	—	26.33	26.01	28.16
	50	14.15	26.11	—	—	—	26.38

(续 表)

图像	噪声方差	噪声图像	PSNR/dB				
			WPT ^[29]	DST ^[30]	NST ^[31]	EST-HMT ^[32]	Proposed
Lena	20	22.13	—	32.51	32.75	31.82	32.72
	30	18.58	—	30.59	30.84	29.74	31.10
	40	16.09	—	29.15	29.41	28.52	29.50
	50	14.13	—	28.11	—	—	28.46
Goldhill	20	22.11	30.75	30.27	—	—	31.08
	30	18.59	28.77	28.60	—	—	29.76
	40	16.07	—	27.43	—	—	28.13
	50	14.14	26.82	26.61	—	—	27.07
Pepper	20	22.11	—	32.44	32.17	—	32.78
	30	18.59	—	30.48	30.59	—	30.76
	40	16.07	—	29.11	29.31	—	29.50
	50	14.14	—	28.06	—	—	28.52



图 8 不同去噪方法的去噪图像对比

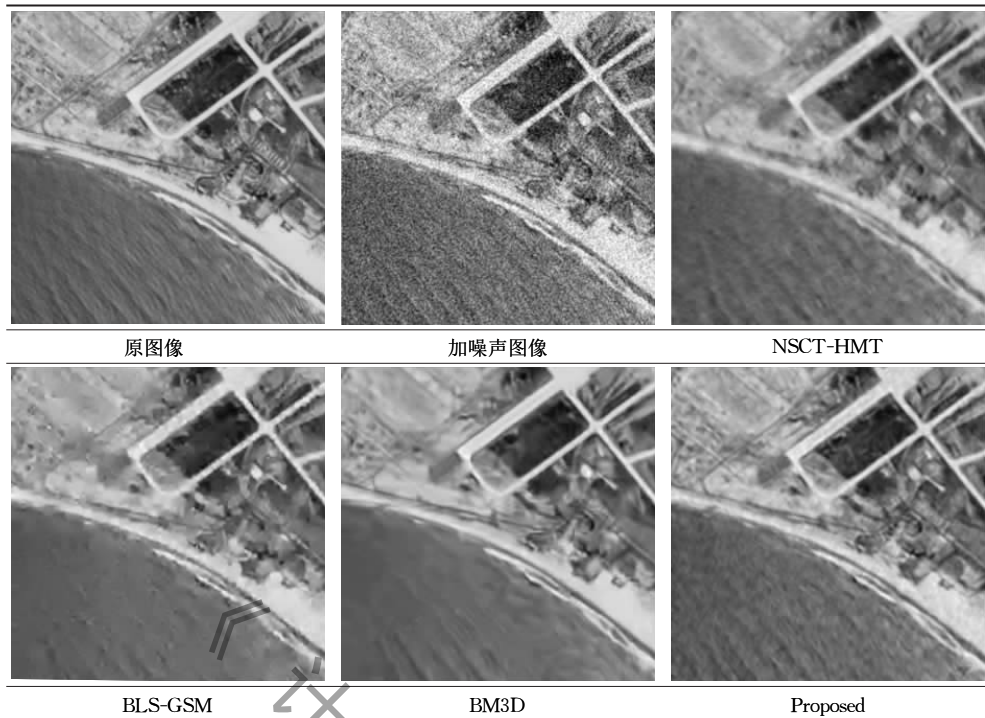


图 9 North Island 中局部区域放大 2 倍的去噪图像对比

换的硬阈值方法, $\text{NST}^{[31]}$ 为一种基于离散不可分离 Shearlet 变换的去噪方法, $\text{NST-HMT}^{[32]}$ 是一种基于扩展 Shearlet 变换, 并利用高斯混合模型对变换系数进行建模的图像去噪方法. 从统计结果可以看出, 总体而言除个别情况外本文方法的去噪效果较其他四种方法均有一定程度的提高.

5 结束语

本文首先对非下采样 Shearlet 变换方向子带系数的概率密度分布进行研究, 获得子带内 NSST 系数具有“高尖峰, 长拖尾”的分布特性, 同时大量统计结果发现, 对于 NSST 子带系数, Cauchy 分布较 GMM 具有更好的自适应性和拟合效果; 为了进一步揭示 NSST 子带间的系数关系, 对 NSST 变换系数进行联合统计分析, 获得 NSST 系数具有很好的持续性和聚集性的结论, 从而确定了 NSST 子带系数间的“父子关系”, 并将其作为 NSCT 系数间的“传递”关系, 进一步提出一种利用 Cauchy 分布来拟合 NSST 子带系数的 NSST 隐马尔可夫树模型 (C-NSST-HTM), 并给出了模型的训练和参数估计方案, 该模型能准确刻画 NSST 系数的统计特征, 并且具有平移不变性. 最后基于 C-NSST-HTM 提出了一种图像去噪算法, 该算法较 NSCT-HMT 去噪方法具有更好的去噪效果, 对 30 dB 噪声方差的含

噪声图像, 去噪后的 PSNR 可平均提高 1.995 dB, 在去噪的同时可有效保留原图像的几何信息, 这为复杂纹理图像的后继应用奠定了基础.

参 考 文 献

- [1] Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Statistical signal processing using wavelet-domain hidden Markov models// Wavelet Applications in Signal and Image Processing V. International Society for Optics and Photonics, 1997, 3169: 248-259
- [2] Choi H, Baraniuk R G. Multiscale image segmentation using wavelet-domain hidden Markov models. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9): 1309-1321
- [3] Guo Song-Tao, Sun Qiang, Jiao Li-Cheng. Remote-sensing image segmentation based on improved wavelet-domain hidden Markov models. Journal of Electronics and Information Technology, 2005, 27(2): 286-289 (in Chinese)
(郭松涛, 孙强, 焦李成. 基于改进小波域隐马尔可夫模型的遥感图像分割. 电子与信息学报, 2005, 27(2): 286-289)
- [4] Jiao Li-Cheng, Hou Biao, Wang Shuang, et al. Image Multiscale Geometric Analysis: Theory and Applications-Beyond Wavelets. Xi'an: Xidian University Publish House, 2008 (in Chinese)
(焦李成, 侯彪, 王爽等. 图像多尺度几何分析理论与应用——后小波分析理论与应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008)
- [5] Song Chuan-Ming, Zhao Chang-Wei, Liu Dan, Wang Xiang-Hai. Advances in 3D multiscale geometrical analysis. Journal

- of Software, 2015, 26(5): 1213-1236(in Chinese)
(宋传鸣, 赵长伟, 刘丹, 王相等. 3D 多尺度几何分析研究进展. 软件学报, 2015, 26(5): 1213-1236)
- [6] Wang Xiang-Hai, Sun Qiang, Song Chuan-Ming, Liu Dan. Advances in image coding based on multiscale geometric analysis. Journal of Computer Research and Development, 2010, 47(6): 1132-1143(in Chinese)
(王相等, 孙强, 宋传鸣, 刘丹. 基于多尺度几何分析的图像编码研究进展. 计算机研究与发展, 2010, 47(6): 1132-1143)
- [7] Jing Hai-Yan, Jiao Li-Cheng, Liu Fang. SAR image de-noising based on Curvelet domain hidden Markov tree models. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(3): 491-497 (in Chinese)
(金海燕, 焦李成, 刘芳. 基于 Curvelet 域隐马尔可夫树模型的 SAR 图像去噪. 计算机学报, 2007, 30(3): 491-497)
- [8] Hou Biao, Xu Jing, Liu Feng, Jiao Li-Cheng. Image segmentation using second generation Bandelet-domain. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(5): 498-504(in Chinese)
(侯彪, 徐婧, 刘凤, 焦李成. 基于第二代 Bandelet 域隐马尔可夫树模型的图像分割. 自动化学报, 2009, 35(5): 498-504)
- [9] Po D D Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(6): 1610-1620
- [10] Wang X H, Chen M Y, Song C M, et al. Contourlet HMT model with directional feature. Science China Information Sciences, 2012, 55(7): 1563-1578
- [11] Wang Xiang-Hai, Ni Pei-Gen, Su Xin, et al. The nonsub-sampled Contourlet HMT model. Scientia Sinica (Informationis), 2013, 43(11): 1431-1444(in Chinese)
(王相等, 倪培根, 苏欣等. 非下采样 Contourlet HMT 模型. 中国科学: 信息科学, 2013, 43(11): 1431-1444)
- [12] Cunha A L, Zhou J, Do M N. The nonsubsampled Contourlet transform: Theory, design, and applications. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(10): 3089-3101
- [13] Sadreazami H, Ahmad M O, Swamy M N S. Color image denoising using multivariate cauchy PDF in the contourlet domain//Proceedings of the IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. Vancouver, Canada, 2016: 1-4
- [14] Sadreazami H, Ahmad M O, Swamy M N S. Ultrasound image despeckling in the contourlet domain using the Cauchy prior//Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Montreal, Canada, 2016: 33-36
- [15] Guo K, Labate D. Optimally sparse multidimensional representation using shearlets. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2007, 39(1): 298-318
- [16] Easley G R, Labate D, Lim W Q. Optimally sparse image representations using Shearlets. Wavelets XI, 2008, 5914(1): 974-978
- [17] Kutyniok G, Labate D. Resolution of the wavefront set using continuous shearlets. Transactions of the American Mathematical Society, 2009, 361(5): 2719-2754
- [18] Easley G R, Labate D. Image Processing Using Shearlets. Shearlets-Applied and Numerical Harmonic Analysis. Massachusetts, USA: Birkhäuser Boston, 2012: 283-325
- [19] Hou B, Zhang X, Bu X, et al. SAR image despeckling based on nonsubsampled shearlet transform. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2012, 5(3): 809-823
- [20] Kutyniok G, Labate D. Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data. New York, USA: Birkhäuser, 2012
- [21] Easley G, Labate D, Lim W Q. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 25-46
- [22] Shao Y H, Deng N Y, Chen W J. A proximal classifier with consistency. Knowledge. Based Systems, 2013, 49(1): 171-178
- [23] Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4): 886-902
- [24] Huang Yu-Fei. Baded on Support Vecgor Machines Image Denoising and Image Quality Assessment Research [M. S. dissertation]. North University of China, Taiyuan, China, 2013(in Chinese)
(黄玉飞. 基于支持向量机的图像去噪和图像质量评价的研究[硕士学位论文]. 中北大学, 太原, 2013)
- [25] Chiv N N, Sinha B K, Wu Z. Estimation of the location parameter of a Cauchy distribution using a ranked set sample. Metreka, 1995, 42(1): 234-235
- [26] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, Simoncelli E P. Image denoising using scalmixtures of Gaussians in the wavelet domain. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11), 1338-1351
- [27] Buades A, Coll B, Morel J M. A nonlocal algorithm for image denoising//Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision & Pattern Recognition. San Diego, USA, 2005: 60-65
- [28] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, Egiazarian K. Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095
- [29] Fathi A, Naghsh-Nilchi A R. Efficient image denoising method based on a new adaptive wavelet packet thresholding function. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(9): 3981
- [30] Lim W Q. The discrete shearlet transform: A new directional transform and compactly supported shearlet frames. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(5): 1166-1180
- [31] Lim W Q. Nonseparable shearlet transform. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(5): 2056-2065
- [32] Wang X Y, Liu Y C, Yang H Y. Image denoising in extended shearlet domain using hidden Markov tree models. Digital Signal Processing, 2014, 30(1): 101-113



WANG Xiang-Hai, born in 1965, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics and image, multimedia and remote sensing image information processing.

ZHU Yi-Huan, born in 1992, M. S. candidate. His research interests include image processing based on multi-

scale analysis.

LV Fang, born in 1993, M. S. candidate. Her research interests include image processing and analysis.

SU Xin, born in 1988, M. S. His research interests include image denoising and segmentation.

SONG Chuan-Ming, born in 1980, Ph. D., associate professor. His research interests include image, video coding, and digital watermarking of multimedia.

Background

Multiscale geometric analysis provides a sparse representation for images. After the wavelet transform effectively represent the singular points of images, the multiscale geometric transforms, such as the Contourlet transform and Shearlet transform etc., have been proposed to provide a better representation for the high dimensional singular features of images, which can better capture the multidirectional edges and textures of the image. The Shearlet transform has a good directional sensitivity and anisotropy, and it is a near-optimal sparse representation of multidimensional functions. The Non-Subsampled Shearlet Transform (NSST) maintains the property of Shearlet transformation and also has a translation invariance, which plays an important role in image processing with rich texture and detail information.

How to efficiently express and correlate the subband coefficients of the multiscale transforms has become a hot and difficult issue. The Hidden Markov Tree model (HMT) which can capture the inter-scale dependencies by imposing a

tree structure on the hidden states across scales. In recent years, we studied the distribution of Contourlet transformation coefficients, and the correlation between each subband coefficients, then proposed the Contourlet transformation HMT models in Academic Journal of Chinese Science. In this paper, we first analyze the probability density distribution of the coefficients in the NSST direction subband and the joint probability distribution of the coefficients between the NSST direction subbands; further, we proposed an NSST domain hidden Markov model based on Cauchy distribution (C-NSST-HTM), and applied it in remote sensing image denoising and achieved a good performance in terms of both subjective and objective evaluations.

This research has been funded by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41671439 and 61402214), and the Innovation Team Support Program of Liaoning Higher Education Department (LT2017013).