第 41 卷 第 4 期 计 算 机 学 报 Vol. 41 No. 4
2018 年 4 月 CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS Apr. 2018

WMTL-代数中的蕴涵滤子及其应用

吴洪博 梁 颖

(陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062)

摘 要 MTL-代数是通过在剩余格中添加预线性公理得到的一类重要的基础逻辑代数,该文通过在剩余格中添加弱预线性公理建立了 WMTL-代数,并对它的性质进行了细致讨论.首先,通过在剩余格中添加弱预线性公理的方法引入了 WMTL-代数的概念,讨论了剩余格,WMTL-代数,MTL-代数的区别与联系;其次,在 WMTL-代数中引入了蕴涵滤子的概念,并通过引入增强集给出了蕴涵滤子的等价刻画及蕴涵滤子的生成方法;第三,在 WMTL-代数中引入了强同余关系的概念,给出了蕴涵滤子和强同余关系相互确定的方法:第四,证明了 WMTL-代数的蕴涵滤子型商代数是 WMTL-代数,蕴涵滤子型商代数是线性的当且仅当蕴涵滤子是素的;第五,在 WMTL-代数 L 中证明了弱预线性公理的有限可积性质:$(x\to(x\to y))^n\vee(y\to(y\to x))^n=1(\forall x,y\in L,\forall n\in N_+)$;最后,证明了 WMTL-代数中不含一个特定元素(不属于给定蕴涵滤子)的素蕴涵滤子的存在性,并证明了满足条件$[1)=\{1\}$的 WMTL-代数可以嵌入到其上所有素蕴涵滤子型商代数的乘积代数之中.

关键词 模糊逻辑;WMTL-代数;蕴涵滤子;强同余关系;素蕴涵滤子;嵌入定理

中图法分类号 O141 **DOI 号** 10.11897/SP.J.1016.2018.00886

Implication Filters of WMTL-Algebras with Applications

WU Hong-Bo LIANG Ying

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062)

Abstract MTL-algebra, which is a kind of important basic logic algebra proposed by Esteva and Gödel through adding axiom of pre-linearity: $(x\to y)\vee(y\to x)=1(\forall x,y\in L)$ to a residuated lattice L, is generalized to WMTL-algebra in the present paper, and the properties of WMTL-algebras are investigated in depth. Firstly, the concept of WMTL-algebra is proposed by adding the axiom of weak pre-linearity: $(x\to(x\to y))\vee(y\to(y\to x))=1(\forall x,y\in L)$ to a residuated lattice L, the relationships among residuated lattice, WMTL-algebra, MTL-algebra are given, and differences among them are showed by constructing corresponding examples; Secondly, the concepts of implication filter, weak implication filter, MP filter, and $*$ filter are proposed in a WMTL-algebra, the relationships among them are discussed. It is proved that in a WMTL algebra, a weak implication filter is equivalent to an MP filter, and that an MP filter containing strengthening set $D=\{x\to x^2\mid x\in L\}$ of the WMTL algebra is equivalent to an implication filter, and a method of generating implication filter from a subset of a WMTL algebra is given with the help of strengthening set; Thirdly, the concept of strengthened congruence relation is put forward in a WMTL-algebra L, which is a usual congruence relation on the WMTL-algebra L such that for $x\in L$, $x\to x^2$ is related to 1, it is proved that in a WMTL algebra, there is an one to one correspondence between implication filters and strengthened congruence relations, the methods of the mutual conversion between implication filters and strengthened congruence relations are given;

收稿日期:2016-10-25;在线出版日期:2017-07-05.本课题得到国家自然科学基金(61572016,11531009,61673250)资助.**吴洪博**,男,1959年生,博士,教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为非经典数理逻辑、格上拓扑学.E-mail: wuhb@snnu.edu.cn. **梁 颖**,女,1992 年生,硕士,主要研究方向为非经典数理逻辑、格上拓扑学.

Fourthly, the concept of prime implication filter is introduced to WMTL algebras, it is proved that the quotient algebra of a WMTL-algebra determined by the strengthened congruence relation induced by a implication filter is also a weak MTL-algebra, and that the quotient algebra determined by the strengthened congruence relation is linear if and only if the inducing implication filter is prime; Fifthly, using the mathematical induction, the property of finite product of weak pre-linearity axiom in WMTL-algebras is proved which says that in a WMTL-algebra L holds the fundamental equation: $(x\to(x\to y))^n \vee (y\to(y\to x))^n=1(\forall x,y\in L,\forall n\in N_+)$; Finally, by utilizing the property of finite product of weak pre-linearity axiom in WMTL-algebras, it is proved that in a WMTL-algebra, for a given implication filter, there is a corresponding prime implication filter which contains the given implication filter and which does not contain a given point (not belonging to the given implication filter), then the conditional embedding theorem of a WMTL algebra is proved, which says that a WMTL-algebra satisfying the condition [1)={1} can be embedded in the product algebra of a family of linear quotient algebras of the WMTL-algebra determined by the strengthened congruence relations induced by corresponding prime implication filters.

Keywords　fuzzy logic; WMTL-algebra; implication filter; strengthened congruence relation; prime implication filter; embedding theorem

1 引　言

计算机本身是一个逻辑处理器,计算机所做的所有工作最后都是通过转化成逻辑运算来完成的.其中的逻辑运算由体现为仅有0,1参与的非、与、和数理逻辑运算.依照模糊逻辑理论,判断命题不只是真(用1表示)、非(用0表示)两种绝对情形,会出现接近、几乎、差不多、差得远等等许多模糊概念,这样就会有表示这些情形的多值参与非、与、和的逻辑运算之中.模糊计算机就是依据这些模糊的,不确切的判断进行工程处理的计算机[1-3].目前,模糊计算机已经应用于地铁管理、疾病诊断、海空导航、地震灾情判断等多个方面.逻辑代数是在多值逻辑的研究过程中逐步发展起来的一个重要的代数分支,它是研究模糊命题对应的多值参与的非、与、和逻辑运算的理论,是模糊计算机软件的基础理论.

由于逻辑代数产生于对命题逻辑系统赋值域的研究背景,因此逻辑代数一般是在剩余格的基础上建立的,其中的基本算子是蕴涵算子及其伴随算子.由于命题逻辑系统的多样性,逻辑代数具有多种结构.1958年Chang在研究Lukasiewicz命题逻辑系统完备性问题时首次在一般集合上建立了经典代数形式的逻辑代数-MV代数,并借用MV-代数的完备性证明了Lukasiewicz命题逻辑系统的完备性[4];此后,相继建立了多种结构的逻辑代数[5-14].其中著名的逻辑代数包括:1991年吴望名教授以蕴涵算子为唯一算子建立的模糊蕴涵代数[6];1998年Hajek教授建立了基础逻辑代数BL[7];1993年徐扬教授以蕴涵算子为基本算子于有界格上建立的格蕴涵代数[8];2003年已故王国俊教授建立了以对合分配格为基础,以蕴涵算子为基本算子的R_0-代数[10];2001年Esteva和Gödo教授于剩余格基础上建立了MTL-代数[11],等等.

由于逻辑代数中格序的存在,使得经典代数的思想方法和格论的思想方法得以在逻辑代数中相结合而产生逻辑代数中新的思想方法,从而丰富了代数学的研究内容和研究方法.文献[15-26]仅是体现这些思想方法的部分成果.其中,徐扬教授等在文献[15-16]对剩余格中的滤子理论和特征进行了研究,张小红教授等在文献[18-19]中对MTL-代数中的Fuzzy滤子理论和特征进行了研究,李开泰教授,刘练珍教授等在文献[20-22]中对BL-代数中的滤子理论进行了研究,文献[24-25]提出了MT理想的概念并于正则FI-代数,BR_0中分别对MT理想的性质进行了研究.这些成果在命题逻辑系统的完备性证明或逻辑代数的嵌入性研究中发挥了关键的作用[7,9,11,13,15,23-24].

MTL-代数是强于剩余格,同时弱于BL代数的基础逻辑代数.我们在针对MTL-代数的研究中发现MTL-代数的一些性质在较之MTL-代数更广泛的框架下仍是成立的,由此启发我们对较之MTL

命题逻辑系统适应更加广泛的命题逻辑系统的存在性的探讨.因此,我们于文献[26]中建立了 WMTL-代数:满足弱预线性的剩余格.由于文献[26]中所采用的通常方法适应性的限制,文献[26]仅对 WMTL-代数中演绎系统和同余关系之间相互确定关系进行了研究,但在 WMTL 代数中,通常的素 MP 滤子并不一定能决定线性 WMTL 代数.本文在对通常方法的改进并引入新的研究方法的基础上对 WMTL-代数进行了较为细致的研究.

本文第 1 节介绍本文研究的背景及研究内容;第 2 节介绍相关概念和剩余格的性质;第 3 节在 WMTL-代数中引入蕴涵滤子概念,它是强于通常 MP 滤子的一种滤子结构,并通过引入增强集对其进行等价刻画,以及由 WMTL-代数的子集生成蕴涵滤子的结构形式;第 4 节在 WMTL-代数中引入了强同余关系的概念,证明其与蕴涵滤子的相互确定关系;第 5 节通过改进预线性有限可积性的证明方法证明 WMTL-代数中弱预线性的有限可积性;第 6 节证明蕴涵滤子型商代数是 WMTL-代数,并且素蕴涵滤子型商代数是线性的;第 7 节利用素蕴涵滤子的存在性和素蕴涵滤子型商代数证明 WMTL-代数的条件嵌入定理.

2 预备知识

首先,本节回顾与本文相关的剩余格的相关性质;其次,本节通过弱预线性公理给出了 WMTL-代数的定义,并讨论了剩余格,WMTL-代数,MTL-代数三者之间的关系.特别的,通过实例说明了 WMTL-代数不必是 MTL-代数.

定义 1[5]. 设 $(P,\le)$ 为偏序集, $*$ 和 $\to$ 是 $(P,\le)$ 上的二元运算,若满足下列条件:

(1) $*: P\times P\to P$ 是单调增加的;

(2) $\to: P\times P\to P$ 是关于第一变量不增,关于第二变量不减;

(3) $\forall x,y,z\in P$, $x*y\le z$ 当且仅当 $x\le y\to z$.

则称 $(*,\to)$ 是 P 上的伴随对.

定义 2[5]. 剩余格 L 是满足下述条件的代数:

(1) $(L,\wedge,\vee)$ 是有界格;0 是格序意义下的最小元,1 是格序意义下的最大元.

(2) $(L,*,1)$ 是以 1 为单位元的交换半群;即 $*$ 是交换的,结合的, $1*x=x(\forall x\in L)$.

(3) L 上有伴随对 $(*,\to)$.

引理 1. 设 L 为剩余格,则 $\forall x,y,z\in L$,有下列结论成立:

(p1) $1\to x=x$;

(p2) $x*(x\to y)\le y$, $x\le y\to(x*y)$;

(p3) 若 $x\le y$,则 $x*z\le y*z$, $z\to x\le z\to y$, $y\to z\le x\to z$;

(p4) $x\le y$ 当且仅当 $x\to y=1$,特别地 $x\to 1=1$;

(p5) $x*y\le x\wedge y\le x$, $y\le x\vee y$, $x\le y\to x$;

(p6) $x*(y\vee z)=(x*y)\vee(x*z)$;

(p7) $x*(x\to y)\le x\wedge y\le y$;

(p8) $x\vee y\le((x\to y)\to y)\wedge((y\to x)\to x)$;

(p9) $(x*y)\to z=x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$;

(p10) $x\to y\le(z\to x)\to(z\to y)$, $(x\to y)\le(y\to z)\to(x\to z)$;

(p11) $(x\to y)*(y\to z)\le x\to z$;

(p12) $(x\vee y)\to z=(x\to z)\wedge(y\to z)$, $z\to(x\wedge y)=(z\to x)\wedge(z\to y)$.

证明. (p1)~(p12)的证明可参考文献[5].我们以(p6)为例证明之.

$\forall x,y,z\in L$,

(1) 因为 $y,z\le y\vee z$,由定义 1(2)知:

$x*y\le x*(y\vee z)$, $x*z\le x*(y\vee z)$.

(2) $\forall t\in L$,设 $x*y\le t$ 且 $x*z\le t$.则由定义 1(3)知: $y\le x\to t$ 且 $z\le x\to t$.因此, $y\vee z\le x\to t$.即 $x*(y\vee z)\le t$.

由(1)、(2)知: $x*(y\vee z)$ 是 $x*y$ 和 $x*z$ 的上确界,即 $x*(y\vee z)=(x*y)\vee(x*z)$. 证毕.

定义 3. 剩余格 L 若满足预线性公理:

$$\forall x,y\in L,\ (x\to y)\vee(y\to x)=1,$$

则称 L 为 MTL-代数.

定义 4. 剩余格 L 若满足弱预线性公理:

$$\forall x,y\in L,\ (x\to(x\to y))\vee(y\to(y\to x))=1,$$

则称 L 为 WMTL-代数.

命题 1. MTL-代数是 WMTL-代数.

证明. 设 L 是 MTL-代数, $\forall x,y\in L$,由于 $1\ge x$, $1\ge y$,结合 $\to$ 对第一变量的递减性,因此,

$1\to(x\to y)\le x\to(x\to y)$, $1\to(y\to x)\le y\to(y\to x)$.

再由引理 1(p1)得

$$x\to y\le x\to(x\to y),\ y\to x\le y\to(y\to x).$$

所以, $(x\to y)\vee(y\to x)\le(x\to(x\to y))\vee(y\to(y\to x))$.

再由定义 3 知: $(x\to y)\vee(y\to x)=1$,

因此, $(x\to(x\to y))\vee(y\to(y\to x))=1$.

因此,根据定义 4 知: L 是 WMTL-代数. 证毕.

注 1. WMTL-代数不必是 MTL-代数.

设 $L=\{0,a,b,c,d,e,1\}$,其上格的结构如图 1

所示，$*$ 运算见表 1，$\to$ 运算见表 2.

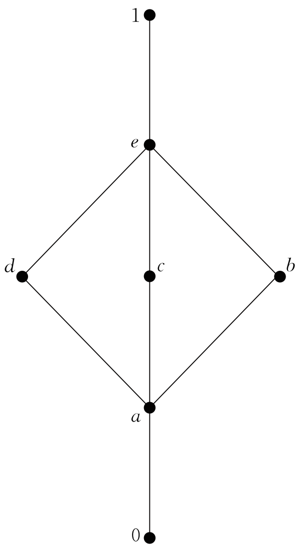


图 1　格 L 的结构

表 1　L 上的 $*$ 运算

$*$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	a	a	0	a	b
c	0	0	a	0	a	a	c
d	0	0	0	a	a	a	d
e	0	0	a	a	a	a	e
1	0	a	b	c	d	e	1

表 2　L 上的 $\to$ 运算

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1
b	d	e	1	e	e	1	1
c	c	e	e	1	e	1	1
d	b	e	e	e	1	1	1
e	a	e	e	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

(1) 可以验证，$(L,(*,\to))$ 是 WMTL-代数；

(2) 由于 $(d\to c)\vee(c\to d)=e\vee e=e\neq 1$，因此，$(L,(*,\to))$ 不是 MTL-代数.

3　蕴涵滤子及其等价刻画与生成方法

在 WMTL-代数完备性的研究中，我们发现通常逻辑代数中素 MP 滤子和全序商代数之间的相互确定关系在 WMTL-代数中并不成立，因此，我们在 WMTL-代数中引入了强于 MP 滤子的蕴含滤子，并通过 WMTL-代数中引入的增强集给出了蕴涵滤子的等价刻画和蕴含滤子的生成方法. 此外，我们在 WMTL-代数中引入了弱蕴涵滤子的概念，证明了 WMTL-代数中弱蕴涵滤子与 MP 滤子的等价性，从而进一步揭示了 MP 滤子和蕴涵滤子之间的内在联系.

在 WMTL-代数 L 中，设 $a\in L$，$n\in N$，本文约定：

(1) $a^0=1$；当 $n\geq 1$ 时，$a^n=a^{n-1}*a$. 称 a^n 为 a 的 n 次幂.

(2) 设 $D=\{x\to x^2\mid x\in L\}$，称 D 为增强集.

不难证明：$a^0,a^1,a^2,\cdots,a^n,\cdots$ 是 WMTL-代数 L 中的一个递减序列.

定义 5.　设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的子集，

(1) 若 F 满足：$\forall x,y\in L$ 有：

① $1\in F$；

② 若 $x,x\to y\in F$，则 $y\in F$.

则称 F 是 L 的 MP 滤子.

(2) 若 F 满足：$\forall x,y\in L$ 有：

① $F\neq\varnothing$；

② 若 $x,y\in F$，则 $x*y\in F$；

③ 若 $x\in F$，$x\leq y$，则 $y\in F$.

则称 F 是 L 的 $*$ 滤子.

(3) 若 F 满足：$\forall x,y\in L$ 有：

① $1\in F$；

② 若 $x\to(y\to z)$，$x\to y\in F$，则 $x\to z\in F$.

则称 F 是 L 的蕴涵滤子.

(4) 若 F 满足：$\forall x,y\in L$ 有：

① $1\in F$；

② 若 $x\to(y\to z)$，$x\to y\in F$，则 $x^2\to z\in F$.

则称 F 是 L 的弱蕴涵滤子.

定理 1.　WMTL-代数中蕴涵滤子是 MP 滤子.

证明.　若 F 是 WMTL-代数 L 的蕴涵滤子，则

① 由定义 5(3) 知：$1\in F$.

② 若 $x,x\to y\in F$，则由引理 1(p1) 知：

$$1\to x\in F,1\to(x\to y)\in F.$$

由定义 5(3) 知：$1\to y\in F$，即 $y\in F$.

所以 F 是 MP 滤子.　　证毕.

例 1.　WMTL-代数中，存在 MP 滤子不必是蕴涵滤子.

事实上，在注 1 中所示的 WMTL-代数中，取 $F=\{1\}$，则可证 F 是 MP 滤子. 由于

$$a\to(a\to 0)=1,\ a\to a=1,\ a\to 0=e,$$

因此，

$$a\to(a\to 0)\in F,\ a\to a\in F,\ a\to 0\notin F,$$

从而 F 不是蕴涵滤子.　　证毕.

定理 2.　设 L 是 WMTL-代数，$F\subseteq L$，则下列命题等价：

(1) F 是 L 中的 $*$ 滤子；

(2) F 是 L 中的弱蕴涵滤子；

(3) F 是 L 中的 MP 滤子.

证明. (1)⇒(2)

若 F 是 L 中的 $*$ 滤子.

首先，由定义 5(2)①知 $F\neq\varnothing$，所以 $\exists a\in F$，由 $a\leq 1$ 知 $1\in F$.

其次，$\forall x,y,z\in L$，若 $x\rightarrow(y\rightarrow z)$，$x\rightarrow y\in F$，则由定义 5(2)②知：$(x\rightarrow(y\rightarrow z))*(x\rightarrow y)\in F$，又由引理 1(p2)可知：

$$
\begin{aligned}
&(x\rightarrow(y\rightarrow z))*(x\rightarrow y)*x^2\\
&=x*(x\rightarrow(y\rightarrow z))*x*(x\rightarrow y)\\
&\leq(y\rightarrow z)*y\\
&\leq z
\end{aligned}
$$

所以由伴随对定义可知：

$$(x\rightarrow(y\rightarrow z))*(x\rightarrow y)\leq x^2\rightarrow z,$$

因此由 $*$ 滤子是上集知 $x^2\rightarrow z\in F$.

所以 F 是 L 中的弱蕴涵滤子.

(2)⇒(3)

若 F 是 L 中的弱蕴涵滤子.

首先，由定义 5(4)①知 $1\in F$.

其次，$\forall x,y\in F$，若 x，$x\rightarrow y\in F$，则由引理 1(p1)知 $1\rightarrow x\in F$，$1\rightarrow(x\rightarrow y)\in F$，则由定义 5(4)②知 $1^2\rightarrow y\in F$，即 $y\in F$.

所以 F 是 L 中的 MP 滤子.

(3)⇒(1)

若 F 是 L 中的 MP 滤子.

首先，$1\in F$，所以，F 非空.

其次，若 $x,y\in F$，则由引理 1(p9)(p4)有 $1=x\rightarrow(y\rightarrow x*y)$，所以 $x\rightarrow(y\rightarrow x*y)\in F$，由 $x\in F$ 和定义 5(1)②知 $y\rightarrow x*y\in F$，再由 $y\in F$ 和定义 5(1)②知 $x*y\in F$.

第三，若 $x\in F$，$x\leq y$，因此，$x\rightarrow y=1$，所以，$x\rightarrow y\in F$，由定义 5(1)②知 $y\in F$.

因此 F 是 L 中的 $*$ 滤子. 证毕.

定理 3. 设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 中的蕴涵滤子，若 $x\rightarrow y$，$y\rightarrow z\in F$，则 $x\rightarrow z\in F$.

证明. 由引理 1(p10)知：$x\rightarrow y\leq(y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z)$. 由定理 1 知 F 是 MP 滤子，所以由 $x\rightarrow y\in F$ 知：$(y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z)\in F$，再由 $y\rightarrow z\in F$ 和定义 5(1)②知：$x\rightarrow z\in F$. 证毕.

定理 4. 设 L 是 WMTL-代数，D 是增强集，则 F 是 L 中的蕴涵滤子当且仅当① F 是 $*$ 滤子，② $D\subseteq F$.

证明. 必要性.

设 F 是 L 中的蕴涵滤子，则

①由定理 1 知 F 是 L 中的 MP 滤子，结合定理 2 知 F 是 L 中的 $*$ 滤子；

② $\forall x\in L$，由于 $x\rightarrow(x\rightarrow x^2)=1$，$x\rightarrow x=1$，因此，$x\rightarrow(x\rightarrow x^2)$，$x\rightarrow x\in F$，结合定义 5(3)②知：$x\rightarrow x^2\in F$. 因此，$D\subseteq F$.

充分性.

设 F 满足①，②.

因为 F 是 L 中的 $*$ 滤子，所以 $F\neq\varnothing$，因此 $\exists a\in F$，由 F 是上集知 $1\in F$.

若 $x\rightarrow(y\rightarrow z)$，$x\rightarrow y\in F$，由定理 2 知 F 是弱蕴涵滤子，所以 $x^2\rightarrow z\in F$，再由 $x\rightarrow x^2\in F$ 和定理 3 知：$x\rightarrow z\in F$.

因此，F 是 L 中的蕴涵滤子. 证毕.

定义 6. 设 L 是 WMTL-代数，A 是 L 的非空子集，则所有包含 A 的蕴涵滤子的交是包含 A 的最小的蕴涵滤子，称之为由 A 生成的蕴涵滤子，记作 $[A)$. 即 $[A)=\bigcap\{F\mid A\subseteq F, F\text{ 是 }L\text{ 中的蕴涵滤子}\}$.

定理 5. 设 L 是 WMTL-代数，A 是 L 的非空子集，D 是 L 的增强集. 则

$$[A)=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D,\text{使得 } v_1*\cdots*v_n\leq u\}.$$

证明. 见附录 1 定理 5 的证明.

推论 1. 设 L 是 WMTL-代数，D 是 L 的增强集. 则 $[D)=[1)$.

证明. 根据定理 5 可知：

$$
\begin{aligned}
[D)&=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in D,\text{使得 } v_1*\cdots*v_n\leq u\},\\
[1)&=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in D,\text{使得 } 1*v_1*\cdots*v_n\leq u\}\\
&=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in D,\text{使得 } v_1*\cdots*v_n\leq u\}.
\end{aligned}
$$

综上可知，$[D)=[1)$. 证毕.

4 蕴涵滤子和强同余关系的联系

为了在 WMTL-代数中讨论蕴涵滤子确定的商代数的性质，首先需要考虑 WMTL-代数中蕴涵滤子和同余关系之间的联系. 本节我们在 WMTL-代数中，提出了与蕴涵滤子相对应的概念-强同余关系，证明了 WMTL-代数中关于强同余关系的 1 的

等价类是 WMTL-代数中的蕴含滤子，WMTL-代数中由蕴涵滤子根据通常方法定义的强同余关系是 WMTL-代数中的强同余关系.

定义 7. 设 L 是 WMTL-代数，$\sim\subseteq L^2$. 若～满足：

(1) ～是 L 上的等价关系；

(2) ～保持运算，即 $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in L$，若 $x_1\sim y_1$，$x_2\sim y_2$，则 $x_1\circ x_2\sim y_1\circ y_2$，其中 $\circ\in\{\wedge,\vee,*,\rightarrow\}$；

(3) $\forall x\in L$，$x\rightarrow x^2\sim 1$.

则称～是 WMTL-代数 L 上的强同余关系.

定理 6. 设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的蕴涵滤子. 在 L 上定义二元关系 $\sim_F$：$\forall x,y\in L$，

$$x\sim_F y \text{ 当且仅当 } x\rightarrow y\in F \text{ 且 } y\rightarrow x\in F.$$

则 $\sim_F$ 是 L 上的强同余关系.

本文称 $\sim_F$ 是由蕴含滤子 F 诱导的强同余关系.

证明. 见附录 2 定理 6 的证明.

定理 7. 设 L 是 WMTL-代数，～是 L 上的强同余关系，则 $[1]_\sim$ 是 L 的蕴涵滤子. 这里，$[1]_\sim$ 是 1 关于强同余关系的等价类，即 $[1]_\sim=\{x\in L\,|\,x\sim 1\}$.

本文称 $[1]_\sim$ 是由强同余关系诱导的蕴涵滤子，记作 $F_\sim$.

证明. 首先，$1\in[1]_\sim$；其次，$\forall x, x\rightarrow y\in[1]_\sim$，则 $x\sim 1$，$x\rightarrow y\sim 1$. 由定义 7 知：$y\sim y$，由强同余关系保运算可知：$x\rightarrow y\sim 1\rightarrow y$，由引理 1(p1)知：$x\rightarrow y\sim y$. 再由强同余关系的传递性知：$y\sim 1$，因此，$y\in[1]_\sim$；第三，由定义 7(3)知：$D\subseteq[1]_\sim$.

综上，根据定理 4 知：$[1]_\sim$ 是蕴涵滤子. 证毕.

定理 8. 设 $(L,(\wedge,\vee,*,\rightarrow,0,1))$ 是 WMTL-代数，$F\subseteq L$，$\sim\subseteq L^2$.

(1) 如果 F 是 L 的蕴含滤子，则 $F_{\sim_F}=F$；

(2) 如果～是 L 上的强同余关系，则 $\sim_{F_\sim}=\sim$.

证明. (1) $\forall x\in L$，$x\in F_{\sim_F}$ 当且仅当 $x\sim_F 1$，当且仅当 $x\rightarrow 1\in F$ 且 $1\rightarrow x\in F$，当且仅当 $x\in F$. 因此，$F_{\sim_F}=F$.

(2) 设 $(x,y)\in\sim$，即 $x\sim y$，则由 $x\sim x$ 和～保运算可知：$x\rightarrow x\sim y\rightarrow x$. 由引理 1(p4)知：$x\rightarrow x=1$，所以 $y\rightarrow x\sim 1$. 因此，$y\rightarrow x\in F_\sim$；同理可知：$x\rightarrow y\in F_\sim$；所以，$x\sim_{F_\sim} y$. 从而，$\sim\subseteq\sim_{F_\sim}$.

反过来，设 $(x,y)\in\sim_{F_\sim}$，即 $x\sim_{F_\sim} y$，则 $x\rightarrow y\in F_\sim$ 且 $y\rightarrow x\in F_\sim$，则 $x\rightarrow y\sim 1$ 且 $y\rightarrow x\sim 1$. 因为 $x\sim x$，结合～保 $*$ 运算可知，$x*(x\rightarrow y)\sim x$，又因为 $y\sim y$，结合～保 $\wedge$ 运算可知：$x*(x\rightarrow y)\wedge y\sim x\wedge y$. 由引理 1(p7)知：$x*(x\rightarrow y)\le y$，所以，$x*(x\rightarrow y)=x*(x\rightarrow y)\wedge y$. 所以，$x*(x\rightarrow y)\sim x\wedge y$. 由～的传递性可知：$x\sim x\wedge y$. 同理可得：$y\sim x\wedge y$. 由～的传递性可知：$x\sim y$. 因此 $\sim_{F_\sim}\subseteq\sim$.

从以上两方面知：$\sim_{F_\sim}=\sim$. 证毕.

5 弱预线性的有限可积定理

本节我们证明 WMTL-代数中弱预线性的有限可积定理：在 WMTL-代数 L 中，$\forall x,y\in L$，$\forall n\in N_+$，

$$(x\rightarrow(x\rightarrow y))^n\vee(y\rightarrow(y\rightarrow x))^n=1.$$

为表述简便，本节约定：$\forall x,y\in L$，$A_{x\rightarrow y}=x\rightarrow(x\rightarrow y)$.

定理 9. 设 L 是剩余格，则 L 是 WMTL-代数当且仅当 $\forall x,y,z\in L$，$(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)\rightarrow((A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)\rightarrow z)=1$.

证明. 必要性.

$\forall x,y,z\in L$，由 WMTL-代数的定义可知 $A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x}=1$. 因此，由引理 1(p6～p7)知：

$$\begin{aligned}&(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)\\&=(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)*(A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x})\\&=((A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)*A_{x\rightarrow y})\vee\\&\quad((A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)*A_{y\rightarrow x})\\&=((A_{x\rightarrow y}*(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z))*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z))\vee\\&\quad((A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)))\\&\le(z*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z))\vee(z*(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z))\\&\le z\vee z=z.\end{aligned}$$

由引理 1(p4)知：$(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)*(A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)\rightarrow z=1$.

再由引理 1(p9)知：$(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)\rightarrow((A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)\rightarrow z)=1$.

充分性.

$\forall x,y,z\in L$，令 $z=A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x}$. 一方面根据已知得：$(A_{x\rightarrow y}\rightarrow z)\rightarrow((A_{y\rightarrow x}\rightarrow z)\rightarrow z)=1$. 另一方面，根据引理 1(p5)知：

$$A_{x\rightarrow y}\rightarrow z=A_{x\rightarrow y}\rightarrow A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x}=1,$$

$$A_{y\rightarrow x}\rightarrow z=A_{y\rightarrow x}\rightarrow A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x}=1,$$

代入上式得：$1\rightarrow(1\rightarrow z)=1$. 结合引理 1(p1)知：$z=1$，即 $A_{x\rightarrow y}\vee A_{y\rightarrow x}=1$.

所以 L 是 WMTL-代数. 证毕.

推论 2. 设 L 是 WMTL-代数，$x,y,z\in L$，则 $z=1$ 当且仅当 $A_{x\rightarrow y}\rightarrow z=1$ 且 $A_{y\rightarrow x}\rightarrow z=1$.

证明. 必要性. 由于 1 是最大元，结合引理 1(p4)可知等式成立.

充分性. 由于 L 是 WMTL-代数，结合定理 9

可得：$(A_{x\to y}\to z)\to((A_{y\to x}\to z)\to z)=1$. 又已知：$A_{x\to y}\to z=1$ 且 $A_{y\to x}\to z=1$. 所以，$1\to(1\to z)=1$. 结合引理 1 (p1)得：$z=1$. 证毕.

引理 2. 设 $n\in N_+$，L 是 WMTL-代数. $\forall x,y\in L,\forall k\in N_+$，有：

$$A^n_{x\to y}*A^k_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1.$$

证明. 当 $k\geq n+1$ 时，

由于 $A^n_{x\to y}*A^k_{y\to x}\leq A^k_{y\to x}\leq A^{n+1}_{y\to x}\leq A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}$，

所以，根据引理 1(p4)得

$$A^n_{x\to y}*A^k_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1.$$

特别地，$A^n_{x\to y}*A^{n+1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

结合引理 1(p4)知：$A_{y\to x}\to(A^n_{x\to y}*A^{n+1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

由对称性可知：$A_{x\to y}\to(A^n_{x\to y}*A^n_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

根据推论 2 知：$A^n_{x\to y}*A^n_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

设当 $k=m(2\leq m\leq n)$ 时有：$A^n_{x\to y}*A^m_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

由引理 1(p9)知：$A_{y\to x}\to(A^n_{x\to y}*A^{m-1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

由于，$A^{n+1}_{x\to y}*A^{m-1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

由引理 1(p9)知：$A_{x\to y}\to(A^n_{x\to y}*A^{m-1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

由推论 2 知：$A^n_{x\to y}*A^{m-1}_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

利用上述方法以此类推，最后可得：

$A^n_{x\to y}*A_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

综上，$\forall x,y\in L,\forall k\in N_+$，有：

$$A^n_{x\to y}*A^k_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1.$$ 证毕.

推论 3. 设 $n\in N_+$，L 是 WMTL-代数，$\forall x,y\in L$，有：$A^n_{x\to y}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

证明. $\forall x,y\in L$，

由引理 2 知：$A^n_{x\to y}*A_{y\to x}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$.

结合引理 1(p9)知：$A_{y\to x}\to(A^n_{x\to y}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

又因为，$A^{n+1}_{x\to y}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$，

结合引理 1(p9)知：$A_{x\to y}\to(A^n_{x\to y}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x})=1$.

根据推论 2 得：$A^n_{x\to y}\to A^{n+1}_{x\to y}\vee A^{n+1}_{y\to x}=1$. 证毕.

定理 10(弱预线性的有限可积定理). 设 L 是 WMTL-代数，则 $\forall n\in N_+,\forall x,y\in L$，

$$A^n_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}=1.$$

证明. 对 n 用数学归纳法. $\forall x,y\in L$，

当 $n=1$ 时，由 WMTL-代数定义知：$A_{x\to y}\vee A_{y\to x}=1$. 因此，命题成立.

假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $A^k_{x\to y}\vee A^k_{y\to x}=1$.

则当 $n=k+1$ 时，由推论 3 知：

$A^k_{x\to y}\to A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}=1$；$A^k_{y\to x}\to A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}=1$.

结合引理 1(p4)知：

$A^k_{x\to y}\leq A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}$，$A^k_{y\to x}\leq A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}$.

所以，$A^k_{x\to y}\vee A^k_{y\to x}\leq A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}$. 结合归纳假设可知：$A^{k+1}_{x\to y}\vee A^{k+1}_{y\to x}=1$.

综上，$\forall n\in N_+,\forall x,y\in L$，有：$A^n_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}=1$.

证毕.

推论 4. 设 L 是 WMTL-代数，则

$\forall m,n\in N_+,\forall x,y\in L$，有：$A^m_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}=1$.

证明. $\forall x,y\in L,\forall m,n\in N_+$，不妨设 $m\leq n$，结合定理 10 得：$A^m_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}\geq A^n_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}=1$. 因此，$A^m_{x\to y}\vee A^n_{y\to x}=1$. 证毕.

6 由蕴涵滤子诱导的商代数

上节中我们证明了 WMTL-代数中由一个蕴涵滤子按照通常方法诱导一个 WMTL-代数中的强同余关系，因此，通过 WMTL-代数中的一个蕴涵滤子可以得到关于其诱导的强同余关系的一个商代数. 本节我们讨论通过 WMTL-代数中的蕴涵滤子确定的商代数的性质. 得到了 WMTL-代数中素蕴涵滤子和该 WMTL-代数的线性商代数之间是相互确定的结论. 本节的结果是证明 WMTL-代数嵌入定理的准备工作.

定义 8. 设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 中的蕴涵滤子(或 MP 滤子)，若满足：$\forall x,y\in L$，有 $x\to(x\to y)\in F$ 或 $y\to(y\to x)\in F$，则称 F 是 L 的素蕴涵滤子(或素 MP 滤子).

引理 3. 设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的蕴涵滤子，则 F 是 L 中的素蕴涵滤子当且仅当 $\forall x,y\in L$，$x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$.

证明. 必要性.

若 F 是素蕴涵滤子，则 $\forall x,y\in L$，有 $x\to(x\to y)\in F$ 或 $y\to(y\to x)\in F$. 不妨设 $x\to(x\to y)\in F$，因为 $x\to x=1$，所以，$x\to x\in F$，则由定义 5(3)② 知：$x\to y\in F$.

充分性.

若 $\forall x,y\in L$，有 $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$，不妨设 $x\to y\in F$，由于蕴涵滤子关于第一变量不增和 $x\leq 1$

可知：$x \to (x \to y) \geq 1 \to (x \to y) = x \to y$.
再由 MP 滤子是上集和定理 1 知：蕴涵滤子为上集，所以 $x \to (x \to y) \in F$. 由定义 8 知：F 是 L 的素蕴涵滤子.　　证毕.

注 2.　在 WMTL-代数 L 中，若 F 是 L 的 MP 滤子，则引理 3 的结论不必成立.

例如，在注 1 所示的 WMTL-代数 L 中，取 $F=\{1\}$，根据定义 8 容易验证 F 是 L 的素 MP 滤子，但 $d \to c = e$，$c \to d = e$，因此，$d \to c \notin F$ 且 $c \to d \notin F$.

引理 4[27].　设 L 是非空集合，$0,1 \in L$. 若二元运算 $\wedge, \vee: L^2 \to L$ 满足下列性质：$\forall x,y,z \in L$，

(L1)(幂等律)　$x \wedge x = x, x \vee x = x$；

(L2)(结合律)　$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$，
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$；

(L3)(交换律)　$x \wedge y = y \wedge x$，$x \vee y = y \vee x$；

(L4)(吸收律)　$x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$；

(L5)(幺元律)　$x \wedge 1 = x$；$x \vee 0 = x$.

则当在 L 上定义二元关系$\leq$：$\forall x,y \in L$，$x \leq y$ 当且仅当 $x \wedge y = x$ 时，$(L;\leq)$是格，0 是最小元，1 是最大元，且 $\forall x,y \in L$，

$$\sup\{x,y\} = x \vee y,\ \inf\{x,y\} = x \wedge y.$$

定理 11.　设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的蕴涵滤子，$\sim_F$是 L 上由 F 诱导的强同余关系. 则

(1) 商代数 $L/\sim_F$是 WMTL-代数；

(2) $L/\sim_F$是全序的 WMTL-代数当且仅当 F 是素蕴涵滤子.

证明.　见附录 3 定理 11 的证明.

7　WMTL-代数的嵌入定理

本节中首先我们利用 WMTL-代数中蕴涵滤子的生成方法和弱预线性的有限可积定理，证明了 WMTL-代数中包含给定蕴涵滤子并不含一个特定元素(不属于原蕴涵滤子)的素蕴涵滤子的存在性. 最后利用 WMTL-代数中素蕴含滤子确定的线性商代数证明了 WMTL-代数的条件嵌入定理：满足条件$[1)=\{1\}$的 WMTL-代数$(L,(\wedge,\vee,*,\to,0,1))$同构于一族全序的 WMTL-代数的乘积代数的子代数.

定理 12.　设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的蕴涵滤子，$z \in L$，则 $F' = \{u \mid \exists v \in F, \exists k \in N$，使得 $v * z^k \leq u\}$是包含 F 和 z 的最小蕴涵滤子.

证明.　由定理 5 知：$F' = [F \cup \{z\})$是包含 F 和 z 的最小蕴涵滤子. 因为 F 是 L 的蕴涵滤子，则由定理 4 结合定义 5(2)知：F 对 $*$ 封闭，并且 $D \subseteq F$，结合定理 5 得

$$\begin{aligned} F' &= [F \cup \{z\}) \\ &= \{u \in L \mid \exists n \in N, \exists v_1, \cdots, v_n \in F \cup \{z\} \cup D, \text{使得 } v_1 * \cdots * v_n \leq u\} \\ &= \{u \in L \mid \exists n \in N, \exists v_1, \cdots, v_n \in F \cup \{z\}, \text{使得 } v_1 * \cdots * v_n \leq u\} \\ &= \{u \mid \exists v \in F, \exists k \in N, \text{使得 } v * z^k \leq u\}. \end{aligned}$$
证毕.

定理 13.　设 L 是 WMTL-代数，F 是 L 的蕴涵滤子，$a \notin F$，则存在素蕴涵滤子 F'，使得 $a \notin F'$.

证明.　令 Γ 是 WMTL-代数 L 中所有不含 a 的蕴涵滤子之集，即

$$\Gamma = \{F' \subseteq L \mid F' \text{是 } L \text{ 的蕴涵滤子}, a \notin F'\}.$$

由条件 F 是 L 的蕴涵滤子且 $a \notin F$ 知：$F \in \Gamma$，因此，$(\Gamma, \subseteq)$在集合包含序关系下是非空偏序集. 容易证明 Γ 中任一链 $\{F_t\}_{t \in I}$ 在 Γ 中以 $\bigcup_{t \in I} F_t$ 为上界，由 Zorn 引理知 Γ 中存在极大元 F'，并且 $a \notin F'$. 下面用反证法证明 F'是素蕴涵滤子.

假设 F'不是素蕴涵滤子. 则 $\exists x, y \in L$，使得 $x \to (x \to y) \notin F'$，$y \to (y \to x) \notin F'$，令

$$F'_1 = [F' \cup \{x \to (x \to y)\}),$$
$$F'_2 = [F' \cup \{y \to (y \to x)\}),$$

根据定理 12 知：

$F'_1 = \{u_1 \mid \exists v \in F, \exists n \in N,\ \text{s.t.}\ (x \to (x \to y))^n \leq u_1\}$，

$F'_2 = \{u_2 \mid \exists v \in F, \exists n \in N,\ \text{s.t.}\ (y \to (y \to x))^n \leq u_2\}$.

(1) 由定理 12 知 F'_1，F'_2是蕴含滤子，且包含 F'；

(2) $a \notin F'_1$ 或 $a \notin F'_2$.

事实上，假若 $a \in F'_1$且 $a \in F'_2$. 则由 F'_1，F'_2定义可知：

$\exists v_1 \in F', \exists n_1 \in N$，使得 $v_1 * (x \to (x \to y))^{n_1} \leq a$，

$\exists v_2 \in F', \exists n_2 \in N$，使得 $v_2 * (y \to (y \to x))^{n_2} \leq a$.

取 $v = v_1 * v_2$，结合 $*$ 是单调增加的和推论 4，引理 1 (p6)可知：

$$\begin{aligned} a &\geq (v * (x \to (x \to y))^{n_1}) \vee (v * (y \to (y \to x))^{n_2}) \\ &\geq v * ((x \to (x \to y))^{n_1} \vee (y \to (y \to x))^{n_2}) = v. \end{aligned}$$

再由 MP 滤子是上集和定理 1 及 F'是蕴涵滤子知 F'是上集，所以由 $v \in F'$和 $a \geq v$ 可知 $a \in F'$，与条件 $a \notin F'$矛盾.

结合(1)，(2)可知：$F'_1 \in \Gamma$ 或 $F'_2 \in \Gamma$，这与 F'是 Γ 的极大蕴涵滤子矛盾.

所以，F'是素蕴涵滤子.　　证毕.

推论 5. 设 L 是 WMTL-代数，$a\in L$，$a\notin[1)$，则存在素蕴涵滤子 $F\subseteq L$，使得 $a\notin F$.

证明. 由定义 6 结合定理 13 知结论成立. 证毕.

命题 2. 设 $\{L_i\mid i\in I\}$ 是一族 WMTL-代数，$L=\prod_{i\in I}L_i$ 是其直积，在 L 中点式的定义偏序 $\leq$ 和 $\wedge,\vee,*,\rightarrow$ 运算，则 L 构成 WMTL-代数.

称 $\prod_{i\in I}L_i$ 为 $\{L_i\mid i\in I\}$ 的乘积代数.

证明. 在 L 中定义运算 $\wedge,\vee,*,\rightarrow$ 如下：$\forall x,y\in L$，$x=(x_i)_{i\in I}$，$y=(y_i)_{i\in I}$，$z=(z_i)_{i\in I}$，$x\circ y=(x_i\circ y_i)_{i\in I}$. 其中，$\circ\in\{\wedge,\vee,*,\rightarrow\}$.

根据定义 2，定义 4，引理 4 可验证 L 是 WMTL-代数. 证毕.

定理 14(嵌入定理). 如果 WMTL-代数 $(L,(\wedge,\vee,*,\rightarrow,0,1))$ 满足条件：$[1)=\{1\}$，则 L 同构于一族全序的 WMTL-代数的乘积代数的一个子代数.

证明. $\forall a\in L-\{1\}$，则 $a\notin[1)$，由推论 5 知：存在 L 的素蕴涵滤子 F_a 使得 $a\notin F_a$，令 $L_{F_a}=L/\sim_{F_a}$，则由定理 11 知：L_{F_a} 是全序的 WMTL-代数，则 $\prod_{a\in L-\{1\}}L_{F_a}$ 是全序的 WMTL-代数的乘积代数. 定义映射 $i:L\rightarrow\prod_{a\in L-\{1\}}L_{F_a}$，$\forall x\in L$，$i(x)=([x]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}$.

下证 i 是嵌入映射，即单同态(同态单映射).

(1) i 是单射.

$\forall x,y\in L$，$x\neq y$，则 $x\not\leq y$ 或 $y\not\leq x$. 不妨设 $x\not\leq y$，则 $x\rightarrow y\neq 1$，则由推论 5 知 L 存在素蕴涵滤子 $F_{x\rightarrow y}$，使得 $x\rightarrow y\notin F_{x\rightarrow y}$，则在 L_F 中，$[x]_{F_{x\rightarrow y}}\not\leq[y]_{F_{x\rightarrow y}}$，从而在 L_F 中，$[x]_{F_{x\rightarrow y}}\neq[y]_{F_{x\rightarrow y}}$，因此，在 $\prod_{a\in L-\{1\}}L_{F_a}$ 中，$([x]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}\neq([y]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}$，即 $i(x)\neq i(y)$.

(2) i 保运算.

$\forall\circ\in\{\wedge,\vee,*,\rightarrow\}$，由定理 11 和命题 2 可知：$\forall x,y\in L$，

$$
\begin{aligned}
i(x)\circ i(y)&=([x]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}\circ([y]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}\\
&=([x]_{F_a}\circ([y]_{F_a}))_{a\in L-\{1\}}\\
&=([x\circ y]_{F_a})_{a\in L-\{1\}}=i(x\circ y).
\end{aligned}
$$

因此，$i:L\rightarrow\prod_{a\in L-\{1\}}L_{F_a}$ 是同态单映射. 证毕.

致 谢 作者对审稿人和编辑给予本文的细致的修改建议表示衷心感谢！

参 考 文 献

[1] Wang Pei-Zhuang, Li Hong-Xing. The Fuzzy System Theory and Fuzzy Computer. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese)
(汪培庄，李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京：科学出版社，1996)

[2] Chen Shu-Kai. Many-Valued Logic Circuit with Neural Networks and Fuzzy Computer. Beijing: National Defence Industry Press, 2002(in Chinese)
(陈书开. 多值逻辑电路与神经网络和模糊计算机. 北京：国防工业出版社，2002)

[3] Dou Zhen-Zhong. Fuzzy Logic Control Technology with Its Application. Beijing: Beihang University Press, 1995(in Chinese)
(窦振中. 模糊逻辑控制技术及其应用. 北京：北京航空航天大学出版社，1995)

[4] Chang C C. Algebraic analysis of many-valued logics. Transection of the American Mathematics Society, 1958, 88(2): 467-490

[5] Pavelka J. On fuzzy logic I: Many-valued rules of inference, II: Enriched residuated lattice and semantics of propositional calculi, III: Semantical completeness of some many-valued propositional calculi. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1979, 25(1): 45-52, 119-134, 447-464

[6] Wu Wang-Ming. Fuzzy implication algebra. Fuzzy Stes and Systems, 1990, 4(1): 56-64(in Chinese)
(吴望名. Fuzzy 蕴涵代数. 模糊系统与数学，1990，4(1)：56-64)

[7] Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrech, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1998

[8] Xu Yang. Lattice implication algebra. Journal of Southwest Jiaotong University, 1993, 28(1): 20-27(in Chinese)
(徐扬. 格蕴涵代数. 西南交通大学学报，1993，28(1)：20-27)

[9] Xu Yang, Ruan Da, Qin Ke-Yun, Liu Jun. Lattice-Valued Logic. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2003

[10] Wang Guo-Jun. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Beijing: Science Press, 2000(in Chinese)
(王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社，2000)

[11] Esteva F, Gödo L. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271-288

[12] Pei Dao-Wu. The characterizations of MTL algebras. Acta Mathematica Sinica(Chinese Series), 2007, 50(6): 1201-1206(in Chinese)
(裴道武. MTL-代数的特征定理. 数学学报(中文版)，2007，50(6)：1201-1206)

[13] Zhang Xiao-Hong. Fuzzy Logic and It's Algebra Analysis. Beijing: Science Press, 2008(in Chinese)
(张小红. 模糊逻辑及其代数分析. 北京：科学出版社，2008)

[14] Turunen E. Mathematics Behind Fuzzy Logic. Berlin Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 1999

[15] Zhu Y Q, Xu Y. On filter theory of residuated lattices. Information Sciences, 2010, 180(19): 3614-3632

[16] Kondo M. Characterization of extended filters in residuated lattice. Soft Computing, 2014, 18(3): 427-432

[17] Liu Jun, Xu Yang. The Filter and the structure of lattice implication algebra. Chinese Science Bulletin, 1997, 42(10): 1049-1052(in Chinese)
(刘军，徐扬. 格蕴涵代数的滤子与结构. 科学通报，1997，42(10)：1049-1052)

[18] Jun Y B, Xu Y, Zhang X H. Fuzzy filters of MTL-algebras. Information Sciences, 2002, 175: 120-138

[19] Kim K H, Zhang Q, Jun Y B. On fuzzy filters of MTL-algebras. Journal of Fuzzy Mathematics, 2002, 10(4): 981-989

[20] Liu L Z, Li K T. Fuzzy filters of BL-algebras. Information Sciences, 2005, 173: 141-154

[21] Kondo M, Dudek W A. Filter theory of BL-algebras. Soft Computing, 2008, 12(5): 419-423

[22] Haveshki M, Saeid A B, Eslami E. Some type of filters in BL-algebras. Soft Computing, 2005, 10(8): 657-664

[23] Pei Dao-Wu, Wang Guo-Jun. The completeness and application of L^*. Science in China (Series E), 2002, 32(1): 56-64(in Chinese)
(裴道武，王国俊. 形式系统 L^* 的完备性及其应用. 中国科学(E 辑)，2002，32(1)：56-64)

[24] Wu Hong-Bo, Wang Ning. MT ideals of regular FI algebras with their applications. Acta Electronic Sinica, 2013, 41(7): 1389-1394(in Chinese)
(吴洪博，汪宁. 基于正则 FI 代数的 MT 理想及其应用. 电子学报，2013，41(7)：1389-1394)

[25] Wu Hong-Bo, Wang Na. The extension of MT ideals and the existence of prime MT ideal in BR_0-algebras. Acta Electronic Sinica, 2015, 43(6): 1137-1143(in Chinese)
(吴洪博，王娜. BR_0代数中 MT 理想的扩展及素 MT 理想的存在性. 电子学报，2015，43(6)：1137-1143)

[26] Wang Xia-Xia, Wu Hong-Bo. Corresponding theorem between deductive system and congruence relation in weak MTL algebras. Journal of University of Jinan (Science and Technology), 2015, 29(4): 297-302(in Chinese)
(王霞霞，吴洪博. 弱 MTL-代数的演绎系统与同余关系的对应定理济南大学学报(自然科学版)，2015，29(4)：297-302)

[27] Davey B A, Priestley H A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990

附录 1.　定理 5 的证明.

令 $M=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D,\ \text{s.t.}\ v_1*\cdots*v_n\le u\}$.

(1) M 是蕴涵滤子.

①若 $x,y\in M$，则由 M 定义可知：

$\exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D$，使得：$v_1*\cdots*v_n\le x$，

$\exists m\in N, \exists u_1,\cdots,u_m\in A\cup D$，使得：$u_1*\cdots*u_m\le y$.

因此，$v_1*\cdots*v_n*u_1*\cdots*u_m\le x*y$. 所以，$x*y\in M$.

②若 $x\in M, x\le y$，则由 M 定义可知：

$\exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D$，使得：$v_1*\cdots*v_n\le x$，

因为 $x\le y$，所以 $v_1*v_2*\cdots*v_n\le y$.

由定义知：$y\in M$.

③ $\forall x\in D$，由 $x\le x$ 可知 $x\in M$. 即 $D\subseteq M$.

综合①～③可知 M 是蕴涵滤子.

(2) $A\subseteq M$.

事实上，$\forall x\in A$，由 $x\le x$ 可知，$x\in M$. 因此，$A\subseteq M$.

(3)设 M' 是包含 A 的蕴涵滤子，下证 $M\subseteq M'$.

$\forall x\in M$，则由 M 定义可知：

$\exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D$，使得：$v_1*v_2*\cdots*v_n\le x$.

又结合结合定理 4：知 $A\subseteq M', D\subseteq M'$，因此，

$\exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in M'$，使得：$v_1*v_2*\cdots*v_n\le x$.

再由 MP 滤子是上集和定理 1 知 M' 是上集，因此，$x\in M'$. 因此，$M\subseteq M'$.

结合(1)～(3)可知：M 是包含 A 的最小蕴涵滤子. 即 $[A)=\{u\in L\mid \exists n\in N, \exists v_1,\cdots,v_n\in A\cup D,\ \text{s.t.}\ v_1*\cdots*v_n\le u\}$.　　证毕.

附录 2.　定理 6 的证明.

(1) $\sim_F$ 是等价关系.

① 因为 $\forall x\in L, x\to x=1\in F$，所以 $x\sim_F x$.

② $\forall x,y\in L$，若 $x\sim_F y$，则 $x\to y\in F$ 且 $y\to x\in F$，因此，$y\sim_F x$.

③ $\forall x,y,z\in L$，若 $x\sim_F y, y\sim_F z$，则 $x\to y\in F$ 且 $y\to x\in F$；$y\to z\in F$ 且 $z\to y\in F$. 由定理 3 知 $x\to z\in F$ 且 $z\to x\in F$，因此，$x\sim_F z$.

根据①～③知：$\sim_F$ 是 L 中的等价关系.

(2) $\sim_F$ 保 $\wedge, \vee, *, \to$ 运算.

由强同余关系～的传递性可知，在证明～保运算时，我们只需证明 $\forall x_1,y_1\in L$，若 $x_1\sim y_1$，则 $\forall x\in L$，$x_1\circ x\sim y_1\circ x$ 即可. 其中 $\circ\in\{\wedge,\vee,*,\to\}$.

首先，$\forall x_1,y_1\in L$，若 $x_1\sim_F y_1$，则由 $\sim_F$ 的定义可知：$x_1\to y_1\in F, y_1\to x_1\in F$. $\forall x\in L$，

① 由引理 1(p2)知：$x_1\wedge x\le x_1\le(x_1\to y_1)\to y_1$，

所以，$(x_1\wedge x)*(x_1\to y_1)\le y_1$，

又因为：$(x_1\to y_1)*(x_1\wedge x)\le(x_1\wedge x)\le x$，

所以，$(x_1\to y_1)*(x_1\wedge x)\le y_1\wedge x$.

因此，$(x_1\to y_1)\le(x_1\wedge x)\to(y_1\wedge x)$.

同理，$(y_1\to x_1)\le(y_1\wedge x)\to(x_1\wedge x)$.

又由 MP 滤子是上集和定理 1 知 F 是上集，因此，

$(x_1\wedge x)\to(y_1\wedge x)\in F$ 且 $(y_1\wedge x)\to(x_1\wedge x)\in F$.

所以，$x_1\wedge x\sim_F y_1\wedge x$.

② 由引理 1(p2)知：

$(x_1\to y_1)*x_1\le y_1\le y_1\vee x$，$(x_1\to y_1)*x\le x\le y_1\vee x$，

所以，$((x_1\to y_1)*x_1)\vee((x_1\to y_1)*x)\le y_1\vee x$.

由引理 1(p6)知：

$(x_1\to y_1)*(x_1\vee x)=((x_1\to y_1)*x_1)\vee((x_1\to y_1)*x)$，

所以，$(x_1\to y_1)*(x_1\vee x)\le y_1\vee x$，

所以，$(x_1\to y_1)\le(x_1\vee x)\to(y_1\vee x)$.

同理，$(y_1\to x_1)\le(y_1\vee x)\to(x_1\vee x)$.

因此：$(x_1\vee x)\to(y_1\vee x)\in F$ 且 $(y_1\vee x)\to(x_1\vee x)\in F$.

所以，$x_1\vee x\sim_F y_1\vee x$.

③ 由引理 1(p2)知：$(x_1\to y_1)*x_1\le y_1$；

由 $*$ 是单调增加的知：$(x_1\to y_1)*x_1*x\le y_1*x$，

所以，$(x_1\to y_1)\le x_1*x\to y_1*x$.

同理，$(y_1\to x_1)\le y_1*x\to x_1*x$.

所以，$x_1*x\to y_1*x\in F$ 且 $y_1*x\to x_1*x\in F$.

所以，$x_1*x\sim_F y_1*x$.

④由引理 1(p10)知：

$x_1\to y_1\le(y_1\to x)\to(x_1\to x)$，$y_1\to x_1\le(x_1\to x)\to(y_1\to x)$，

且 $(y_1\to x)\to(x_1\to x)\in F$，$(x_1\to x)\to(y_1\to x)\in F$.

因此，$x_1\to x\sim_F y_1\to x$.

综合①～④知：$\sim_F$ 保 $\wedge,\vee,*,\to$ 运算.

(3) $\forall x\in L$，由于

$(x\to x^2)\to 1=1$，$1\to(x\to x^2)=(x\to x^2)$，

由定义 5(3)，定理 4 知：

$(x\to x^2)\to 1\in F$，$1\to(x\to x^2)\in F$.

因此，$x\to x^2\sim_F 1$.

综合(1)，(2)，(3)可知 $\sim_F$ 是强同余关系. 证毕.

附录 3. 定理 11 的证明.

定义 $[x]_F=\{y\in L\mid x\sim_F y\}$，则 $L/\sim_F=\{[x]_F\mid x\in L\}$. 由于 $\sim_F$ 是 L 中的强同余关系，因此在 L 中诱导的相关运算如下：$\forall x,y\in L$，

$[x]_F\wedge[y]_F=[x\wedge y]_F$； $[x]_F\vee[y]_F=[x\vee y]_F$；

$[x]_F*[y]_F=[x*y]_F$； $[x]_F\to[y]_F=[x\to y]_F$.

(1) $(L/\sim_F,\wedge,\vee,*,\to,[0]_F,[1]_F)$ 是 WMTL-代数.

① $(L,\wedge,\vee,[0]_F,[1]_F)$ 是有界格.

容易验证 $L/\sim_F$ 中 $\vee,\wedge$ 满足引理 4 中(L1)～(L5). 现于 $L/\sim_F$ 中定义关系 $\le$：$\forall x,y\in L$，$[x]_F\le[y]_F$ 当且仅当 $[x]_F\wedge[y]_F=[x]_F$，则根据引理 4 知：

$(L/\sim_F,(\wedge,\vee,*,\to,[0]_F,[1]_F))$ 是有界格，并且 $\forall x,y\in L$，$\sup\{[x]_F,[y]_F\}=[x]_F\vee[y]_F$，$\inf\{[x]_F,[y]_F\}=[x]_F\wedge[y]_F$. $[x]_F\le[1]_F$，$[0]_F\le[x]_F$.

并且 $L/\sim_F$ 上偏序关系的等价形式为：$[x]_F\le[y]_F$ 当且仅当 $x\wedge y\sim_F x$，当且仅当 $x\to y\in F$.

② $(L/\sim_F,*,[1]_F)$ 是以 $[1]_F$ 为单位元的交换半群.

根据 L 的剩余格性质，容易验证 $L/\sim_F$ 中 $*$ 是交换的，结合的，且 $\forall x\in L$，$[x]_F*[1]_F=[x*1]_F=[x]_F$.

③ $*$ 和 $\to$ 成伴随对. $\forall x,y,z\in L$，$[x]_F*[y]_F\le[z]_F$，当且仅当 $[x*y]_F\le[z]_F$，当且仅当 $x*y\to z\in F$，当且仅当 $x\to(y\to z)\in F$，当且仅当 $[x]_F\le[y\to z]_F$，当且仅当 $[x]_F\le[y]_F\to[z]_F$.

④ $\forall x,y,z\in L$，

$([x]_F\to([x]_F\to[y]_F))\vee([y]_F\to([y]_F\to[x]_F))$

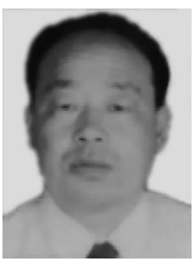
$=[x\to(x\to y)]_F\vee[y\to(y\to x)]_F$

$=[(x\to(x\to y))\vee(y\to(y\to x))]_F$

$=[1]_F$.

综合①～④可知 $L/\sim_F$ 是 WMTL-代数.

(2) $L/\sim_F$ 是全序的，当且仅当 $\forall x,y\in L$，$[x]_F\le[y]_F$ 或 $[y]_F\le[x]_F$；当且仅当 $\forall x,y\in L$，$x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$；当且仅当 F 是素蕴涵滤子. 证毕.



WU Hong-Bo, born in 1959, Ph. D., professor. His research interests include non-classical mathematical logics and topology on lattice.

LIANG Ying, born in 1992, M. S. Her research interests include non-classical mathematical logics and topology on lattice.

Background

The studying of many valued propositional logic systems is originated from the 1930s, one of the representative works of this period is *O Trówartosciowej* (*on three-valued logic*), written by J. Lukasiewicz in 1920, published in *Ruch*

Filozoficzny. In the seventies of twentieth century, J. Pavelka was suggested the fundamental structure for establishing a many-valued propositional logic system, and the enriched residuated lattices as the basic structure for relevant semantics in his series papers *On fuzzy logic*: *I*: *Many-valued rules of inference*, *II*: *Enriched residuated lattice and semantics of propositional calculi*, *III*: *Semantical completeness of some many-valued propositional calculi*. Published in *Zeitschrf Math Logik und Grundlagen der Math*. In 1998, the basic propositional logic system BL was put forward by P. Hájek in his work *Metamathematics of fuzzy logic* published by *Kluwer Academies Publishers*, taking Lukasiewicz propositional logic system, Gödel propositional logic system, product propositional logic system as examples. In the year of 2001, MTL propositional logic system was suggested by F. Esteva, L. Gödo. in their work: *Monoidal t-norm-based logic*: *towards a logic for left-continuous t-norms* published by *Fuzzy Sets and Systems*, which was obtained by deleting divisibility axiom from BL propositional logic system. In this paper, we introduce the concept of WMTL-algebra which is the structure of semantics of relevant a propositional logic system that we will research afterward. The properties with applications of implication filters of WMTL-algebras are investigated carefully.

The research in the present paper is affiliated with the National Science Foundation project Methods of Ordering, Algebras and Logics with Quantitative Models in Complex Inference with No. 11531009, the Study of Generalization of Theory of Truth Degree with Application with No. 61572016, the Research on Structure of Quantum Logic Algebras and Theory of Quantum Measure with No. 61673250, whose study fields include Domain theory, Quantale theory, Quantum logic, fuzzy reasoning, and non-classical mathematical logic. In the aspect of non-classical mathematical logic, we have some achievements recently that include *The theory of Γ-truth degrees of formulas and limit theorem in Lukasiewicz propositional logic* published by *Sciences in China* in 2015, *The characteristics of logic functions determined by* R_0-*implication operator* published by *Acta Mathematica Sinica* in 2014, *C-filters in enriched union semi-lattice with its application* published by *Acta Mathematica Sinica* in 2015.