计　算　机　学　报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$表达力的刻画与比较

申宇铭[1)]　郝天永[1),2)]　张倩生[3)]

[1)](广东外语外贸大学思科信息学院　广州　510006)

[2)](广东外语外贸大学语言工程与计算重点实验室　广州　510006)

[3)](广东外语外贸大学金融学院　广州　510006)

摘　要　逻辑的表达力及其推理问题的计算复杂性一直是逻辑研究的两个重点. 描述逻辑是一族重要的知识表示语言，目前，国内外对其计算复杂性的研究成果比较丰富. 而对其表达力的研究相对较少. 从逻辑语义的角度看，解释之间的互模拟关系是刻画表达力的一个有效途径，其较具代表性的结论是刻画命题模态逻辑表达力的 van Benthem 定理. 文中主要研究了包含顶概念、原子概念、原子概念否定、概念交和完全存在约束等 5 个概念构造子的描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$，给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系，建立了刻画$\mathcal{EL}^{\neg}$表达力的 van Benthem 定理. 在$\mathcal{EL}^{\neg}$基础之上，再增加概念并构造子，还给出了刻画$\mathcal{ELU}^{\neg}$表达力的 van Benthem 定理. 在这些工作的基础上，给出了$\mathcal{EL}$、$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$等 4 个系统表达力之间的比较结果. 再依据若干概念包含关系问题的计算复杂性结果，明确了如下结论：在表达力要求不高的情形下，可以优先选择$\mathcal{EL}$作为知识的表示语言. 而对表达力要求较高的情形下，应该优先选择$\mathcal{ALC}$作为知识的表示语言. 同时，在没有特殊要求的情况下，应尽量避免使用$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$作为知识的表示语言.

关键词　描述逻辑；概念描述；术语公理集；表达力

中图法分类号　TP18　　　**DOI**　10.11897/SP.J.1016.2018.00898

A Comparision and Characterizing Theorems for the Expressive Power in the Description Logics $\mathcal{EL}^{\neg}$ and $\mathcal{ELU}^{\neg}$

SHEN Yu-Ming[1)]　HAO Tian-Yong[1),2)]　ZHANG Qian-Sheng[3)]

[1)](*Cisco School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou*　510006)

[2)](*Guangdong Provincial Key Laboratory of Language Engineering and Computing, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou*　510006)

[3)](*School of Finance, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou*　510006)

Abstract　The two most important aspects of a logic are its expressive power and the complexity of reasoning tasks. The complexity of reasoning tasks for description logics has been explored extensively, but the problem of expressive power has hardly been addressed so far. Bisimulations between interpretations are the effective way to characterize the expressive power, and the classical result is the van Benthem characterizing theorem, which gives an exact condition for when a first-order formula with one free variable is equivalent to a modal logic formula. In this paper, a simulation for $\mathcal{EL}^{\neg}$(including atomic concept, top concept, conjunction concept, negative concept, and existential quantification) is addressed. Based on the simulation, the characterizing theorems of expressive power for concept descriptions and TBoxes, that is, sufficient and necessary conditions

收稿日期：2016-02-20；在线出版日期：2016-03-01. 本课题得到国家自然科学基金(61103169，61403088)、国家社会科学基金(13CGL130)、广东省自然科学基金(S2013010013050)和广东省高等学校学科与专业建设专项资金科技创新项目(2013KJCX0069)基金资助. **申宇铭**，男，1976 年生，博士，副教授，中国计算机学会(CCF)会员，主要研究方向为模态逻辑和描述逻辑. E-mail：ymshen2002@163.com. **郝天永**，男，1981 年生，博士，副教授，主要研究方向为知识获取和推理. **张倩生**，男，1975 年生，博士，教授，主要研究领域为人工智能.

for when a first-order formula is equivalent to a concept description or a TBox are set up. By the characterizing theorems for $\mathcal{EL}^{\neg}$ we obtain similar results for the description logic $\mathcal{ELU}^{\neg}$. Based on the characterizing theorems, a comparison result of the expressive power for description logics: $\mathcal{EL}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}$ and $\mathcal{ELU}^{\neg}$ is given. With the computational complexity results of the above description logics, we get the following result: under limited condition of the low expressive ability, $\mathcal{EL}$ is recommended as an knowledge representation language, while for the higher expressive ability, the $\mathcal{ALC}$ is selected. Also, if there are no special requirements, we should avoid the use of $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}$ and $\mathcal{ELU}^{\neg}$ as knowledge representation languages.

Keywords description logic; concept description; terminological axioms box; expressive power

1 引 言

大数据(Big Data)的诞生给学术界、产业界带来了一系列挑战[1-2]. 在大数据环境下，由于数据具有数据体量巨大(volume)、快速的数据流转和动态的数据体系(velocity)、多样的数据类型(variety)和价值巨大但密度低(value) 4 个特性，使数据访问面临一些急待解决的问题. 在这一应用背景下，2013 年欧盟启动了 Optique 项目，该项目旨在运用基于本体的数据访问方法(Ontology-Based Data Access，OBDA)解决大数据环境下的数据访问问题[3-4].

一个典型 OBDA 系统包含 2 个核心部分[5]：一是用于描述应用领域的本体；二是一组本体与数据源之间的语义映射，其中本体的任务是在语义层上连接一个或多个数据源，在已有数据源之上构建一个使用本体描述的概念视图，为客户端和系统之间的交互提供统一的访问入口. 大数据环境下数据的 4 个特性决定了在设计 OBDA 系统时，必须有针对性地，选择合适的本体语言进行概念建模. 鉴于描述逻辑[6](description logics)是 W3C 推荐本体语言 OWL 的基础，因此，可以从描述逻辑的角度，考察本体语言的选择问题. 例如，描述逻辑$\mathcal{ALC}$无法表示概念在数量方面的信息，而增加数量构造子形成的描述逻辑$\mathcal{ALCN}$，则可轻易地实现这一点；再如，时间是自然界中所有对象都具有的重要属性，而传统的描述逻辑无法表示概念的时态信息，而增加时态构造子，则可有效地弥补这一点. 但是，本体的表达力与计算复杂性是一种相互制约的关系. 一方面具备足够概念建模能力的本体其计算复杂性通常较高，难以满足大规模数据访问的需求；另一方面，能够进行高效推理的本体，其表达力却较低，无法满足概念模型对表达力的需求. 因此，在设计实际系统时，需要在表达力和推理问题的计算复杂性之间做出权衡，以期实现系统的最佳性能.

目前，国内外对描述逻辑计算复杂性的研究成果比较丰富，例如，文献[7-12]. 相对而言，现有表达力的研究结果还是比较零散，也没有形成完整的体系. 上述情况就导致了在设计 OBDA 系统时，只能从计算复杂性这一个单一的指标进行考查，而无法结合表达力予以综合考虑，进而也就无法确定表达力与计算复杂性之间是否达到最佳的平衡关系. 因此，对描述逻辑表达力的研究，不仅具有理论价值，而且还具有实际的工程意义.

对逻辑表达力的刻画有多种不同的方式[13]：语法的或语义的. 从语法的角度刻画表达力是指：在一个给定的逻辑中，合式公式(well-formed formulas)是如何构成的；从语义的角度刻画表达力是指：一个逻辑(源逻辑)相对另一个逻辑(目标逻辑)的表达力. 其基本过程是：给出源逻辑到目标逻辑的翻译；然后，给出源逻辑的公式与目标逻辑的公式在语义上逻辑等价的充分必要条件. 文中从语义角度，研究描述逻辑的相对表达力.

刻画逻辑的表达力较具代表性的结果是命题模态逻辑(propositional modal logic)的 van Benthem 刻画定理[14-15]：令 $A(x)$是仅包含一个二元谓词和一元谓词的一阶公式. $A(x)$与某个命题模态逻辑公式等价的充分必要条件是 $A(x)$的可满足性在解释之间的互模拟关系下是被保持的.

依据所含构造子的不同，描述逻辑可看成是一个系列的逻辑. 个体名(individual names)、概念名(concept names)及角色名(role names) 3 个部分构成了描述逻辑的基本语法对象. 以基本语法对象为基础，通过概念构造子或角色构造子形成复杂的概念描述；以概念描述为基础，再构成术语公理集

(Terminological axioms Boxes, TBox). 因此, 描述逻辑的表达力是由概念层次表达力和术语公理集层次表达力两个部分组成的[16]. 由此, 文中将分别给出概念和术语公理集两个层次 van Benthem 刻画定理.

描述逻辑$\mathcal{EL}$是一个具有较低的表达力和计算复杂性的逻辑. 文献[17]已经分别给出了其在概念及术语公理集层次的表达力 van Benthem 刻画定理. 本文研究在$\mathcal{EL}$基础之上, 增加原子概念否定构造子和概念并构造子后, 如何建立描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$的表达力刻画定理. 由 van Benthem 定理的内容可知, 解释之间的模拟关系是建立表达力刻画定理的关键环节. 在不同的构造子下, 模拟关系各有不同. 一方面, 模拟关系要对应已有的构造子; 另一方面, 模拟关系也要使得缺失的构造子不被满足. 只有这样的模拟关系, 才能恰到好处的体现出对表达力的刻画. 在$\mathcal{EL}$中增加原子概念否定构造子和概念并构造子后, 文献[17]中的模拟关系在$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$中就不再适用了, 所以需要针对新的构造子重新定义模拟关系.

文中给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$的模拟关系, 分别给出了其在概念和术语公理集层次的表达力刻画定理. 在这些工作的基础之上, 给出了$\mathcal{EL}$, $\mathcal{ELU}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}^{\neg}$等 4 个系统表达力的比较结果. 分析上述几个系统在表达力和计算复杂性之间的关系. 本文主要有以下 3 点贡献:

(1) 给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$的模拟关系和全局模拟关系, 证明了刻画$\mathcal{EL}^{\neg}$在概念和术语公理集层次表达力的 van Benthem 定理(定理 5 和定理 8);

(2) 由定理 5 和 8 的结果, 给出了描述逻辑$\mathcal{ELU}^{\neg}$概念及术语公理集的表达力刻画结果(推论 6 和 9), 并证明了$\mathcal{EL}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}^{\neg}$的表达力在概念和术语公理集两个层次都是严格递增的, $\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$之间的表达力是不可比较的(定理 12 和 14);

(3) 结合$\mathcal{EL}$, $\mathcal{ELU}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}^{\neg}$和$\mathcal{ALC}$ 5 个系统在概念之间包含关系推理问题的计算复杂性, 明确了如下结论: 在表达力要求不高的情形下, 可以优先选择$\mathcal{EL}$作为知识的表示语言. 而对表达力要求较高的情形下, 应该优先选择$\mathcal{ALC}$作为知识的表示语言. 同时, 在没有特殊要求的情况下, 应该尽量避免使用$\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$作为知识的表示语言.

本文第 2 节是背景知识, 主要包括以下内容: $\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$基本知识介绍; $\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$到一阶逻辑的对应关系; 互模拟关系定义及刻画$\mathcal{ALC}$表达力的 van Benthem 定理; 第 3 节是表达力的刻画, 由 2 小节组成: 第 1 小节, 给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$的模拟关系, 分别证明了$\mathcal{EL}^{\neg}$及$\mathcal{ELU}^{\neg}$在概念层次的 van Benthem 定理; 第 2 小节, 给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$的全局模拟关系, 分别证明了$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$在术语公理集层次的 van Benthem 定理; 第 4 节是表达力的比较, 证明了$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$等系统在表达力上是严格单调递增的, $\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$之间的表达力是不可比较的; 第 5 节是表达力与计算复杂性的比较分析, 给出了$\mathcal{EL}$, $\mathcal{ELU}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}^{\neg}$和$\mathcal{ALC}$ 5 个系统表达力和计算复杂性对比分析结果; 第 6 节是表达力相关工作的介绍; 第 7 节是总结及未来工作的展望.

2 背景知识

2.1 描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$

描述逻辑$\mathcal{EL}$族是一类重要的知识表示语言. 许多医学知识库中的医学知识都使用$\mathcal{EL}$族作为其知识表示的语言. 因此, 开展对$\mathcal{EL}$族表达力的研究, 不仅为研究表达力与计算复杂性之间的平衡关系, 同时也为医学知识库的构建, 提供了有力的支持和帮助.

个体名组成的可数集合 N_I、概念名组成的可数集合 N_C 及角色名组成的可数集合 N_R 3 个部分构成了描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$的基本语法对象. 以上述 3 个基本语法对象为基础, 可以构造出$\mathcal{EL}^{\neg}$的复杂概念.

定义 1. $\mathcal{EL}^{\neg}$的概念形式定义如下:

(1) 单个概念名 A 本身是原子概念, $\top$表示顶概念;

(2) 如果A是一个原子概念, 那么$\neg A$是$\mathcal{EL}^{\neg}$概念;

(3) 如果 C, D 是两个$\mathcal{EL}^{\neg}$概念, 那么 $C\sqcap D$ 是$\mathcal{EL}^{\neg}$概念;

(4) 如果 C 是一个$\mathcal{EL}^{\neg}$概念, r 是一个角色名, 那么$\exists r.C$是$\mathcal{EL}^{\neg}$概念;

(5) 当且仅当能够有限次地应用(1), (2), (3), (4)所得到的符号串都是$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念.

$\mathcal{EL}^{\neg}$的术语公理集$\mathcal{T}$是有限条形如 $C\sqsubseteq D$ 的概念包含式所构成的集合, 其中, C, D 分别是$\mathcal{EL}^{\neg}$的两个概念.

定义 2. 描述逻辑的解释 $I=(\Delta^I, \cdot^I)$, 其中非空集合 Δ^I表示论域, $\cdot^I$表示解释函数. I 将个体名 a 解释为论域Δ^I的一个元素; 将概念名 A 解释为论域Δ^I的一个子集; 将角色名 r 解释为 $\Delta^I\times\Delta^I$上的一个二元关系.

在概念名和角色名的解释基础上, 建立$\mathcal{EL}^{\neg}$的

复杂概念的解释.

定义 3.　$\mathcal{EL}^{\neg}$的复杂概念C的解释定义如下：

$$\top^{I}=\Delta^{I}$$
$$(C\sqcap D)^{I}=C^{I}\cap D^{I}$$
$$(\neg A)^{I}=\Delta^{I}/A^{I}$$

$(\exists r.C)^{I}=\{x\in\Delta^{I}\mid$存在一个$y\in\Delta^{I}$使得$(x,y)\in r^{I}$并且$y\in C^{I}\}$.

给定一个解释I，如果$C^{I}\subseteq D^{I}$，那么称I满足概念包含式$C\sqsubseteq D$，记作$I\models C\sqsubseteq D$. 如果对任意的$C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$，都有$I\models C\sqsubseteq D$，那么称$I$是术语公理集$\mathcal{T}$的模型，记作$I\models\mathcal{T}$.

2.2　$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$到一阶逻辑的翻译

描述逻辑的表达力由概念层次表达力和术语公理层次表达力两个部分组成. 为了研究描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$的相对表达力，需要给出概念和术语公理集到一阶逻辑的对应关系，再结合模拟关系，分别给出概念及术语公理集与一阶公式逻辑等价的充分必要条件，进而证明刻画逻辑表达力的 van Benthem 定理.

$\mathcal{EL}^{\neg}$到一阶逻辑的对应关系由 3 个部分组成：语言层翻译、语法层翻译和语义层翻译. 在语言层翻译，原子概念名A翻译为一元谓词符号A，原子角色名r翻译为二元谓词符号r；在语法层翻译，每一个概念C对应为一个一阶开公式$C(x)$. 语法层翻译σ具体形式定义如下：

$$\top^{\sigma_x}=(x=x)\qquad \top^{\sigma_y}=(y=y)$$
$$A^{\sigma_x}=A(x)\qquad A^{\sigma_y}=A(y)$$
$$(\neg A)^{\sigma_x}=\neg A(x)\qquad (\neg A)^{\sigma_y}=\neg A(y)$$
$$(C\sqcap D)^{\sigma_x}=C^{\sigma_x}\wedge D^{\sigma_x}\qquad (C\sqcap D)^{\sigma_y}=C^{\sigma_y}\wedge D^{\sigma_y}$$
$$(\exists r.C)^{\sigma_x}=\exists y(r(x,y)\wedge C^{\sigma_y})$$
$$(\exists r.C)^{\sigma_y}=\exists x(r(y,x)\wedge C^{\sigma_x})$$

由语法层翻译σ，可以将$\mathcal{EL}^{\neg}$的术语公理集$\mathcal{T}$的翻译为一阶闭公式. 即

$$\mathcal{T}^{\sigma}=\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$$

在语义层，任意给定描述逻辑的一个解释$I=(\Delta^{I},\cdot^{I})$，其一阶逻辑的解释$\sigma(I)$构造如下：

(1) $\Delta^{\sigma(I)}=\Delta^{I}$

(2) $A^{\sigma(I)}=A^{I}$

(3) $r^{\sigma(I)}=r^{I}$

由上述解释的构造形式，在文中我们将不对二种解释作特别的区分.

给出了翻译σ的具体形式，还需要讨论σ的合理性. 也就是说，翻译σ是保持概念和 TBox $\mathcal{T}$的可满足性. 给定一个解释I，$A(x)$在I下是可满足的，记作$I\models A(x)[x/a]$，这里符号$[x/a]$表示的意思是自由变元x被赋值为论域中的元素a. 上述翻译σ具有如下性质：

命题 1.　任意给定解释$I=(\Delta^{I},\cdot^{I})$及论域中的元素a，对$\mathcal{EL}^{\neg}$任意的概念C，

$$a\in C^{I}\text{，当且仅当 }I\models C^{\sigma_x}[x/a].$$

证明.　下面分原子概念、原子概念否定、概念交以及完全存在约束 4 种情形进行证明.

情形 1.　若$C=A$，则$A^{\sigma_x}=A(x)$. 假设$a\in A^{I}$，由σ在语义层的翻译，可得$I\models A(x)[x/a]$. 反之，如果$I\models A(x)[x/a]$，那么令原子概念A解释为A^{I}. 显然有$a\in A^{I}$.

情形 2.　若$C=\neg A$，则$(\neg A)^{\sigma_x}=\neg A(x)$. 假设$a\in(\neg A)^{I}$，则$a\notin A^{I}$. 于是就有$I\not\models A(x)[x/a]$. 即$I\models\neg A(x)[x/a]$. 反之，如果$I\models\neg A(x)[x/a]$，那么$I\not\models A(x)[x/a]$. 显然有$a\notin A^{I}$.

情形 3.　若$C=A\sqcap B$，则$(A\sqcap B)^{\sigma_x}=A^{\sigma_x}\wedge B^{\sigma_x}$. 假设$a\in(A\sqcap B)^{I}$，那么$a\in A^{I}$并且$a\in B^{I}$. 由归纳假设有：$I\models A^{\sigma_x}[x/a]$并且$I\models B^{\sigma_x}[x/a]$. 即$I\models(A^{\sigma_x}\wedge B^{\sigma_x})[x/a]$. 反之，如果$I\models(A^{\sigma_x}\wedge B^{\sigma_x})[x/a]$，那么$I\models A^{\sigma_x}[x/a]$并且$I\models B^{\sigma_x}[x/a]$. 由归纳假设就有$a\in(A\sqcap B)^{I}$.

情形 4.　若$C=\exists r.D$，则$(\exists r.D)^{\sigma_x}=\exists y(r(x,y)\wedge D^{\sigma_y})$. 假设$a\in(\exists r.D)^{I}$，则存在$b\in\Delta^{I}$，满足$(a,b)\in r^{I}$并且$b\in D^{I}$. 由归纳假设有$I\models r(x,y)[x/a][y/b]$，$I\models D^{\sigma_y}[y/b]$. 即$I\models\exists y(r(x,y)\wedge D^{\sigma_y})[x/a]$. 反之，如果$I\models\exists y(r(x,y\wedge D^{\sigma_y})[x/a]$，那么存在$b\in\Delta^{I}$，使得$I\models r(x,y)[x/a][y/b]$并且$I\models D^{\sigma_y}[y/b]$. 由归纳假设有$b\in D^{I}$并且$(a,b)\in r^{I}$. 即$a\in(\exists r.D)^{I}$.

命题 2.　任意给定解释$I=(\Delta^{I},\cdot^{I})$，对$\mathcal{EL}^{\neg}$任意的术语公理集$\mathcal{T}$，

$$I\models\mathcal{T}\text{，当且仅当 }I\models\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$$

证明.　假设$I\models\mathcal{T}$，那么对所有的$C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$，都有$C^{I}\subseteq D^{I}$. 因此，对任意的$a\in\Delta^{I}$，如果$a\in C^{I}$，那么$a\in D^{I}$. 即$I\models\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$. 反之，如果$I\models\bigwedge_{C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}}\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$，那么对任意的$a\in\Delta^{I}$，若$I\models C^{\sigma_x}[x/a]$，则$I\models D^{\sigma_x}[x/a]$. 即对所有的$C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$，都有$C^{I}\subseteq D^{I}$.

在$\mathcal{EL}^{\neg}$到一阶逻辑翻译的基础上，增加对概念并的翻译，即$(C\sqcup D)^{\sigma_x}=C^{\sigma_x}\vee D^{\sigma_x}$，$(C\sqcup D)^{\sigma_y}=C^{\sigma_y}\vee D^{\sigma_y}$，那么$\mathcal{ELU}^{\neg}$也能翻译到一阶逻辑之上，并且命题 1 和 2 的结果仍然成立.

构建翻译是比较不同逻辑之间差别的有效方法.有关翻译的合理性讨论,请参见文献[18-20].

2.3 互模拟关系

在研究系统之间的通讯及并发中,互模拟关系作为一类特殊的二元关系发挥了至关重要的作用.下面给出解释之间互模拟的定义[21].

定义 4[21]. 给定两个解释 $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$ 和 $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$. 设 M 是 $\Delta^{I_1}\times\Delta^{I_2}$ 上的一个二元关系,如果 M 满足下面 3 个条件:

(1) 对 Δ^{I_1} 中的任意元素 a_1 和 Δ^{I_2} 中的任意元素 a_2,如果 a_1Ma_2,那么对所有的概念名 A,都有 $a_1\in A^{I_1}$,当且仅当 $a_2\in A^{I_2}$;

(2) 对所有的角色名 r,如果 a_1Ma_2 并且 $(a_1,b_1)\in r^{I_1}$,那么存在 Δ^{I_2} 中的元素 b_2,满足 $(a_2,b_2)\in r^{I_2}$ 并且 b_1Mb_2;

(3) 对所有的角色名 r,如果 a_1Ma_2 并且 $(a_2,b_2)\in r^{I_2}$,那么存在 Δ^{I_1} 中的元素 b_1,满足 $(a_1,b_1)\in r^{I_1}$ 并且 b_1Mb_2.

那么称 M 是 I_1 到 I_2 的一个互模拟关系,记作 $M:I_1\rightleftharpoons I_2$.

由互模拟定义的条件(1)可知,对概念名 A 的解释,$I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$ 和 $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$ 是保持一致性的. 对条件(2)和(3)的理解如图 1 所示.

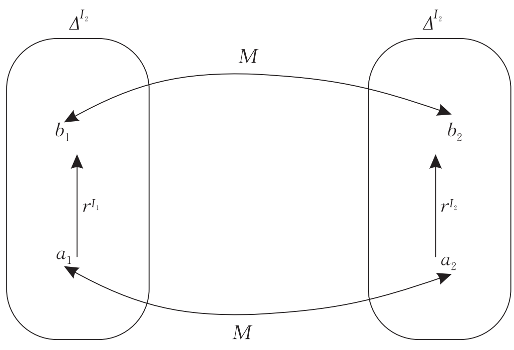

图 1 互模拟定义的几何解释

在图 1 中,在解释 I_1 下,I_1 论域中的元素 a_1 与元素 b_1 满足 r 关系;类似地,在解释 I_2 下,与 a_1 保持 M 关系的元素 a_2 和元素 b_2 也满足 r 关系,并且 b_1 和 b_2 具有 M 关系. 反之,如果元素 a_1 与 a_2 具有 M 关系,并且在解释 I_2 下,元素 a_2 与 b_2 满足 r 关系,那么在解释 I_1 下,元素 a_1 与 b_1 也满足 r 关系,并且 b_1 和 b_2 也保持 M 关系. 连接元素 a_1 和 a_2 的互模拟关系 M,记作 $M:(I_1,a_1)\rightleftharpoons(I_2,a_2)$.

定义 5[21]. 令 $A(x)$ 为一个一阶开公式. 对任意的解释 I_1 和 I_2,对任意的 $a_1\in\Delta^{I_1}$ 和 $a_2\in\Delta^{I_2}$ 以及 I_1 到 I_2 所有的互模拟关系 M,如果 a_1Ma_2,就有:若 $I_1\models A(x)[x/a_1]$,则 $I_2\models A(x)[x/a_2]$ 成立,那么称 $A(x)$ 在互模拟关系下是被保持的.

定理 3[21]. 令 $A(x)$ 为一个一阶开公式. $A(x)$ 与描述逻辑 $\mathcal{ALC}$ 的某个概念 C 等价的充要条件是该公式在互模拟关系下是被保持的.

定理 3 给出了一阶开公式 $A(x)$ 与 $\mathcal{ALC}$ 中的概念 C 等价的充分必要条件. 但是,定理 3 的互模拟关系只是针对 $\mathcal{ALC}$ 中概念时才成立. 如果在 $\mathcal{ALC}$ 基础上增加绝对数量限制构造子,那么定理 3 的结论就不成立.

令 $C=\geq 3.r$, $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$, $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$,其中,

$$\Delta^{I_1}=\{a,b,c\},\ r^{I_1}=\{(a,a),(a,b),(a,c)\},$$
$$s^{I_1}=\{(a,b)\};$$
$$\Delta^{I_2}=\{a',b',c'\},\ r^{I_2}=\{(a',c')\},\ s^{I_2}=\{(a',b')\};$$

令 $M=\{(a,a'),(a,c'),(b,b'),(b,c'),(c,c')\}$,易知 M 是一个互模拟关系. 因为 $a\in C^{I_1}$, $a'\notin C^{I_2}$,所以概念 C 在互模拟关系下是不被保持的. 由此可知,$\mathcal{ALC}$ 表达力严格弱于 $\mathcal{ALCN}$ 的表达力.

3 表达力刻画

本节由两小节组成:第一小节,证明概念层次的 van Benthem 定理;第二小节证明 TBox 层次的 van Benthem 定理.

3.1 概念层次 van Benthem 定理

本节证明 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 在概念层次的 van Benthem 定理. 首先给出 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的模拟关系,然后建立 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 的 van Benthem 定理.

定义 6. 令 $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$ 和 $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$ 分别是描述逻辑的两个解释. $\Delta^{I_1}\times\Delta^{I_2}$ 上的一个非空二元关系 M 称为 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的模拟关系,如果下面 2 个条件成立:

(1) 若 a_1Ma_2,则对所有的原子概念名 A,$a_1\in A^{I_1}$,当且仅当 $a_2\in A^{I_2}$;

(2) 对所有的角色名 r,若 $(a_1,b_1)\in r^{I_1}$ 并且 a_1Ma_2,则存在 $b_2\in\Delta^{I_2}$ 满足 $(a_2,b_2)\in r^{I_2}$ 并且 b_1Mb_2.

若 M 是连接 a_1 和 a_2 的 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟,记作:$M:(I_1,a_1)\rightharpoonup_{\mathcal{EL}^{\neg}}(I_2,a_2)$. 一阶开公式 $A(x)$ 在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟下是被保持的是指对所有的解释 I_1 和 I_2,对所有的 $a_1\in\Delta^{I_1}$ 和 $a_2\in\Delta^{I_2}$,以及 I_1 到 I_2 所有的 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟 M,都有若 a_1Ma_2 并且 $I_1\models A(x)[x/a_1]$,则 $I_2\models A(x)[x/a_2]$.

模拟关系与构造子之间存在对应关系. 一方面,

模拟关系要对应已有的构造子；另一方面，模拟关系也要使得缺失的构造子不被满足. 定义 6 给出的$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟的条件(1)对应原子概念和原子概念否定构造子，条件(2)对应完全存在约束构造子. 但是，由$x\in A\cup B$，可得$x\in A$或者$x\in B$，所以上述$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系还应同时满足概念并构造子. 为了使得概念并构造子不被满足，增加一个外在条件：解释的直积来解决这个问题.

设(I_i)，$i\in I$表示一簇解释，其解释的直积$\Pi_{i\in I}I_i$构造如下.

(1) $\Delta^{\Pi_{i\in I}I_i}=\{\bar{a}:I\rightarrow\bigcup_{i\in I}\Delta^{I_i}\mid$对$i\in I:\bar{a}_i=\bar{a}(i)\in\Delta^{I_i}\}$；

(2) $A^{\Pi_{i\in I}I_i}=\{\bar{a}\in\Delta^{\Pi_{i\in I}I_i}\mid$对$i\in I$：$a_i\in A^{I_i}\}$；

(3) $r^{\Pi_{i\in I}I_i}=\{(\bar{a},\bar{b})\mid$对$i\in I$：$(a_i,b_i)\in r^{I_i}\}$.

一阶开公式$A(x)$在解释的直积定义$\Pi_{i\in I}I_i$下是被保持的是指：如果对任意的一簇解释$(I_i)_{i\in I}$和$\bar{a}\in\Delta^{\Pi_{i\in I}I_i}$，若对所有的$i\in I$，$I_i\models A(x)[x/a_i]$，则$\Pi_{i\in I}I_i\models A(x)[x/\bar{a}]$.

命题 4. 对任意给定的$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念C和一簇解释I_i，$i\in I$，如下结论成立：如果对所有的$i\in I$，有$d_i\in C^{I_i}$，那么$(d_i)_{i\in I}\in C^{\Pi_{i\in I}I_i}$.

证明. 施归纳于概念C的结构.

情形 1. 若$C=A$. 由解释的直积的定义，如果对所有的$i\in I$，有$d_i\in C^{I_i}$，那么$(d_i)_{i\in I}\in C^{\Pi_{i\in I}I_i}$.

情形 2. 若$C=A\sqcap B$. 如果对所有的$i\in I$，有$d_i\in(A\sqcap B)^{I_i}$，那么$d_i\in A^{I_i}$并且$d_i\in B^{I_i}$. 由归纳假设，就有$\bar{d}\in A^{\Pi_{i\in I}I_i}$并且$\bar{d}\in B^{\Pi_{i\in I}I_i}$. 即$\bar{d}\in(A\sqcap B)^{\Pi_{i\in I}I_i}$.

情形 3. 若$C=\neg A$. 如果对所有的$i\in I$，有$d_i\in(\neg A)^{I_i}$，那么$d_i\notin A^{I_i}$. 由归纳假设，就有$\bar{e}\notin A^{\Pi_{i\in I}I_i}$即$\bar{d}\in(\neg A)^{\Pi_{i\in I}I_i}$.

情形 4. 若$C=\exists r.D$. 如果对所有的$i\in I$，有$d_i\in(\exists r.D)^{I_i}$，那么对所有的$i\in I$，都存在$e_i\in\Delta^{I_i}$，使得$(d_i,e_i)\in r^{I_i}$并且$e_i\in D^{I_i}$. 由解释直积的定义及归纳假设，就有$(\bar{d},\bar{e})\in r^{\Pi_{i\in I}I_i}$，$\bar{e}\in D^{\Pi_{i\in I}I_i}$即$\bar{d}\in(\exists r.D)^{\Pi_{i\in I}I_i}$.

命题 4 表明$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念在解释的直积下是被保持的. 但是概念并构造子在解释的直积下不是被保持的.

例 1. 令$I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$和$I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$分别是描述逻辑的两个解释，其中

$\Delta^{I_1}=\{d_1,d_2,d_3\}$，$A_1^{I_1}=\{d_1,d_3\}$，$A_2^{I_2}=\{d_1,d_2\}$，$r^{I_1}=\{(d_1,d_2)\}$，

$\Delta^{I_2}=\{d_1,d_2,d_3\}$，$A_1^{I_2}=\{d_1,d_2\}$，$A_2^{I_2}=\{d_2,d_3\}$，$r^{I_2}=\{(d_2,d_1)\}$.

因为$d_1\in(\exists r.\neg A_1\sqcup\exists r.\neg A_2)^{I_1}$，但是$d_1\notin(\exists r.\neg A_2)^{I_1}$并且$d_2\in(\exists r.\neg A_1\sqcup\exists r.\neg A_2)^{I_2}$而$d_2\notin(\exists r.\neg A_1)^{I_2}$，所以$(d_1,d_2)\notin(\exists r.\neg A_1\sqcup\exists r.\neg A_2)^{I_1\times I_2}$.

依据命题 4，证明如下$\mathcal{EL}^{\neg}$概念层次的 van Benthem 定理.

定理 5. 令$A(x)$是一个一阶开公式. $A(x)$与描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$的某个概念C逻辑等价的充分必要条件是$A(x)$在$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系和解释的直积下是被保持的.

证明思路. 必要条件. 如果$A(x)$与$\mathcal{EL}^{\neg}$的某个概念C等价，那么由命题 4 可知，$A(x)$在解释的直积下是被保持的. 再对原子概念、原子概念否定、概念交以及完全存在约束 4 种情形分别验证$A(x)$在$\mathcal{EL}^{\neg}$的模拟下是被保持的.

充分条件. 令$con(A(x))$表示$A(x)$逻辑推论的集合并且满足对所有的$\alpha\in con(A(x))$，都存在$\mathcal{EL}^{\neg}$的一个概念C，使得$C^{\sigma_x}=\alpha$. 假设$con(A(x))\models A(x)$，那么根据紧致性定理，就有结论成立. 考虑使用反证法证明：$con(A(x))\not\models A(x)$. 若$con(A(x))\not\models A(x)$，则一定存在一个解释$I$，满足$I\not\models A(x)[x/w]$但是$I\models con(A(x))[x/w]$. 我们的目标是构造一个解释$J$，使得$J\models A(x)[x/\bar{v}]$并且$(J,\bar{v})$至$(I,w)$存在一个$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系. 因为$A(x)$在$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟下是被保持的，所以导致$I\models A(x)[x/w]$，从而产生矛盾. 解释$J$构造步骤如下：

步骤 1. 令$\Gamma=\{\neg C^{\sigma_x}\mid C$是$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念并且$w\notin C^{I}\}$. 证明对每一个$\neg C^{\sigma_x}\in\Gamma$，$\{A(x),\neg C^{\sigma_x}\}$都是可满足的. 令解释$J$是所有的满足$\{A(x),\neg C^{\sigma_x}\}$解释的直积.

步骤 2. 将I扩充为ω饱和模型I^*(只有在饱和模型的情形下，才能证明建立的关系是$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系). 定义$\Delta^{J}\times\Delta^{I^*}$上的一个二元关系$M$如下：$a_1Ma_2$充分必要条件是对任意的$\mathcal{EL}^{\neg}$概念$D$，若$a_1\in D^{J}$，则$a_2\in D^{I^*}$.

步骤 3. 证明M是一个$\mathcal{EL}^{\neg}$的模拟关系，从而完成定理的证明.

按照上述步骤，具体的证明过程如下：

证明. $\Rightarrow$下面分原子概念、原子概念否定、概念交以及完全存在约束 4 种情形进行证明.

情形 1. 若$C=A$. 根据定义 6 可知$A(x)$在$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟下是被保持的.

情形 2. 若$C=A\sqcap B$. 假设a_1Ma_2，$a_1\in(A\sqcap B)^{I_1}$，于是就有$a_1\in A^{I_1}$，$a_1\in B^{I_1}$. 由归纳假设$a_2\in A^{I_2}$，$a_2\in B^{I_2}$. 即$a_2\in(A\sqcap B)^{I_2}$.

情形 3. 若 $C=\neg A$. 假设 a_1Ma_2, $a_1\in(\neg A)^{I_1}$，于是就有 $a_1\notin(A)^{I_1}$. 由归纳假设 $a_2\notin A^{I_2}$. 即 $a_2\in(\neg A)^{I_2}$.

情形 4. 若 $C=\exists r.D$. 若 a_1Ma_2 并且 $a_1\in(\exists r.D)^{I_1}$. 因为 $a_1\in(\exists r.D)^{I_1}$，所以 $\exists b_1\in\Delta^{I_1}$，满足 $(a_1,b_1)\in r^{I_1}$ 并且 $b_1\in D^{I_1}$. 依据 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的模拟定义就有：$\exists b_2\in\Delta^{I_2}$，满足 b_1Mb_2 同时 $(a_2,b_2)\in r^{I_2}$ 也成立. 由归纳假设就有 $b_2\in D^{I_2}$. 即 $a_2\in(\exists r.D)^{I_2}$.

$\Leftarrow$ 若 $A(x)$ 在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟关系及解释的直积下是被保持的. 令 $con(A(x))$ 表示 $A(x)$ 逻辑推论的集合并且满足对所有的 $\alpha\in con(A(x))$，都存在一个 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 概念 D，使得 $D^{\sigma_x}=\alpha$.

结论 1. 如果 $con(A(x))\models A(x)$，那么一定存在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的某个概念 D，使得概念 D 翻译后与一阶开公式 $A(x)$ 是逻辑等价的.

因为 $con(A(x))\models A(x)$，所以根据紧致性定理，就有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in con(A(x))$，并且 $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n\models A(x)$. 令 $D=D_1\sqcap\cdots\sqcap D_n$，其中 $D_1^{\sigma_x}=\alpha_1,\cdots,D_n^{\sigma_x}=\alpha_n$，那么概念 D 与 $A(x)$ 是逻辑等价的.

下面证明 $con(A(x))\models A(x)$. 假设 $A(x)$ 不是 $con(A(x))$ 的逻辑结论，那么 $con(A(x))\cup\{\neg A(x)\}$ 是可满足的. 令 $I\models con(A(x))\cup\{\neg A(x)\}[x/w]$，$\Gamma=\{\neg D^{\sigma_x}\mid D$ 是 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的概念并且 $w\notin D^I\}$.

结论 2. 对每一个一阶公式 $\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma$，都有 $\{A(x),\neg D^{\sigma_x}\}$ 是可满足的.

假设 $\{A(x),\neg D^{\sigma_x}\}$ 是不可满足的，那么就有 $A(x)\models D^{\sigma_x}$. 即 $D^{\sigma_x}\in con(A(x))$. 这与 Γ 的构造矛盾.

由结论 2，对任意的一阶公式 $\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma$，都存在解释 I_D，使得 $I_D\models A(x)[x/v_D]$，并且 $I_D\models\neg D^{\sigma_x}[x/v_D]$. 对每一个一阶公式 $\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma$，令 $J=\Pi_{\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma}I_D$，$\bar{v}=(v_D)_{\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma}$（$J$ 是所有这些 I_D 的直积）. 由于 $A(x)$ 在解释的直积下是被保持的，所以 $J\models DA(x)[x/\bar{v}]$.

结论 3. 对每一个 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的概念 D，若 $\bar{v}\in D^J$，则 $w\in D^I$.

证明. 假设 $w\notin D^I$，那么 $\neg D^{\sigma_x}\in\Gamma$. 于是 $I_D\models\neg D^{\sigma_x}[x/v_D]$ 即 $I_D\not\models D^{\sigma_x}[x/v_D]$. 由解释的直积定义，就有 $\bar{v}\notin D^I$.

令 I^* 是 I 的一个 ω 饱和模型. 定义 $\Delta^J\times\Delta^{I^*}$ 上的一个二元关系 M 如下：$\bar{a}_1Ma_2$，当且仅当对任意 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 概念 C，若 $\bar{a}_1\in C^J$，则 $a_2\in C^{I^*}$.

结论 4. M 是一个 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟关系.

若 $\bar{a}_1\in A^J$，那么由 M 的定义，$a_2\in A^{I^*}$. 反之，若 $\bar{a}_1\notin A^J$，则 $\bar{a}_1\in(\neg A)^J$. 对所有的角色名 r，假设 $(a_1,b_1)\in r^J$ 并且满足 a_1Ma_2. 令 $\Sigma=\{D\mid D$ 是 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 概念并且 $b_1\in D^J\}$. 那么对所有的 $D_1,\cdots,D_n\in\Sigma$，就有 $b_1\in(D_1,\cdots,D_n)^J$. 又因为 $(a_1,b_1)\in r^J$，所以 $a_1\in\exists r.(D_1,\cdots,D_n)^J$. 因为 a_1Ma_2，所以 $a_2\in\exists r.(D_1,\cdots,D_n)^{I^*}$. 即存在 $b_2\in\Delta^{I^*}$，满足 $(a_2,b_2)\in r^{I^*}$ 并且 $b_2\in(D_1,\cdots,D_n)^{I^*}$. 即 b_1Mb_2. 由此已经证明在 I^* 下，Σ 所有的有限子集都是可满足的. 又因为 I^* 是 ω 饱和模型，所以在 I^* 下，Σ 是可满足的. 即若 $(a_1,b_1)\in r^J$ 并且 a_1Ma_2，那么一定存在 $b_2\in\Delta^{I^*}$，满足 $(a_2,b_2)\in r^{I^*}$ 并且 b_1Mb_2.

由于 I^* 是 I 的 ω 饱和模型，根据 ω 饱和模型的性质及结论 3 和 4 的结果，存在一个 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 的模拟关系 M，使得元素 v 和 w 具有 M 关系. 又因为在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟关系下 $A(x)$ 是被保持的，所以由 $J\models A(x)[x/v]$，就有 $I\models A(x)[x/w]$. 但是这与 I 是不满足 $A(x)$ 的假设矛盾. 因此，$A(x)$ 是 $con(A(x))$ 的逻辑推论. 再由结论 1，可知 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 概念层次 van Benthem 定理成立.

定理 5 的结论，可以推广到 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 的情形.

推论 6. 令 $A(x)$ 是一阶开公式. $A(x)$ 与描述逻辑 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 的某个概念 C 等价的充分必要条件是 $A(x)$ 在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟下是被保持的.

证明. 证明方法与定理 5 类似. 在细节上的一点区别：要令 $\Gamma=\{\neg C^{\sigma_x}\mid C$ 是 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 的概念并且 $w\notin C^I\}$. 只需证明 $\{A(x)\}\cup\Gamma$ 是可满足的.

3.2 TBox 层次 van Benthem 定理

证明 TBox 层次的 van Benthem 定理要注意到如下事实：$\mathcal{EL}^{\neg}$ 的概念 C 对应到含一个自由变元的一阶开公式，而 TBox $\mathcal{T}$ 对应到一阶的闭公式. 为了应对这一变化，考虑将 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟关系由针对论域中一个单点的局部情形，加强为对论域的每一个点的全局情形.

定义 7. 令 $I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$ 和 $I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$ 分别是描述逻辑的两个解释. $\mathcal{EL}^{\neg}$ 全局模拟关系（记作 $I_1;\mathcal{EL}^{\neg}I_2$）定义如下.

(1) 对任意的 $a_1\in\Delta^{I_1}$，都存在 $a_2\in\Delta^{I_2}$ 以及 M_1 和 M_2 两个 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 模拟关系，使得 $M_1:(I_1,a_1)\rightarrow\mathcal{EL}^{\neg}(I_2,a_2)$ 并且 $M_2:(I_2,a_2)\rightarrow\mathcal{EL}^{\neg}(I_1,a_1)$；

(2) 对任意的 $a_2\in\Delta^{I_2}$，都存在 $a_1\in\Delta^{I_1}$，使得 $M_2:(I_2,a_2)\rightarrow\mathcal{EL}^{\neg}(I_1,a_1)$ 并且 $M_1:(I_1,a_1)\rightarrow\mathcal{EL}^{\neg}(I_2,a_2)$.

在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 全局模拟关系下，一阶闭公式 β 满足不变性是指：对所有的 I_1 至 I_2 的 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 全局模拟关系，若

$I_1\unlhd\mathcal{EL}^{\neg}I_2$，则 $I_1\models\beta$ 的充分必要条件是 $I_2\models\beta$. 一阶闭公式 β 在解释的直积定义 $\Pi_{i\in I}I_i$ 下是被保持的是指：对任意一簇解释$(I_i)_i\in{}_I$，如果对所有的 $i\in I$，$I_i\models\beta$，那么 $\Pi_{i\in I}I_i\models\beta$.

术语公理集是有穷条概念包含式的集合，原则上不允许布尔算子直接作用于概念包含式. 举个例子来说，Woman$\sqsubseteq$Human 和 Man$\sqsubseteq$Human 是两个概念包含式，但是形如：$\neg$(Woman $\sqsubseteq$ Human)，(Woman $\sqsubseteq$ Human) $\rightarrow$ (Man $\sqsubseteq$ Human)，(Woman $\sqsubseteq$ Human) $\vee$ (Man $\sqsubseteq$ Human)，(Woman $\sqsubseteq$ Human) $\wedge$ (Man $\sqsubseteq$ Human)等都不是合法的术语公理表达式. 在文献[17]中指出，应用解释的不相交并能够排除上述非法的术语公理表达式.

给定一簇描述逻辑的解释$(I_i)_{i\in I}$. 令 J 是$(I_i)_{i\in I}$的不相交并，那么解释 J 定义如下：

(1) $\Delta^J=\bigcup_{i\in I}\Delta^{I_i}$，其中 $\Delta^{I_i}\bigcap\Delta^{I_j}=\varnothing$，$i\neq j$；

(2) $A^J=\bigcup_{i\in I}A^{I_i}$，$A\in N_C$；

(3) $r^J=\bigcup_{i\in I}r^{I_i}$，$r\in N_R$.

在不相交并下，一阶闭公式 β 满足不变性是指：对所有不相交的解释$(I_i)_{i\in I}$，$I_i\models\beta$，$i\in I$，当且仅当 $J\models\beta$.

在不相交的并下，布尔型的术语公理不满足不变性.

例 2[17]. 令 $\mathcal{T}_1=\{(\top\sqsubseteq A)\vee(\top\sqsubseteq B)\}$，$\mathcal{T}_2=\{\neg(\top\sqsubseteq A)\}$. 解释 I_1 和 I_2 构造如下：$A^{I_1}=\Delta^{I_1}$，$B^{I_1}=\varnothing$，$B^{I_2}=\Delta^{I_2}$，$A^{I_2}=\varnothing$，则 I_1 和 I_2 的不相交的并 I 为 $\Delta^I=\Delta^{I_1}\bigcup\Delta^{I_2}$，$A^I=\Delta^{I_1}$，$B^I=\Delta^{I_2}$. 易知 $I_1\models\mathcal{T}_1$，$I_2\models\mathcal{T}_1$，$I\models\mathcal{T}_2$，但是 $I\not\models\mathcal{T}_1$，$I_1\not\models\mathcal{T}_2$.

命题 7. 任意给定的$\mathcal{EL}^{\neg}$ TBox $\mathcal{T}$和一族解释$(I_i)_{i\in I}$. 令 I 是$(I_i)_{i\in I}$的不相交并，则如下结论成立：

(1) 对所有的 $i\in I$，$I_i\models\mathcal{T}$，当且仅当 $I\models\mathcal{T}$.

(2) 如果对所有的 $i\in I$，$I_i\models\mathcal{T}$，那么 $\Pi_{i\in I}I_i\models\mathcal{T}$.

证明. (1) 不失一般性，假设$\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$. 令 I 是一簇解释$(I_i)_{i\in I}$不相交的并. 假设对任意的 $i\in I$，都有 $I_i\models C\sqsubseteq D$，那么由 I 的构造，就有 $I\models C\sqsubseteq D$. 反之，若 $I\models C\sqsubseteq D$，则$\bigcup_{i\in I}C^{I_i}\subseteq\bigcup_{i\in I}D^{I_i}$. 由 $\Delta^{I_i}\bigcap\Delta^{I_j}=\varnothing$，$i\neq j$，就有对所有的 $i\in I$，$C^{I_i}\subseteq D^{I_i}$. 即 $I_i\models C\sqsubseteq D$，$i\in I$.

(2) 如果对任意的 $i\in I$，$I_i\models C\sqsubseteq D$，都有 $C^{I_i}\subseteq D^{I_i}$，那么由解释直积的定义，可得 $C^{\Pi_{i\in I}I_i}\subseteq D^{\Pi_{i\in I}I_i}$. 即 $\Pi_{i\in I}I_i\models C\sqsubseteq D$.

命题 7 表明$\mathcal{EL}^{\neg}$的 TBox $\mathcal{T}$在不相交的并下不变，并且在解释的直积下是被保持的. 由命题 7，有如下定理.

定理 8. 令 β 为一阶闭公式. β 与$\mathcal{EL}^{\neg}$中的某个 TBox $\mathcal{T}$等价的充分必要条件是 β 在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系和不相交的并下满足不变性，并且在解释的直积下被保持.

证明思路. 必要条件. 假设 β 于$\mathcal{EL}^{\neg}$中的某个 TBox $\mathcal{T}$等价.

不失一般性，假设$\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$，由命题 7，可知 β 在不相交的并下满足不变性并且在解释的直积下被保持. 同时也容易验证 β 在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系下满足不变性.

充分条件. 令 $con(\beta)=\{(C\sqsubseteq D)^{\sigma}\mid\beta\models(C\sqsubseteq D)^{\sigma}\}$，$con^{\vee}(\beta)=\{(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\mid con(\beta)\models(C\models D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\}$. 假设 $con(\beta)\models\beta$，那么由紧致性定理就有：存在一个术语公理集 $\mathcal{T}$ 与 β 等价. 下面使用反证法证明 β 是 $con(\beta)$的逻辑推论. 若 $con(\beta)\not\models\beta$，则 $con(\beta)\bigcup\{\neg\beta\}$可满足. 我们的想法是构造 2 个 ω 饱和模型 I 和 J，满足使得 $I\simeq\mathcal{EL}^{\neg}J$ 并且 $I\models\neg\beta$，$J\models\beta$. 因为 β 在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系满足不变性，所以就有 $I\models\beta$，从而与 $I\models\neg\beta$矛盾. I 和 J 的构造步骤如下：

步骤 1. I 的构造. 对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)\notin con^{\vee}(\beta)$，令 $I_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}$是 $con(\beta)$的一个模型，并且满足条件：$I_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)$. 令 I 是每一个 $I_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}$ 和 $con(\beta)\bigcup\{\neg\beta\}$的一个模型的不相交并，则 $I\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}$，并且 $I\models\neg\beta$.

步骤 2. J 的构造. 对每一个形如 $C\sqsubseteq D\notin con(\beta)$，令 $J_{C\sqsubseteq D}$ 是 β 的一个模型，并且满足条件 $J_{C\sqsubseteq D}\not\models C\sqsubseteq D$. 对每一个形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\notin con^{\vee}(\beta)$，令 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\models\Pi_{1\leq i\leq n}J_{C\sqsubseteq D}$. 因为 β 在解释的直积下被保持，所以 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\models\beta$，并且 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}$. 令 J 是所有 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}$不相交的并，则 $J\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)$，并且 $J\models\beta$.

步骤 3. 证明 $I\simeq\mathcal{EL}^{\neg}J$.

完成上述三步就有定理 8 成立. 具体证明过程如下.

证明. 必要条件. 假设$\mathcal{T}=\{C\sqsubseteq D\}$. 由命题 8 可知，$\beta$ 在不相交的并下不变，并且在解释的直积下被保持. 接下来证明，β 在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系下满足不变性. 假设 I_1 和 I_2 为任意两个解释，并且满足 $I_1\simeq\mathcal{EL}^{\neg}I_2$. 假设 $I_1\models\beta$. 因为 β 与 $\mathcal{T}$ 等价，所以 $I_1\models\mathcal{T}$. 即 $I_1\models\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$. 如果对所有的 $a_2\in\Delta^{I_2}$，都有 $I_2\models C^{\sigma_x}[x/a_2]$. 由于 $I_1\simeq\mathcal{EL}^{\neg}I_2$，所以一定存在 $a_1\in\Delta^{I_1}$ 满足 $I_1\models C^{\sigma_x}[x/a_1]$. 于是就有 $I_1\models D^{\sigma_x}[x/a_1]$. 又因

为$(I_1,a_1)\rightharpoonup_{\mathcal{EL}^{\neg}}(I_2,a_2)$，所以 $I_2\models D^{\sigma_x}[x/a_2]$. 即$I_2\models\forall x(C^{\sigma_x}\rightarrow D^{\sigma_x})$. 类似地可以证明，若 $I_2\models\beta$，那么$I_1\models\beta$.

充分条件. 假设β在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系和不相交的并下满足不变性，并且在解释的直积下被保持. 令 $con(\beta)=\{C\sqsubseteq D^{\sigma}\mid\beta\models C\sqsubseteq D\}$，$con^{\vee}(\beta)=\{(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\mid con(\beta)\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\}$. 若 $con(\beta)\models\beta$，则由一阶逻辑的紧致性定理可知：存在一个术语公理集$\mathcal{T}$与β等价.

如果 $con(\beta)\not\models\beta$，那么 $con(\beta)\cup\{\neg\beta\}$是可满足的. 对所有的形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)\notin con^{\vee}(\beta)$，令$I_{C\sqsubseteq D_1}\sqcup\cdots\sqcup_{Dn}$为满足 $con(\beta)$的模型，并且满足：$I_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}$. 令 I 是所有的$I_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}$同$con(\beta)\cup\{\neg\beta\}$的一个模型不相交的并，那么$I\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}$，并且满足$I\models\neg\beta$. 对所有的形如$C\sqsubseteq D\notin con(\beta)$，令 $J_{C\sqsubseteq D}$是β的模型，并且满足条件：$J_{C\sqsubseteq D}\not\models C\sqsubseteq D$. 对所有的形如$(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}\notin con^{\vee}(\beta)$，令 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}=\Pi_{1\leq i\leq n}J_{C\sqsubseteq D}$. 因为$\beta$在解释的直积下被保持，所以 $J_{C\sqsubseteq D_1}\sqcup\cdots\sqcup_{D_n}\models\beta$，并且 $J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)^{\sigma}$. 令 J 是每一个$J_{C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n}$不相交的并，则有 $J\models\beta$ 并且 $J\not\models(C\sqsubseteq D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n)$.

根据模型论的知识，对每一个一阶逻辑的解释N，总能找到一个ω饱和模型N^*，使得对所有的一阶公式φ，都有 $N\models\varphi$，当且仅当 $N^*\models\varphi$. 因此，不妨假定 I 和 J 都是ω饱和模型. 如果 $I\simeq_{\mathcal{EL}^{\neg}}J$，那么由$\beta$在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系下满足不变性，于是就有$I\models\beta$并且 $J\models\beta$. 但是这与 $I\models\neg\beta$矛盾，从而可得定理 8 成立.

结论 1. 对所有的 $a\in\Delta^I$，一定存在 $b\in\Delta^J$使得对任意的$\mathcal{EL}^{\neg}$概念 D，$a\in D^I$，当且仅当 $b\in D^J$.

对所有的$a\in\Delta^I$，令$\Sigma^+=\{D\mid a\in D^I,D$ 为$\mathcal{EL}^{\neg}$概念$\}$，$\Sigma^-=\{D\mid a\notin D^I,D$ 为$\mathcal{EL}^{\neg}$概念$\}$. 对所有的$D_1^+,\cdots,D_n^+\in\Sigma^+$，$D_1^-,\cdots,D_n^-\in\Sigma^-$，因为 $a\in(D_1^+\sqcap\cdots\sqcap D_n^+)^I$，但是 $a\notin(D_1^-\sqcup\cdots\sqcup D_n^-)^I$，所以 $I\not\models\forall x((D_1^{+\sigma_x}\wedge\cdots\wedge D_n^{+\sigma_x})\rightarrow D_1^{-\sigma_x}\vee\cdots\vee D_n^{-\sigma_x})$. 又因为$I$，$J$ 满足相同形如：$\forall x(D^{\sigma_x}\rightarrow E_1^{\sigma_x}\vee\cdots\vee E_n^{\sigma_x})$公式，所以 $J\not\models\forall x((D_1^{+\sigma_x}\wedge\cdots\wedge D_n^{+\sigma_x})\rightarrow D_1^{-\sigma_x}\vee\cdots\vee D_n^{-\sigma_x})$. 即 $J\models\exists x(D_1^{+\sigma_x}\wedge\cdots\wedge D_n^{+\sigma_x}\wedge\neg D_1^{-\sigma_x}\cdots\wedge\neg D_n^{-\sigma_x})$. 于是就有：$\exists b'\in\Delta^I$，使得 $b'\in(D_1^+\sqcap\cdots\sqcap D_n^+)^I$，但是$b'\notin(D_1^-\sqcap\cdots\sqcap D_n^-)^I$. 因为 J 是ω饱和模型，所以就有：对所有的元素 $a\in\Delta^I$，一定存在元素 $b\in\Delta^J$，使得对所有的概念 $D\in\Sigma^+$，若 $a\in D^I$，则 $b\in D^J$，以及对所有的概念 $D\in\Sigma^-$，若 $a\notin D^I$，则 $b\notin D^J$. 即结论 1 的成立. 运用上述方法，也可证明：对任意的 $b\in\Delta^J$，一定存在 $a\in\Delta^I$使得对任意的$\mathcal{EL}^{\neg}$概念 D，$b\in D^J$，当且仅当 $a\in D^I$.

最后，定义 $\Delta^I\times\Delta^J$上的一个二元关系 M_1如下：aM_1b，当且仅当对所有的$\mathcal{EL}^{\neg}$概念 D，若 $a\in D^I$，则$b\in D^J$；同样地，定义 $\Delta^J\times\Delta^I$上的一个二元关系 M_2如下：bM_2a，当且仅当对任意的$\mathcal{EL}^{\neg}$概念 D，如果$b\in D^J$，那么 $a\in D^I$.

结论 2. $I\simeq_{\mathcal{EL}^{\neg}}J$.

类似定理 5 中结论 4 的证明，可以证明 M_1，M_2是两个$\mathcal{EL}^{\neg}$模拟关系. 由定义 7 就有 $I\simeq_{\mathcal{EL}^{\neg}}J$，从而可知$\mathcal{EL}^{\neg}$ TBox 层次的 van Benthem 定理成立.

定理 8 的结论，可以推广到$\mathcal{ELU}^{\neg}$的情形.

推论 9. 令β是一阶闭公式. β与$\mathcal{ELU}^{\neg}$中的某个术语公理集$\mathcal{T}$等价的充分必要条件是β在$\mathcal{EL}^{\neg}$全局模拟关系和不相交的并下满足不变性.

证明. 证明方法与定理 8 类似.

4 表达力比较

4.1 语法层面比较

从语法层面刻画描述逻辑的表达力，一种简单、直观的方法是依据构造子数量的多少来决定表达力的强弱. 令 $C(S)$表示 S 的全体概念所构成的集合，$T(S)$表示所有术语公理集所构成的集合. 显然有如下结论成立：若 $C(S_1)\subseteq C(S_2)$，则 $T(S_1)\subseteq T(S_2)$.

定义 8. 任意给定两个描述逻辑 S_1和 S_2，称S_1的表达力不强于 S_2，如果 $C(S_1)\subseteq C(S_2)$. 记作$S_1\leq_C S_2$. 如果 $S_1\leq_C S_2$，并且存在一个概念 $C\in C(S_2)$，满足 $C\notin C(S_1)$，那么称 S_1的表达力弱于S_2. 记作 $S_1<_C S_2$；如果 $S_1\leq_C S_2$，并且 $S_2\leq_C S_1$，那么称S_1和 S_2表达力等价. 记作 $S_1\equiv_C S_2$；如果 $C(S_1)\not\subset C(S_2)$，并且 $C(S_2)\not\subset C(S_1)$，那么称 S_1和 S_2表达力是不可比的.

依据$\mathcal{EL}$族构造子的数量多少，显然有：

$C(\mathcal{EL})\subseteq C(\mathcal{EL}^{\neg})\subseteq C(\mathcal{ELU}^{\neg})$；

$C(\mathcal{EL})\subseteq C(\mathcal{ELU})\subseteq C(\mathcal{ELU}^{\neg})$；

$T(\mathcal{EL})\subseteq T(\mathcal{EL}^{\neg})\subseteq T(\mathcal{ELU}^{\neg})$；

$T(\mathcal{EL})\subseteq T(\mathcal{ELU})\subseteq T(\mathcal{ELU}^{\neg})$；

$C(\mathcal{EL}^{\neg})\not\subset C(\mathcal{ELU})$，$C(\mathcal{ELU})\not\subset C(\mathcal{EL}^{\neg})$；

$T(\mathcal{EL}^{\neg})\not\subset T(\mathcal{ELU})$，$T(\mathcal{ELU})\not\subset T(\mathcal{EL}^{\neg})$.

根据定义 8，有如下表达力的比较结果.

定理 10. 在语法层面上，描述逻辑$\mathcal{EL}$，$\mathcal{EL}^{\neg}$及

$\mathcal{ELU}^{\neg}$分别在概念及术语公理集层次上的表达力是严格递增的；$\mathcal{EL}^{\neg}$与$\mathcal{ELU}$的表达力不可比.

依据构造子的多少来决定表达力的强弱是存在明显的缺陷.比如，如果某个构造子不具有独立性，即它可由其他的构造子间接构造，那么定义 8 刻画表达力是不完美的.例如，描述逻辑$\mathcal{ALC}$包含构造子：原子概念、顶概念、底概念、原子概念补、概念交、全称约束、概念补、完全存在约束以及概念并；如果在$\mathcal{EL}$中增加概念补构造子(记作$\mathcal{ELC}$)，那么由定义 8，因为$\forall r.C \notin C(\mathcal{ELC})$，所以$\mathcal{ELC}$的表达力弱于$\mathcal{ALC}$.但是注意到概念$\forall r.C$与$\neg\exists r.\neg C$是等价的.这里的等价是指对所有的解释$I$都有：$(\forall r.C)^I=(\neg\exists r.\neg C)^I$.因此，单一的语法层面的分析，不能完美的刻画描述逻辑的表达力，还需要增加语义层面的信息进行比较.

4.2　语义层面比较

为了克服语法层面上刻画表达力时所遇到的问题，需要从语义的角度来研究表达力的刻画与比较.从语义的角度比较表达力也分为两层次：概念层次的比较和术语公理集层次的比较.

4.2.1　概念层次比较

首先，给出概念表达力比较的一般性定义.

定义 9.　任意给定两个描述逻辑S_1和S_2，称S_1的表达力在概念层次上不强于S_2，如果对S_1中的任意一个概念C，总是存在S_2的一个概念D，使得C与D等价.记作$S_1\leq_I S_2$.如果$S_1\leq_I S_2$，并且至少存在S_2的一个概念D，使得S_1的概念无法与之等价，那么称S_1的表达力在概念层次上弱于S_2.记作$S_1<_I S_2$；如果$S_1\leq_I S_2$，并且$S_1\leq_I S_2$，那么称S_1和S_2表达力在概念层次上等价.记作$S_1\equiv_I S_2$；如果至少存在S_2的一个概念，使得S_1的概念无法与之等价，并且至少存在S_1的一个概念，使得S_2的概念无法与之等价，那么就称S_1和S_2的表达力在概念层次上是不可比的.

由定义 8,9 可知，如果$S_1\leq_C S_2$，那么$S_1\leq_I S_2$.比如，$\mathcal{EL}$的表达力不强于$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$.但是现在的关键问题是能否从语义的角度，严格证明$\mathcal{EL}$的表达力在概念层次上严格弱于$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$.

为了证明$\mathcal{EL}$的表达力在概念层次上严格弱于$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$，首先回顾$\mathcal{EL}$的模拟关系及其概念表达力的 van Benthem 定理.

令$I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$和$I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$分别是描述逻辑的两个解释.$\mathcal{EL}$的模拟关系$M$是满足如下条件的二元关系：(1)对$\Delta^{I_1}$中的任意元素$a_1$和$\Delta^{I_2}$中的任意元素$a_2$，如果$a_1Ma_2$，那么对所有的概念名$A$，都有：若$a_1\in A^{I_1}$，则$a_2\in A^{I_2}$；(2)对所有的角色名$r$，如果$a_1Ma_2$并且$(a_1,b_1)\in r^{I_1}$，那么存在$\Delta^{I_2}$中的元素$b_2$，满足$(a_2,b_2)\in r^{I_2}$并且$b_1Mb_2$.

依据$\mathcal{EL}$的模拟关系，有如下概念层次的 van Benthem 刻画定理：

定理 11[17].　令$A(x)$是一个一阶开公式.$A(x)$与描述逻辑$\mathcal{EL}$的某个概念C等价的充分必要条件是$A(x)$在$\mathcal{EL}$模拟关系和解释的直积下是被保持的.

根据定理 11 的结论，并应用定理 5 及推论 6，下面证明$\mathcal{EL}$，$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$之间概念表达力都是严格递增关系，但是$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$之间的概念表达力是不可比较的.

定理 12.　描述逻辑$\mathcal{EL}$，$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$之间概念表达力是严格递增的，但是$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$之间的概念表达力是不可比较的.

证明.　由定义 9 和定理 5，只需要在$\mathcal{EL}^{\neg}$中找一个概念，使得它与$\mathcal{EL}$中的任何概念都不等价.

令$C=\neg A$，$I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$，$I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$，其中，

$\Delta^{I_1}=\{a_1,a_2\}$，$A^{I_1}=\{a_2\}$，$r^{I_1}=\{(a_1,a_2)\}$；

$\Delta^{I_2}=\{d_1\}$，$A^{I_2}=\{d_1\}$，$r^{I_2}=\{(d_1,d_1)\}$；

令$M=\{(a_1,d_1),(a_2,d_1)\}$，容易证明$M$是$I_1$到$I_2$连接$a_1$和$d_1$的$\mathcal{EL}$模拟.但是，$a_1\in(\neg A)^{I_1}$，$d_1\notin(\neg A)^{I_2}$.因此$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念$C=\neg A$与$\mathcal{EL}$中的任何概念均不等价.即$\mathcal{EL}$概念表达力弱于$\mathcal{EL}^{\neg}$.

类似地，只需要在$\mathcal{ELU}^{\neg}$中找一个概念，使得它与$\mathcal{EL}^{\neg}$中的所有概念都不等价.令$C=\exists r.\neg A_1\sqcup\exists r.\neg A_2$，由例 1 的结论可知：$C=\exists r.\neg A_1\sqcup\exists r.\neg A_2$与$\mathcal{EL}^{\neg}$中的任何概念均不等价.即$\mathcal{EL}^{\neg}$概念表达力弱于$\mathcal{ELU}^{\neg}$.

令$C=\exists r.A_1\sqcup\exists r.A_2$，$I_1=(\Delta^{I_1},\cdot^{I_1})$，$I_2=(\Delta^{I_2},\cdot^{I_2})$，其中

$\Delta^{I_1}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$A_1^{I_1}=\{a_2\}$，$A_2^{I_2}=\{a_3\}$，$r^{I_1}=\{(a_1,a_2)\}$，

$\Delta^{I_2}=\{d_1,d_2,d_3\}$，$A_1^{I_2}=\{d_3\}$，$A_2^{I_2}=\{d_1\}$，$r^{I_2}=\{(d_2,d_1)\}$.

容易验证$a_1\in(\exists r.A_1\sqcup\exists r.A_2)^{I_1}$，$d_2\in(\exists r.A_1\sqcup\exists r.A_2)^{I_2}$，但是$(a_1,d_2)\notin(\exists r.A_1\sqcup\exists r.A_2)^{I_1\times I_2}$.应用定理 5 可知概念$C=\exists r.A_1\sqcup\exists r.A_2$与$\mathcal{EL}^{\neg}$中的任何概念均不等价.反之，令$C=\neg A$，那么$\neg A$与$\mathcal{ELU}$中的任何概念均不等价.所以$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}$之间的概念表达力是不可比较的.

4.2.2 TBox 层次比较

术语公理集层次表达力比较的一般性定义.

定义 10. 任意给定两个描述逻辑 S_1 和 S_2，称 S_1 的表达力在 TBox 层次上不强于 S_2，如果对 S_1 中的任意一个 TBox $\mathcal{T}_1$，总是存在 S_2 的一个 TBox $\mathcal{T}_2$，使得 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 等价. 记作 $S_1 \leq_T S_2$. 如果 $S_1 \leq_T S_2$，并且至少存在 S_2 的一个 TBox $\mathcal{T}_2$，使得 S_1 的 TBox 无法与之等价，那么称 S_1 的表达力在 TBox 层次上弱于 S_2. 记作 $S_1 <_T S_2$；如果 $S_1 \leq_T S_2$，并且 $S_1 \leq_T S_2$，那么称 S_1 和 S_2 表达力在 TBox 层次上等价. 记作 $S_1 \equiv_T S_2$；如果至少存在 S_2 的一个 TBox，使得 S_1 的 TBox 无法与之等价，并且至少存在 S_1 的一个 TBox，使得 S_2 的 TBox 无法与之等价，那么就称 S_1 和 S_2 表达力在 TBox 层次上是不可比的.

由定义 8，10 可知，如果 $S_1 \leq_C S_2$，那么 $S_1 \leq_T S_2$. 比如，$\mathcal{EL}$ 的表达力不强于 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$. 但是现在的关键问题是能否从语义的角度，严格证明 $\mathcal{EL}$ 的表达力在 TBox 层次上严格弱于 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$.

为了证明 $\mathcal{EL}$ 的表达力在 TBox 层次上严格弱于 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$，首先回顾 $\mathcal{EL}$ 的 TBox 表达力的 van Benthem 定理.

定理 13[17]. 令 β 是一个一阶闭公式. β 与描述逻辑 $\mathcal{EL}$ 的某个 TBox $\mathcal{T}$ 等价的充分必要条件是 β 在 $\mathcal{EL}$ 全局模拟关系和解释的直积下是被保持的.

根据定理 13 的结论，并应用定理 8 及推论 9，下面证明 $\mathcal{EL}$，$\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 之间 TBox 的表达力都是严格递增关系，但是 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$ 之间的 TBox 的表达力是不可比较的.

定理 14. 描述逻辑 $\mathcal{EL}$，$\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 之间 TBox 的表达力是严格递增的，但是 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$ 之间 TBox 的表达力是不可比较的.

证明. 由定理 13，只需要在 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 中找一个 TBox，使得它与 $\mathcal{EL}$ 中的 TBox 都不等价.

令 $\mathcal{T} = A_1 \sqsubseteq \neg A_2$，$I_1 = (\Delta^{I_1}, \cdot^{I_1})$，$I_2 = (\Delta^{I_2}, \cdot^{I_2})$，其中，

$\Delta^{I_1} = \{a_1, a_2\}$，$A_1^{I_1} = \{a_1\}$，$A_2^{I_1} = \{a_2\}$，$r^{I_1} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$；

$\Delta^{I_2} = \{d_1\}$，$A_1^{I_2} = \{d_1\}$，$A_2^{I_2} = \{d_1\}$，$r^{I_2} = \{(d_1, d_1)\}$；

令 $M_1 = \{(a_1, d_1), (a_2, d_1)\}$，$M_2 = \{(d_1, a_1), (d_1, a_2)\}$. 易知 M_1，M_2 构成 I_1 到 I_2 的一个 $\mathcal{EL}$ 的全局模拟关系，但是 $I_1 \models A_1 \sqsubseteq \neg A_2$，$I_2 \not\models A_1 \sqsubseteq \neg A_2$. 因此，$\mathcal{EL}^{\neg}$ 的 TBox 表达力强于 $\mathcal{EL}$.

类似地，在 $\mathcal{ELU}^{\neg}$ 中找一个 TBox，使得它与 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 中的 TBox 都不等价.

令 $\mathcal{T} = A \sqsubseteq \exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2$，$I_1 = (\Delta^{I_1}, \cdot^{I_1})$，$I_2 = (\Delta^{I_2}, \cdot^{I_2})$，其中，

$\Delta^{I_1} = \{a_1, a_2, a_3\}$，$A^{I_1} = \{a_1\}$，$A_1^{I_1} = \{a_2\}$，$A_2^{I_1} = \{a_3\}$，$r^{I_1} = \{(a_1, a_2)\}$；

$\Delta^{I_2} = \{d_1, d_2, d_3\}$，$A^{I_2} = \{d_1\}$，$A_1^{I_2} = \{d_3\}$，$A_2^{I_2} = \{d_2\}$，$r^{I_2} = \{(d_1, d_2)\}$；

令

$M_1 = \{(a_1, d_1), (a_2, d_3), (a_3, d_2), (a_2, d_2)\}$，

$M_2 = \{(d_1, a_1), (d_3, a_2), (d_2, a_3), (d_2, a_2)\}$.

易知 M_1，M_2 构成 I_1 到 I_2 的一个 $\mathcal{EL}$ 的全局模拟关系，并且可以验证 $a_1 \in (\exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2)^{I_1}$，$d_1 \in (\exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2)^{I_2}$，但是 $a_1 \notin (\exists r.A_2)^{I_1}$，$d_1 \notin (\exists r.A_1)^{I_2}$，从而 $(a_1, d_1) \notin (\exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2)^{I_1 \times I_2}$. 于是就有：$I_1 \models A \sqsubseteq \exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2$，$I_2 \models A \sqsubseteq \exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2$，但是 $I_1 \times I_2 \not\models A \sqsubseteq \exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2$. 因此，$\mathcal{ELU}^{\neg}$ 的 TBox 表达力强于 $\mathcal{EL}^{\neg}$.

由上述证明显然有 $\mathcal{T} = A_1 \sqsubseteq \neg A_2$ 与 $\mathcal{ELU}$ 中 TBox 都不等价，并且 $\mathcal{T} = A \sqsubseteq \exists r.A_1 \sqcup \exists r.A_2$ 与 $\mathcal{EL}^{\neg}$ 中 TBox 不等价. 因此，$\mathcal{EL}^{\neg}$ 和 $\mathcal{ELU}$ 之间 TBox 的表达力是不可比较的.

4.3 比较结果分析

对比定理 10，12 和 14 不难发现，语法层面和语义层面的表达力比较结果是完全相同的. 这主要是由于文中讨论的原子概念否定构造子和概念并构造子具有独立性. 即构造子不能由其他的构造子间接构造. 如果存在构造子之间等价的情况，那么语义层面刻画化方法能精确的反应这一情况. 即等价概念它们所对应的一阶公式是逻辑等价的.

5 表达力与计算复杂性

逻辑表达力与其推理问题的计算复杂性存在一定的关联关系. 一般而言，较弱的表达力，其推理问题的计算复杂性也就越低；反之，较强的表达力，其推理问题的计算复杂性也就越高.

描述逻辑的推理问题可以分为两大类：标准推理和非标准推理. 其中标准推理主要包括：概念的可满足性、术语公理集的可满足性、概念之间的包含关系等等；非标准推理主要包括：最小公共包含、最大匹配概念等等. 针对 TBox 的不同形式（如 TBox 为空集或概念定义式术语集或一般式概念术语集），推理问题的计算复杂性又有所不同. 文中是考虑一般式概念术语集约束下推理问题的计算复杂性.

现结合前面3节对$\mathcal{EL}$、$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$表达力刻画和比较结果，以及概念的可满足性和概念之间包含关系的计算复杂性，做一个初步地对比分析．通过对比分析，为设计OBDA系统时，表达力和计算复杂性的权衡提供有益的参考．

5.1　原子概念否定构造子

本小节，运用$\mathcal{ALC}$到$\mathcal{EL}^{\neg}$的翻译，给出$\mathcal{EL}^{\neg}$若干推理问题的计算复杂性结果．首先，简要回顾$\mathcal{ALC}$的基本概念．

描述逻辑$\mathcal{ALC}$的概念定义如下：

(1) 单个概念名A本身是原子概念，$\top$表示顶概念；

(2) 如果C是一个概念，那么$\neg C$是$\mathcal{ALC}$概念；

(3) 如果C，D是两个$\mathcal{ALC}$概念，那么$C\sqcap D$是$\mathcal{ALC}$概念；

(4) 如果C是一个$\mathcal{ALC}$概念，r是一个角色名，那么$\exists r.C$是$\mathcal{ALC}$概念；

(5) 当且仅当能够有限次地应用(1)，(2)，(3)，(4)所得到的符号串都是$\mathcal{ALC}$的概念．

由于存在完全否定概念构造子，所以底概念$\bot$，概念并$C\sqcup D$以及全称概念约束$\forall r.C$，可依次定义为其等价概念：$\neg\top$，$\neg(\neg C\sqcap\neg D)$，$\neg\exists r.\neg C$．

对$\mathcal{ALC}$复杂概念的解释，可在$\mathcal{EL}^{\neg}$概念的解释基础上，增加对复杂概念否定的解释．即对任意概念$\neg C$，

$$(\neg C)^{I}=\Delta^{I}/C^{I}.$$

$\mathcal{ALC}$到$\mathcal{EL}^{\neg}$翻译由两个部分组成：对所有的$\mathcal{ALC}$概念C，$\sigma(C)$是$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念；对所有的$\mathcal{ALC}$的TBox $\mathcal{T}$，$\sigma(\mathcal{T})$是$\mathcal{EL}^{\neg}$的TBox．更确切地说，翻译σ定义如下：

(1) 对所有的$\mathcal{ALC}$的概念C：

① $\sigma(\top)=\top$　$\sigma(A)=A$；

② $\sigma(C\sqcap D)=\sigma(C)\sqcap\sigma(D)$；

③ $\sigma(\exists r.C)=\exists r.\sigma(C)$；

④ $\sigma(\neg C)=\neg A'$，这里A'表示一个新的概念名．

(2) 对所有的$\mathcal{ALC}$的TBox $\mathcal{T}$：

① 对任意的$C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$，$\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)\in\sigma(\mathcal{T})$；

② 对所有的出现在TBox $\mathcal{T}$中$\neg E$(这里E表示复杂概念)，在$\sigma(\mathcal{T})$中增加两条术语公理：$A'\sqsubseteq E$，$E\sqsubseteq A'$．

(3) 在语义方面，对每一个$\mathcal{ALC}$的解释I，其对应的$\mathcal{EL}^{\neg}$的解释J构造如下：

① $\Delta^{J}=\Delta^{I}$；

② 对所有的概念名A，$A^{J}=A^{I}$；

③ 对所有的角色名r，$r^{J}=r^{I}$；

④ 对每一个新增加的概念名A'，$A'^{J}=E^{I}$，这里E是指其否定形式出现在$\mathcal{T}$中的复杂概念．

例2.　令$\mathcal{T}$是$\mathcal{ALC}$的一个TBox：

Mother≡Female$\sqcap\exists$haschild. Person

Father≡Male$\sqcap\exists$haschild. Person

Male$\sqsubseteq$Person

Female$\sqsubseteq$Person

Motherwithoutdaughter$\sqsubseteq$Mother$\sqcap\forall$haschild. $\neg$Male

根据上述$\mathcal{ALC}$到$\mathcal{EL}^{\neg}$翻译，其相应的$\sigma(\mathcal{T})$定义如下：

Mother≡Female$\sqcap\exists$haschild. Person

Father≡Male$\sqcap\exists$haschild. Person

Male$\sqsubseteq$Person

Female$\sqsubseteq$Person

Motherwithoutdaughter$\sqsubseteq$Mother$\sqcap\neg A'$

$A'\sqsubseteq\exists$haschild. Male

$\exists$haschild. Male$\sqsubseteq A'$

比较例2中的$\mathcal{T}$和$\sigma(\mathcal{T})$，不难发现在$\sigma(\mathcal{T})$中新增了概念名A'，从这一角度看，新增的概念名提升了语言的表达力，从而使得$\mathcal{ALC}$能翻译到$\mathcal{EL}^{\neg}$．同时，也容易证明给定一个$\mathcal{ALC}$的TBox $\mathcal{T}$，在翻译σ的作用下，生成一个$\mathcal{EL}^{\neg}$的TBox $\sigma(\mathcal{T})$是多项式时间内可完成的．

命题15.　令$\mathcal{T}$和C分别是$\mathcal{ALC}$的TBox和概念．如果概念C中所出现的概念名和角色名均在TBox $\mathcal{T}$中出现，那么在$\mathcal{ALC}$中概念C相对$\mathcal{T}$是可满足的，当且仅当在$\mathcal{EL}^{\neg}$中$\sigma(C)$相对$\sigma(\mathcal{T})$是可满足的．

证明．　可对概念C的结构作归纳．对概念C分别为顶概念、原子概念、概念交和完全存在约束概念4种情形的证明，由翻译的形式，结论显然成立．下面主要讨论$C=\neg E$，这里E为复杂概念的情形．

令I是$\mathcal{T}$的一个模型，使得$C^{I}\neq\varnothing$．依据I，构造一个解释J如下：

(1) $\Delta^{J}=\Delta^{I}$；

(2) $A'^{J}=E^{I}$，这里A'是新引入的概念名；

(3) 对所有不在完全概念否定构造子辖域内的概念名A和角色名r，$A^{J}=A^{I}$，$r^{J}=r^{I}$．

由上述解释的构造可知：J是$\sigma(\mathcal{T})$的模型并且$\sigma(C)^{J}\neq\varnothing$．

反之，令J是$\sigma(\mathcal{T})$的模型并且$\sigma(C)^{J}\neq\varnothing$．依据$J$，构造一个解释$I$如下：

(1) $\Delta^I=\Delta^J$；

(2) $A^I=A^J, r^I=r^J$.

因为 $A'\sqsubseteq E, E\sqsubseteq A'$，所以 $E^I=A'^J$. 从而 I 是$\mathcal{T}$的模型并且 $C^I\neq\varnothing$.

命题 15 证明了$\mathcal{ALC}$到$\mathcal{EL}^{\neg}$的翻译 σ 是保持概念的可满足性. 但是保持概念的可满足性，并不意味着保持概念的不可满足性. 如果源逻辑的模型类翻译为目标逻辑模型类的真子类，那么保持可满足性的翻译并不能确保保持不可满足性. 下面证明翻译 σ 同时保持概念的不可满足性.

命题 16. 令$\mathcal{T}$和 C 分别是$\mathcal{ALC}$的 TBox 和概念. 如果概念 C 中所出现的概念名和角色名均在 TBox $\mathcal{T}$中出现，那么在$\mathcal{ALC}$中概念 C 相对$\mathcal{T}$是不可满足的，当且仅当在$\mathcal{EL}^{\neg}$中 $\sigma(C)$ 相对 $\sigma(\mathcal{T})$ 是不可满足的.

证明. 对概念 C 的结构作归纳. 与命题 15 证明类似，对概念 C 分别为顶概念、原子概念、概念交和完全存在约束概念 4 种情形的证明，由翻译的形式，结论显然成立. 下面主要讨论 $C={\neg}E$，这里 E 为复杂概念的情形.

假设在$\mathcal{ALC}$中概念 C 相对$\mathcal{T}$是不可满足的. 如果在$\mathcal{EL}^{\neg}$中 $\sigma(C)$ 相对 $\sigma(\mathcal{T})$ 是可满足的，那么一定存在一个模型 J，使得 J 满足 $\sigma(\mathcal{T})$ 并且 $\sigma(C)^J\neq\varnothing$. 运用命题 15 类似的方法，并注意到 $A'\sqsubseteq E$，$E\sqsubseteq A'$，同样地可以构造模型 I 满足$\mathcal{T}$并且 $C^I\neq\varnothing$. 这与 C 相对$\mathcal{T}$是不可满足的假设矛盾.

反之，假设在$\mathcal{EL}^{\neg}$中 $\sigma(C)$ 相对 $\sigma(\mathcal{T})$ 是不可满足的. 如果在$\mathcal{ALC}$中概念 C 相对$\mathcal{T}$是可满足的，那么类似的可以构造一个模型 I，使得 J 满足 $\sigma(\mathcal{T})$ 并且 $\sigma(C)^J\neq\varnothing$.

命题 15 和 16 的结论表明，$\mathcal{ALC}$到$\mathcal{EL}^{\neg}$的翻译是语义忠实语义满翻译[20].

命题 17. 令$\mathcal{T}$及 C 和 D 分别是$\mathcal{ALC}$的 TBox 和概念. 如果概念 C 和 D 中所出现的概念名和角色名均在 TBox $\mathcal{T}$中出现，那么

$\mathcal{T}\models C\sqsubseteq D$，当且仅当 $\sigma(\mathcal{T})\models\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$.

证明. 如果形如${\neg}E$（E 为复杂概念）概念不在$\mathcal{T}$及 C 和 D 中出现，那么由翻译 σ 的形式，命题结论显然成立. 如果形如${\neg}E$ 概念在$\mathcal{T}$及 C 和 D 中出现，那么增加新的概念名 A'替换复杂概念 E，并且在$\mathcal{T}$中增加两条术语公理：$A'\sqsubseteq E, E\sqsubseteq A'$.

假设$\mathcal{T}\models C\sqsubseteq D$. 我们需要证明，对所有的 $\sigma(\mathcal{T})$ 的模型 J，都有 $J\models D\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$. 如果存在 $\sigma(\mathcal{T})$ 的一个模型 J，使得 $J\not\models\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$，那么构造一个解释 I 如下：

(1) $\Delta^I=\Delta^J$；

(2) $A^I=A^J, r^I=r^J$.

因为 $A'\sqsubseteq E, E\sqsubseteq A'$，所以 $E^I=A'^J$. 从而 I 是$\mathcal{T}$的模型并且 $I\not\models C\sqsubseteq D$. 这与$\mathcal{T}\models C\sqsubseteq D$ 矛盾.

反之，假设 $\sigma(\mathcal{T})\models\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$，但是$\mathcal{T}\not\models C\sqsubseteq D$. 那么存在$\mathcal{T}$的一个模型 I，$I\not\models C\sqsubseteq D$. 依据 I，构造一个解释 J 如下：

(1) $\Delta^J=\Delta^I$；

(2) $A'^J=E^I$，这里 A'是新引入的概念名；

(3) 对所有不在否定联词辖域内的概念名 A 和角色名 r，$A^J=A^I, r^J=r^I$.

由上述解释的构造可知：J 是 $\sigma(\mathcal{T})$ 的模型并且 $I\not\models\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$. 这与 $\sigma(\mathcal{T})\models\sigma(C)\sqsubseteq\sigma(D)$ 矛盾.

考虑到$\mathcal{ALC}$中概念的可满足性及概念之间的包含关系的计算复杂性都是指数时间完全的结果. 再结合命题 15，16 和 17，以及翻译 σ 在多项式时间内可完成的结论，有如下关于$\mathcal{EL}^{\neg}$概念可满足性及概念之间的包含关系的计算复杂性结果.

定理 18. 描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$概念的可满足性及概念之间的包含关系的计算复杂性是指数时间完全的.

注意到$\mathcal{ELU}^{\neg}$是介于$\mathcal{EL}^{\neg}$与$\mathcal{ALC}$之间，所以有如下推论.

推论 19. 描述逻辑$\mathcal{ELU}^{\neg}$概念的可满足性及概念之间的包含关系的计算复杂性是指数时间完全的.

5.2 概念并构造子

本小节，在概念并构造子下，运用$\mathcal{EL}^{\neg}$到$\mathcal{ELU}$的翻译，给出$\mathcal{ELU}$概念之间包含关系的计算复杂性结果. 借鉴 Baader 在文献[22]中的方法，给出$\mathcal{EL}^{\neg}$到$\mathcal{ELU}$的翻译 τ：

(1) 对所有的$\mathcal{EL}^{\neg}$的概念 C：

① $\tau(\top)=\top$ $\quad\tau(A)=A$；

② $\tau(C\sqcap D)=\tau(C)\sqcap\tau(D)$；

③ $\tau(\exists r.C)=\exists r.\tau(C)$；

④ $\tau({\neg}A)=A'$，这里 A'表示一个新的概念名.

(2) 对所有的$\mathcal{EL}^{\neg}$的 TBox $\mathcal{T}$：

① 对任意的 $C\sqsubseteq D\in\mathcal{T}$，$\tau(C)\sqsubseteq\tau(D)\in\tau(\mathcal{T})$；

② 对所有的出现在 TBox $\mathcal{T}$中${\neg}A$，在 $\tau(\mathcal{T})$ 中增加 3 条术语公理：$\top\sqsubseteq A\sqcup A'$，$A\sqcap A'\sqsubseteq L$，$\exists r.L\sqsubseteq L$，这里 L 表示一个特殊的概念名，用于表达底概念.

(3) 在语义方面，对每一个$\mathcal{EL}^{\neg}$的解释 I，其对应的$\mathcal{ELU}$的解释 J 构造如下：

① $\Delta^J=\Delta^I$；

② 对所有的概念名 A，$A^J=A^I$；

③ 对所有的角色名 r，$r^J=r^I$；

④ 对每一个新增加的概念名 A'，$A'^{J}=(\neg A)^{I}$；

⑤ 对特殊的概念名 L，$L^{J}=\varnothing$.

例 2. 令$\mathcal{T}$是$\mathcal{EL}^{\neg}$的一个 TBox：

Mother≡Female⊓∃haschild. Person

Father≡Male⊓∃haschild. Person

Male⊑Person

¬Male⊑Person

根据上述$\mathcal{EL}^{\neg}$到$\mathcal{ELU}$的翻译，其相应的 $\tau(\mathcal{T})$定义如下：

Mother≡Female⊓∃haschild. Person

Father≡Male⊓∃haschild. Person

Male⊑Person

Female⊑Person

⊤⊑Male⊔Female

Male⊓Female⊑L，

$\exists r.L\sqsubseteq L$

比较例 3 中的$\mathcal{T}$和 $\tau(\mathcal{T})$，不难发现在 $\tau(\mathcal{T})$中新增了概念名 Female 和特殊概念名 L，并且新增的 3 条公理：⊤⊑Male⊔Female，Male⊓Female⊑L，$\exists r.L\sqsubseteq L$ 确保了 Male 和 Female 为互补概念. 同时，容易证明任意给定一个$\mathcal{EL}^{\neg}$的 TBox $\mathcal{T}$，在翻译 τ 的作用下，生成一个$\mathcal{ELU}$的 TBox $\tau(\mathcal{T})$是多项式时间内可完成的.

命题 20. 令$\mathcal{T}$和 C 分别是$\mathcal{EL}^{\neg}$的 TBox 和概念. 如果概念 C 中所出现的概念名和角色名均在 TBox $\mathcal{T}$中出现，那么在$\mathcal{EL}^{\neg}$中概念 C 相对$\mathcal{T}$是可满足的，当且仅当在$\mathcal{ELU}$中 $\tau(C)$相对 $\tau(\mathcal{T})$是可满足的.

证明. 可对概念 C 的结构作归纳. 对概念 C 分别为顶概念、原子概念、概念交和完全存在约束概念 4 种情形的证明，由翻译的形式，结论显然成立. 下面主要讨论 $C=\neg A$.

令 I 是$\mathcal{T}$的一个模型，使得 $C^{I}\neq\varnothing$. 依据 I，构造一个解释 J 如下：

(1) $\Delta^{J}=\Delta^{I}$；

(2) $A'^{J}=(\neg A)^{I}$，这里 A'是新引入的概念名；

(3) 对特殊的概念名 L，$L^{J}=\varnothing$；

(4) 对所有不在原子概念否定构造子辖域内的概念名 A 和角色名 r，$A^{J}=A^{I}$，$r^{J}=r^{I}$.

由上述解释的构造及新增加的 3 条术语公理：$\top\sqsubseteq A\sqcup A'$，$A\sqcap A'\sqsubseteq L$，$\exists r.L\sqsubseteq L$ 可知：J 是 $\tau(\mathcal{T})$的模型并且 $\tau(C)^{J}\neq\varnothing$.

反之，令 J 是 $\sigma(\mathcal{T})$的模型并且 $L^{J}=\varnothing$，$\sigma(C)^{J}\neq\varnothing$. 依据 J，构造一个解释 I 如下：

(1) $\Delta^{I}=\Delta^{J}$；

(2) $(\neg A)^{I}=A'^{J}$，$A^{I}=A^{J}$；

(3) 对所有不在原子概念否定构造子辖域内的概念名 A 和角色名 r，$A^{I}=A^{J}$，$r^{I}=r^{J}$.

由 $L^{J}=\varnothing$及上述解释的构造可知 I 是$\mathcal{T}$的模型并且 $C^{I}\neq\varnothing$.

$\mathcal{EL}^{\neg}$到$\mathcal{ELU}$的翻译并不是语义满的. 例如，令$\mathcal{T}$为

Male⊑Person

¬Male⊑Person

则 $\tau(\mathcal{T})$为

Male⊑Person

Female⊑Person

⊤⊑Male⊔Female

Male⊓Female⊑L，

$\exists r.L\sqsubseteq L$

构造的一个解释 J 如下：

(1) Δ^{J}={Tom，Peter，Marry，Jack}；

(2) Male^{J}={Tom，Peter，Jack}；

(3) Female^{J}={Marry，Jack}；

(4) L^{J}={Jack}；

(5) r^{J}={(Jack，Jack)}；

显然 J 是 $\tau(\mathcal{T})$的一个模型并且$(\neg\text{Male})^{J}$={Marry}. 但是$\mathcal{T}$中隐含了要求：Male⊓¬Male⊑¬⊤. 在给定 $\tau(\mathcal{T})$的一个模型 J 去构造一个解释 I 时，必须有 $\text{Male}^{I}=\text{Male}^{J}$，$(\neg\text{Male})^{I}=\text{Female}^{J}$. 这与要求 Male⊓¬Male⊑¬⊤矛盾. 因此，类似命题 17 结论对翻译 τ 并不成立.

Baader 等人[22]已经证明了如下结论：原子概念 A 相对$\mathcal{T}$是可满足的，当且仅当 $\tau(\mathcal{T})\not\models A\sqsubseteq L$.

由上述结论及命题 20 有如下定理.

定理 21. 描述逻辑$\mathcal{EL}^{\neg}$概念的可满足性及概念之间的包含关系的计算复杂性都是指数时间完全的.

5.3 结果分析

现结合前面几节对表达力刻画和比较结果，以及概念之间包含关系的计算复杂性，做一个初步地对比分析. 首先，注意到表达力最弱的$\mathcal{EL}$概念之间包含关系的计算复杂性是多项式时间的这一结果. 现将表达力与计算复杂性的结果汇总如表 1 所示.

表 1 表达力与计算复杂性结果

计算复杂性	描述逻辑
多项式时间	$\mathcal{EL}$
指数时间完全	$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$
指数时间完全	$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$
指数时间完全	$\mathcal{ALC}$

由表 1 中表达力与计算复杂性的结果，可以看出$\mathcal{EL}$的表达力最弱，其推理复杂性也最低，但是像$\mathcal{ELU}$、$\mathcal{ELU}^{\neg}$、$\mathcal{ALC}$和$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}^{\neg}$、$\mathcal{ALC}$的表达力逐渐增强，但是其推理问题的计算复杂性是保持不变.这一点提示我们，在实际应用中，在表达力要求不高的情形下，可以优先选择$\mathcal{EL}$作为知识的表示语言.而对表达力要求较高的情形下，由计算复杂性的结果，应该优先选择$\mathcal{ALC}$作为知识的表示语言.同时，在没有特殊要求的情况下，应该尽量避免使用$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$作为知识的表示语言，一方面是由于其计算复杂性较高；另一方面是针对$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$等系统，还需要单独设计它们的推理机制.

6 相关工作

表达力是一个逻辑的重要特征.从语义的角度看，刻画逻辑的表达力有多种不同的途径，其中较具代表性的 2 种途径：一是写入模态逻辑教科书的 van Benthem 刻画定理，该定理给出了一阶公式与命题模态逻辑的公式等价的充要条件；二是写入数理逻辑教科书的 Lindström 定理，该定理精确地刻画了一阶逻辑的表达力.即不存在这样的逻辑 L，它的表达力强于一阶逻辑并且紧致性定理，Löwenheim-skolem 定理在 L 中同时成立.

van Benthem 定理刻画的表达力，其实质是一个逻辑相对另一个逻辑的表达力.Kurtonina 等人[21]借鉴这一思想，在描述逻辑$\mathcal{FL}$族中建立了一系列的 van Benthem 刻画定理.但是这些结果只是概念的表达力，既没有涵盖当前描述逻辑研究的重点，比如$\mathcal{EL}$族，DL_{Lite}族等，也没有给出术语公理集的 van Benthem 刻画定理.在 Kurtonina 工作之后的 10 年中，描述逻辑表达力的研究似乎停滞了.直到 2011 年，Lutz 等人[17]在 IJCAI 会议上发表了关于 TBox 表达力的研究工作，给出了包含较少构造子的轻量级描述逻辑$\mathcal{EL}$，DL_{Lite}族以及包含较多构造子的重量级描述逻辑 ALCQIO，它们在概念及术语公理集层次的表达力刻画定理.结合 Lutz 等人关于$\mathcal{EL}$工作，我们也给出了$\mathcal{ELU}$（增加概念并构造子）及$\mathcal{FL}_0$两个系统的表达力刻画定理[16,23].

Lindström 定理是从一个逻辑所满足的模型论性质的途径刻画逻辑的表达力.de Rijke[24]及 van Benthem[25]证明了假设逻辑 L 是在命题模态逻辑基础上的扩展，并且同时具有紧致性和互模拟不变性，那么 L 的表达力不强于命题模态逻辑.鉴于描述逻辑$\mathcal{ALC}$概念与多模态命题逻辑公式之间的对应关系，上述结论可平移至$\mathcal{ALC}$中，但只是在概念层次的 Lindström 定理.van Benthem 等人[26]在含 3 个及以上变元的一阶逻辑子片段(fragments)建立了一系列 Lindström 定理，并证明由模态 Lindström 定理蕴含 van Benthem 刻画定理.

除了上述刻画表达力的途径外，Baader[27]也形式化的给出了描述逻辑术语公理集表达力的定义，其研究的重点在于分析在不同构造子下，如果允许引入新的符号，那么描述逻辑术语公理集之间如何实现等价转化.Borgida[28]从翻译的角度给出了比较逻辑之间表达力的方法，其研究的重点在于分析在不同构造子下，描述逻辑与一阶逻辑的哪些子片段在翻译的意义上相互等价转换问题.但 Baader 和 Borgida 的工作均未对描述逻辑的概念和术语公理集建立相应的表达力刻画定理.

7 总结及工作展望

逻辑的表达力及其推理问题的计算复杂性一直以来都是逻辑研究的两个重要问题.文中给出了$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$在概念和术语公理集层次的表达力刻画定理.利用$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$的表达力刻画定理，还给出了$\mathcal{EL}$、$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$ 4 个系统表达力的比较结果.再结合上述 4 个系统在概念之间包含关系上的计算复杂性，明确了如下结论：在表达力要求不高的情形下，可以优先选择$\mathcal{EL}$作为知识的表示语言.而对表达力要求较高的情形下，应该优先选择$\mathcal{ALC}$作为知识的表示语言.同时，在没有特殊要求的情况下，应该尽量避免使用$\mathcal{EL}^{\neg}$、$\mathcal{ELU}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$作为知识的表示语言.后续工作包括以下 4 点：

(1) 文中的主要结果仅仅考虑了在原子概念否定构造子和概念并构造子下，$\mathcal{EL}^{\neg}$和$\mathcal{ELU}^{\neg}$两个系统的表达力刻画和比较问题.在未来的工作中，可以考虑引入更多构造子，比如，角色或时态等构造子，研究在这些构造子下，对应的描述逻辑系统的表达力刻画和比较问题；

(2) 描述逻辑是一个系列的逻辑.如果引入传递闭包构造子，那么需要将无穷并引入一阶逻辑的语言，才能表达带传递闭包的概念和术语公理集.但是我们注意到在 van Benthem 定理的证明中，一个核心工具是紧致性定理，而一阶逻辑(包含无穷并)不具有紧性[29].因此，需要给出新的方法才能刻画上述系统的表达力问题；

(3)表达力的刻画是其比较的基础.为了能为设计 OBDA 系统提供理论支持，进一步地，需要给出在更多构造子下，描述逻辑表达力比较及分类的结果；

(4)逻辑的表达力与其推理任务的计算复杂性具有一定的相互制约关系.由文中第 5 节的初步分析可知，在相同的推理复杂性条件下，描述逻辑的表达力可以逐渐增强；反之，在相同的表达力的条件下，推理的复杂性又会有怎样的变化？因此，如何进一步地精确刻画出表达力与推理问题的计算复杂性之间的关系值得做更深入的研究.

参 考 文 献

[1] The Big Data Expert Committee of China Computer Federation. A white paper for big data technology and industry development in China. China Computer Federation, Beijing, 2013(in Chinese)
(中国计算机学会大数据专家委员会. 中国大数据技术与产业发展白皮书. 中国计算机学会，北京，2013)

[2] Li Guo-Jie, Cheng Xue-Qi. Research status and scientific thinking of big data. Bulletin of Chinese Academy of Sciences, 2012, 27(6): 647-657(in Chinese)
(李国杰，程学旗. 大数据研究：未来科技及经济社会发展的重大战略领域——大数据的研究现状与科学思考. 中国科学院院刊，2012，27(6)：647-657)

[3] Calvanese D, Giese M, Hasse P, Horrocks I, et al. Optique: OBDA solution for Big Data//Proceeding of the 10th Extended Semantic Web Conference (ESWC2013). Montpellier, France, 2013: 293-295

[4] Calvanese D, Horrocks I, Jiménez R E, et al. On rewriting and answering queries in OBDA systems for Big Data//Procedding of the 10th International Workshop on OWL: Experience and Directions (OWLED2013). Montpellier, France, 2013, 1080: 1-7

[5] Calvanese D, Giacomo D, Lembo D, et al. Ontology-based database access//Proceeding of the 15th Italian Symposium on Advanced Database Systems (SEBD2007). Fasano, BR, Italy, 2007: 324-331

[6] Baader F, Nutt W. Basic description logics//Baader F, Calvanese D, McGuinness D, Nardi D, Patel-Scheider P F eds. The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

[7] Baader F, Sattler U. An overview of tableau algorithms for description logics. Studia Logica, 2001, 69(1): 5-40

[8] Baader F, Brandt S, Lutz C. Terminological cycles in a description logic with existential restrictions//Proceeding of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2003). San Francisco, USA, 2003: 325-330

[9] Wang Ju, Jiang Yun-Cheng, Shen Yu-Ming. Satisfiability and reasoning mechanism of terminological cycles in description logic VL. Science in China (Series F), 2009, 39(2): 205-211(in Chinese)
(王驹，蒋运承，申宇铭. 描述逻辑系统 VL 循环术语集的可满足性及推理机制. 中国科学(F 辑)，2009，39(2)：205-211)

[10] Chang Liang, Shi Zhong-Zhi, Chen Li-Min, Niu Wen-Jia. Family of extended dynamic description logics. Journal of Software, 2010, 21(1): 1-13(in Chinese)
(常亮，史忠植，陈立民，牛温佳. 一类扩展的动态描述逻辑. 软件学报，2010，21(1)：1-13)

[11] Jiang Yun-Cheng, Wang Ju, Shi Zhong-Zhi, Tang Yong. Fixpoint semantics and reasoning of terminological cycles in description logic ELN. Journal of Software, 2009, 20(3): 477-490(in Chinese)
(蒋运承，王驹，史忠植，汤庸. 描述逻辑 ELN 循环术语集的不动点语义及推理. 软件学报，2009，20(3)：477-490)

[12] Shi Zhong-Zhi, Chang Liang. Reasoning about semantic web services with an approach based on dynamic description logics. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(9): 1599-1611(in Chinese)
(史忠植，常亮. 基于动态描述逻辑的语义 Web 服务推理. 计算机学报，2008，31(9)：1599-1611)

[13] Ohlbach H, Nonnengart A, de Rijke M, Gabbay D. Encoding two-valued non-classical logics in classical logic//Robinson A, Voronkov A eds. Handbook of Automated Reasoning. Amsterdam. The Netherlands: Elsevier, 2001: 1403-1486

[14] van Benthem J. Correspondence theory//Gabbay D, Guenthner F eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol. 2: Extensions of Classical Logic. Dodrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1983: 167-247

[15] Goranko V, Otto M. Model theory of modal logic//Blackburn P, van Benthem J, Wolter F eds. Handbook of Modal Logic. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2007: 246-329

[16] Shen Yu-Ming, Wang Ju, Tang Su-Qin. Characterizing the expressive power for concept descriptions and terminological axioms boxes in the description logic $\mathcal{ELU}$. Journal of Software, 2014, 25(8): 1794-1805(in Chinese)
(申宇铭，王驹，唐素勤. 描述逻辑$\mathcal{ELU}$概念及术语公理集的表达力刻画. 软件学报，2014，25(8)：1794-1805)

[17] Lutz C, Piro R, Wolter F. Description Logic TBoxes: Model-theoretic characterizations and rewritability//Proceeding of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2011). Barcelona, Spain, 2011: 983-988

[18] Shen Yu-Ming, Ma Yue, Cao Cun-Gen, et al. Logical properties on translations between logics. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(10): 2091-2098(in Chinese)
(申宇铭，马越，曹存根等. 不同逻辑间翻译的逻辑性质. 计算机学报，2008，31(9)：1599-1611)

[19] Shen Yu-Ming, Wang Ju, Tang Su-Qin, Jiang Yun-Cheng.

On the translation from quantified modal logic into the counterpart theory. Journal of Software, 2012, 23(9): 2323-2335(in Chinese)
(申宇铭，王驹，唐素勤，蒋运承. 谓词模态逻辑到对应物理论的翻译. 软件学报，2012，23(9)：2323-2335)

[20] Shen Yu-Ming, Wang Ju, Tang Su-Qin, Jiang Yun-Cheng. Faithful and full translations between logics. Journal of Software, 2013, 24(7): 1626-1637(in Chinese)
(申宇铭，王驹，唐素勤，蒋运承. 逻辑之间的语义忠实语义满翻译. 软件学报，2013，24(7)：1626-1637)

[21] Kurtonina N, de Rijke M. Expressive of concept expression in first-order description logics. Artificial Intelligence, 1999, 107(2): 303-333

[22] Baader F, Brandt S, Lutz C. Pushing the $\mathcal{EL}$ envelope//Proceeding of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05). Edinburgh, UK, 2005: 364-369

[23] Shen Yu-Ming, Wen Xi-Ming, Wang Ju. Characterizing the expressive power for concept descriptions and terminological axioms boxes in the description logic $\mathcal{FL}_0$. Journal of Computer Science, 2014, 41(12): 206-2011(in Chinese)
(申宇铭，文习明，王驹. 描述逻辑$\mathcal{FL}_0$概念及术语公理集的表达力刻画. 计算机科学，2014，41(12)：206-2011)

[24] de Rijke M. A Lindström theorem for modal logic//Ponse A, de Rijke M, Venema Y eds. Modal Logic and Process Algebra: A Bisimulation Perspective. Palo Alto, USA: CSLI Publications, 1995: 217-230

[25] van Benthem J. A new modal Lindström theorem. Logics Universalis, 2007, 1(1): 125-148

[26] van Benthem J, ten Cate B, et al. Lindström theorems for fragments of first-order logic. Logical Methods in Computer Science, 2009, 5(3): 1-27

[27] Baader F. A Formal definition for the expressive power of terminological knowledge representation languages. Journal of Logic and Computation, 1996, 6(1): 33-54

[28] Borgida A. On the relative expressiveness of description logics and predicate logics. Artificial Intelligence, 1996, 82(1-2): 353-367

[29] Ebbinghaus H D, Flum J, Thomas W. Mathematical Logic. 2nd Edition, Berlin: Springer, 1994

SHEN Yu-Ming, born in 1976, Ph. D., associate professor. His research interests includes modal logic and description logics.

HAO Tian-Yong, born in 1981, Ph. D., associate professor. His research interests includes knowledge acquisition and reasoning.

ZHANG Qian-Sheng, born in 1975, Ph. D., professor. His research interests focus on artificial intelligence.

Background

The two most important properties of a logic are its expressive power and the reasoning complexity, which are an opposing relation in the logic. The complexity of satisfiability and subsumption problems for description logics has been studied extensively, but the problem of expressive power of description logics has hardly been explored so far.

Bisimulations between interpretations are the effective way to characterize the expressive power, and the classical result is the van Benthem characterizing theorem, which gives an exact condition for when a first-order formula with one free variable is equivalent to a modal logic formula. In this paper, a simulation for $\mathcal{EL}^{\neg}$(including atomic concept, top concept, conjunction concept, negative concept, and existential quantification) is addressed. Based on the simulation, the characterizing theorems of expressive power for concept descriptions and TBoxes, that is, sufficient and necessary conditions for when a first-order formula is equivalent to a concept description or a TBox are set up. By the characterzing theorems for $\mathcal{EL}^{\neg}$, we obtain similar results for the description logic $\mathcal{ELU}^{\neg}$. Based on the characterizing theorems, a comparison result of the expressive power for description logics: $\mathcal{EL}$, $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}$ and $\mathcal{ELU}^{\neg}$ is given. With the computational complexity results of the above description logics, we get the following result: under limited condition of the low expressive ability, $\mathcal{EL}$ is recommended as an ontology representation language, while for the higher expressive ability, the $\mathcal{ALC}$ are selected. Also, if there are no special requirements, we should avoid the use of $\mathcal{EL}^{\neg}$, $\mathcal{ELU}$ and $\mathcal{ELU}^{\neg}$ as the ontology representation languages.

Our work is supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61103169, 61403088, the National Social Science Fund of China (13CGL130), the Guangdong Province Natural Science Foundation (S2013010013050), and the Scientific and Technological Innovation Project of Guangdong Province Colleges Subject Construction Special Fund (2013KJCX0069).