

基于两阶段进化的不平衡多模态多目标优化

毛斐巧¹⁾ 曾文君¹⁾ 胡凯峰²⁾ 曾基榆²⁾ 梁正平¹⁾

¹⁾(深圳大学计算机与软件学院 广东 深圳 518060)

²⁾(深圳大学信息中心 广东 深圳 518060)

摘 要 不平衡多模态多目标优化问题在决策空间存在多个等效帕累托最优解集,且由于决策空间不同区域的收敛性可能不同,导致各等效帕累托最优解集的搜索难度亦可能各不相同,优化过程中容易过早收敛至部分易搜索的等效帕累托最优解集,进而丢失其他难搜索等效帕累托最优解集或对难搜索等效帕累托最优解集所在区域的开发不足。为应对各等效帕累托最优解集搜索难度不同带来的挑战,提升不平衡多模态多目标优化的性能,本文围绕决策空间中收敛性和多样性的平衡,提出了一种基于两阶段进化的不平衡多模态多目标优化算法(Two Stage Evolution for Imbalanced Multimodal Multiobjective Optimization,IMMO-TSE)。其中,第一阶段提出了一种基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略,通过适度放宽支配关系,以更全面定位搜索难度不同的各等效帕累托最优解集所在区域。第二阶段通过小生境方式,提出了一种基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,以更均衡开发前一阶段所定位的各等效帕累托最优解集所在区域。为验证 IMMO-TSE 的性能,将其与 7 个代表性的多模态多目标优化算法在 12 个不平衡多模态多目标基准测试问题和 16 个难度更大不平衡多模态多目标测试问题,以及 1 个真实应用问题上进行了对比。实验结果表明,IMMO-TSE 对于各类不平衡多模态多目标优化问题的求解均具有明显竞争优势。IMMO-TSE 的源代码和详细实验数据已在 Github 上公开:https://github.com/CIA-SZU/ZWJ。

关键词 多目标优化;多模态优化;不平衡优化;两阶段进化

中图法分类号 TP18

DOI 号 10.11897/SP.J.1016.2026.01573

Two Stage Evolution for Imbalanced Multimodal Multiobjective Optimization

MAO Fei-Qiao¹⁾ ZENG Wen-Jun¹⁾ HU Kai-Feng²⁾ ZENG Ji-Yu²⁾ LIANG Zheng-Ping¹⁾

¹⁾(College of Computer Science and Software Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060)

²⁾(Information Center, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060)

Abstract Imbalanced multimodal multiobjective optimization problems often contain multiple equivalent Pareto optimal sets in the decision space. At the same time, the convergence of different regions of decision space may differ, resulting in different search difficulties for each equivalent Pareto optimal set. During the optimization process, it is easy to prematurely converge on some easily searchable equivalent Pareto optimal sets, thereby losing other more difficult-to-search equivalent Pareto optimal sets or failing to exploit the regions to which they belong sufficiently. To address the challenges posed by the different search difficulties of equivalent Pareto optimal sets and improve the performance of imbalanced multimodal multiobjective optimization, this paper proposes a two-stage evolution based imbalanced multimodal multiobjective optimization algorithm IMMO-TSE from the perspective of the balance between convergence and diversity

收稿日期:2025-06-29;在线发布日期:2026-03-06。本课题得到国家自然科学基金(62572327)、广东省自然科学基金(2025A1515010260)资助。毛斐巧,博士,讲师,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为计算智能、智能化软件。E-mail:feiqiao@szu.edu.cn。曾文君,硕士研究生,主要研究领域为计算智能。胡凯峰,硕士,工程师,主要研究领域为计算智能。曾基榆,硕士,工程师,主要研究领域为计算智能。梁正平(通信作者),博士,副教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为计算智能、大数据分析与应用。E-mail:liangzp@szu.edu.cn。

in the decision space. Specifically, in the first stage, a dominance relationship relaxation method is adopted to propose an individual convergence calculation strategy based on population average dominance and adaptive weights with a truncation mechanism, which is beneficial for locating the regions where equivalent Pareto optimal sets with different search difficulties belong more comprehensively. In the second stage, a niche method is adopted to propose an adaptive environment selection strategy based on the convergence state of subpopulations, which promotes the balanced exploitation of regions containing equivalent Pareto optimal sets. The performance of IMMO-TSE is verified by comparing it with seven representative multimodal multiobjective optimization algorithms on twelve imbalanced multimodal multiobjective benchmark test problems, sixteen more difficult unbalanced multimodal multiobjective test problems, and one real-world application problem. The IMMO-TSE source code is available on GitHub: <https://github.com/CIA-SZU/ZWJ>.

Keywords multiobjective optimization; multimodal optimization; imbalanced optimization; two-stage evolution

1 引 言

现实世界中存在各种类型的多模态多目标优化问题 (Multimodal Multiobjective Optimization Problems, MMOPs), 例如路径规划问题^[1]、特征选择问题^[2]、地图生成问题^[3]等。数学形式上, MMOPs 是指包含多个相互冲突的优化目标, 且目标空间中同一帕累托前沿 (Pareto Front, PF) 对应决策空间中多个等效帕累托最优解集 (Pareto optimal Sets, PSs) 的一类复杂优化问题^[4-5]。其中, 多模态指在决策空间中存在多个不同的最优解对应目标空间中相同或相近的一个目标值, 表现为决策空间与目标空间之间存在“多对一”映射关系, 且称这些最优解互为等效解。以路径规划问题为例, 对于需同时考虑路径长度和安全性的场景, 可能存在若干条不同的等效最优路径, 它们在决策空间中表现为不同的节点序列或坐标轨迹, 但在目标空间中所对应的路径长度与安全性评分几乎一致, 均位于帕累托前沿的同一位置。根据各等效 PSs 的搜索难度是否相同, MMOPs 可分为平衡和不平衡两类^[6], 其中前者各等效 PSs 的搜索难度相同, 后者各等效 PSs 的搜索难度可能各不相同。

进化算法是一类模拟自然选择和遗传学原理的优化方法, 具有极强的全局搜索和适应能力^[7], 已被广泛应用于各类 MMOPs 的求解^[8-11]。对于各等效 PSs 搜索难度相同的 MMOPs, 现有多模态多目标进化算法 (Multimodal Multiobjective Evolutionary

Algorithms, MMEAs) 已表现出较好性能, 大部分情况下可找到决策空间中的各等效 PSs 并覆盖目标空间中的 PF^[12-13]。对于各等效 PSs 搜索难度不同的 MMOPs, 现有 MMEAs 通过放宽支配关系或在小生境范围内衡量收敛性等方式, 可在一定程度上提升此类问题的优化性能^[14-15]。但由于优化过程中依然容易过早收敛至部分易搜索的 PSs, 进而丢失其他难搜索的等效 PSs 或对难搜索等效 PSs 所在区域的开发不足, 现有面向不平衡 MMOPs 的 MMEAs 尚需更好平衡决策空间的收敛性和多样性, 以提升难搜索等效 PSs 所在区域的定位和开发能力。

以 IDMPM2T1 测试问题为例^[6], 图 1 展示了该问题的帕累托等级景观图, 颜色越亮代表对应区域的帕累托等级越低, 即收敛性越好。图中蓝色线段和红色线段为该测试问题的两个等效 PSs, 分别用 PS_1 和 PS_2 标记。可以看出, PS_1 周边呈明亮色

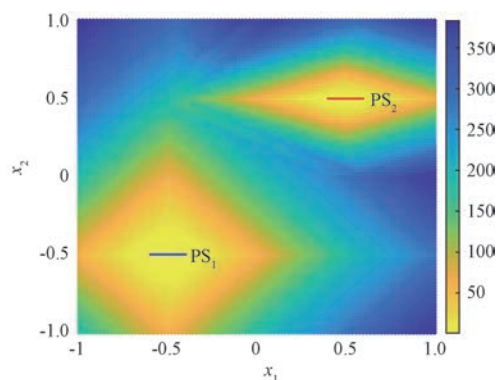


图 1 IDMPM2T1 的帕累托等级景观图

调的区域明显比 PS_2 周边更广。因此,对优化过程中分别靠近这两个等效 PSs 的不同个体而言,当距离相同时,靠近 PS_1 的个体更容易支配靠近 PS_2 的个体,也即 PS_1 附近区域的个体具有更好的收敛性,从而使 PS_1 更容易被定位。与此同时,由于 PS_2 附近收敛性较好的区域相对较窄,为确保种群的多样性,优化过程中位于该区域的个体容易丢失,进而容易导致该区域的开发不足。

针对不平衡 MMOPs 中各等效 PSs 搜索难度不同带来的挑战,本文围绕决策空间中收敛性和多样性的平衡,提出了一种基于两阶段进化的不平衡多模态多目标优化算法(Two Stage Evolution for Imbalanced Multimodal Multiobjective Optimization, IMMO-TSE),以进一步提升 MMEAs 在求解不平衡 MMOPs 时的优化性能。其中,第一阶段进化主要关注对搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域的全面定位。第二阶段进化主要关注对前一阶段所定位各等效 PSs 所在区域的均衡开发。具体而言,在第一阶段,提出了一种基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略,通过适度放宽个体间的支配关系,以提升难搜索区域中个体的存活率。采用该个体收敛性计算策略可更好地平衡种群在决策空间的收敛性和多样性,可避免优化过程中过早集中至易搜索区域,有利于更全面定位搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域。在第二阶段,通过小生境方式,以各子种群所包含全局非支配个体平均数为基础,提出了一种基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略。对于与某个或某些难搜索区域对应的子种群,当其收敛状态明显差于种群的整体收敛状态时,自适应采用更利于保留难搜索区域个体的环境选择策略,亦可较好地平衡种群在决策空间的收敛性和多样性,有利于更均衡开发各搜索难度不同的等效 PSs 所在区域。

本文的主要工作和贡献如下:

(1)提出了一种基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略,可更全面定位搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域;

(2)提出了一种基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,可更均衡开发搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域;

(3)提出了一种基于两阶段进化的不平衡多模态多目标优化算法 IMMO-TSE,通过对决策空间中收敛性和多样性的平衡,可有效提升搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域的全面定位和均衡开发。

本文的组织结构如下:第 2 节介绍问题定义及相关工作;第 3 节介绍所提出算法;第 4 节介绍实验方案并对实验结果进行分析;最后总结全文并展望未来工作。

2 问题定义和相关工作

2.1 问题定义

一个最小化 MMOPs 的数学定义如下^[16]:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x \in \Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{s. t. } &\exists \mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j \in \Omega, \mathbf{x}^i \neq \mathbf{x}^j \wedge \mathbf{F}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^j) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为待求解的 m 个目标函数, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为决策空间 Ω 中的 n 维决策变量, $\mathbf{x}^i$ 和 $\mathbf{x}^j$ 为 Ω 中的帕累托最优解。如果 $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^j)$, 则称 $\mathbf{x}^i$ 和 $\mathbf{x}^j$ 为等效帕累托最优解, 称 $\mathbf{x}^i$ 和 $\mathbf{x}^j$ 各自所属的 PS 等效。

若一个 MMOPs 满足以下任意条件, 则称其为不平衡 MMOPs^[6]:

(1)对于 PF 附近的一个点, 接近一个等效 PS 的解更有可能支配接近另一个等效 PS 的解;

(2)对于 PF 上的一个点, 寻找一个等效 PS 上的解的复杂度低于寻找另一个等效 PS 上的解的复杂度。

其中, 接近一个等效 PS 的解是指该等效 PS 之外距离其最近的个体。对于不平衡 MMOPs, 与某两等效 PS 分别接近的两个解, 它们的帕累托等级可能不同。寻找一个等效 PS 上的解的复杂度是找到该解所需的计算成本, 与适应度评估次数相关, 较高的复杂度意味着需要更多的适应度评估才能找到该解。

根据不平衡 MMOPs 的上述定义, 可知其不同等效 PSs 所在区域的收敛性不同。当某等效 PS 所在区域中个体的收敛性相对较差时, 要么容易被其他区域中的个体支配, 要么收敛速度较慢, 在优化过程中被淘汰的可能性均会更大, 导致该区域相关个体在种群中的占比更低, 使得该区域被充分搜索的概率更小。此类区域通常被称为难搜索区域, 其所包含等效 PS 被称为难搜索等效 PS。与之相反, 当某等效 PS 所在区域中个体的收敛性相对较好时, 在优化过程中被保留的可能性会更大, 导致对应区域被充分搜索的概率更高。此类区域通常被称为易搜索区域, 其所包含等效 PS 被称为易搜索等效 PS。

2.2 相关工作

现有 MMEAs 可分为平衡型多模态多目标优化算法、综合型多模态多目标优化算法,以及不平衡型多模态多目标优化算法三类。

2.2.1 平衡型 MMEAs

面向平衡 MMOPs 的 MMEAs 通过多样性引入、小生境和存档等机制以更好地找到多个搜索难度相同的等效 PSs。

其中,多样性引入方面,DN-NSGAI^[16]和 MMOEA-GPD^[17]在决策空间中分别使用欧氏距离和调和平均距离衡量各个体的多样性,有利于相同难度等效 PSs 的搜索。Omni-optimizer^[18]和 MMODE_TSM_MMED^[19]分别使用拥挤距离和最大延伸距离同时考虑决策空间和目标空间的多样性,可进一步提高种群在目标空间的均匀程度。CMMO-MTA^[20]和 RMDs^[21]则基于个体在决策空间和目标空间的最近邻欧式距离之和衡量各个体的多样性,可更准确刻画个体的拥挤程度,有助于更好地同时维持种群在决策空间和目标空间的均衡分布。

小生境方面,MO_Ring_PSO_SCD^[22]和 MOEA/D-SS^[23]分别基于个体在决策空间的索引顺序和目标空间的权重向量划分小生境并据此计算多样性,有利于更准确地衡量整个种群的多样性。此外,BOEA^[24]和 MMOEA_DC_HR^[25]在目标空间采用层次聚类划分小生境,MMOWPA-CN^[26]和 MMONBSA^[27]则在决策空间中分别采用 k -means 聚类和相似性传播聚类划分小生境,可动态识别种群的分布特征,从而更好地定位各等效 PSs 所在的区域。

存档方面,TriMOEA-TA&R^[28]在决策空间中采用决策变量分析法和切比雪夫距离法选择多样性好的个体进行存档,并基于存档与父代的并集生成子代。MMMEA^[29]基于个体在决策空间和目标空间的最近邻距离之和,同样选择多样性好的个体进行存档,但在每轮迭代中仅基于存档生成子代。MMODE_SPDN^[30]则分别采用动态邻居策略、基于 k -means 聚类的特殊拥挤距离策略、网格策略维持三类不同的存档,并基于存档生成子代。存档机制可保留并利用进化过程中发现的优质个体,而不仅仅依赖当前种群的分布来维持多样性,可为种群提供更为理想的搜索方向。

总体上,现有 MMEAs 已能较好地求解各等效 PSs 搜索难度相同的平衡 MMOPs,但由于在进化过程中未考虑各等效 PSs 搜索难度不同的情形,无法有效应对各类不平衡 MMOPs。

2.2.2 综合型 MMEAs

不平衡 MMOPs 中各等效 PSs 的搜索难度可能各不相同,导致优化过程中种群在决策空间的收敛性和多样性难以平衡,容易过早收敛至部分易搜索的 PSs,进而丢失其他难搜索的等效 PSs 或对难搜索等效 PSs 所在区域的开发不足。为能更好地支持不平衡 MMOPs 的优化,同时面向平衡和不平衡 MMOPs 的综合型 MMEAs,通常通过放宽支配关系或仅在小生境范围内衡量收敛性来避免种群的过快收敛。其中,支配关系放宽方面,DEA-IG-NN^[31]、CMMO^[32]和 CoMMEA^[33]分别采用固定方式、分段函数和连续函数设置阈值,当个体间的目标值之差在阈值范围内时不形成支配关系。DLEA^[34]则通过差异注意力机制动态调整个体的目标值自适应放宽支配关系。支配关系放宽有助于缓解个体在目标空间的选择压力,避免种群过早收敛。

小生境范围内收敛性衡量方面,MMEA-IES^[35]每次在目标空间随机选择三个个体与权重向量绑定划分小生境,并在小生境中基于切比雪夫距离计算收敛性。MMEA-WRI^[36]则每次在决策空间选择 k 个邻近个体划分小生境,并在小生境中采用弱收敛指标计算收敛性。通过将个体的评估限定在各小生境范围内,有利于避免难搜索区域中的理想个体被淘汰,但容易因小生境划分不当导致评估偏差。为此,MMOPSOSS^[37]、MMEA-TDI^[38]和 FPITSEA^[39]在决策空间分别基于区域聚类、局部通信聚类和最近最好聚类划分小生境,以更好地识别和保留各局部范围内表现优异的个体。RHEA^[40]、MMEA-VGAE^[41]和 DNPd^[42]则在决策空间中通过设置特定的半径来划分小生境。其中,RHEA 根据进化进度及个体间的欧式距离和设置半径,MMEA-VGAE 根据非支配个体和支配个体的收敛状态设置半径,DNPd 则根据迭代次数采用指数增长方式设置半径。基于半径划分小生境的方式计算效率高,但半径的过快变化可能导致支配关系的剧变,造成收敛过程不稳定。

总体而言,同时面向平衡和不平衡 MMOPs 的综合型 MMEAs,通过引入支配关系调节和局部评估机制对种群在决策空间的收敛性和多样性进行一定程度的平衡,有利于同步寻找各类搜索难度相同或差异不大的等效 PSs,但对于搜索难度极度不平衡的复杂问题,现有方法的性能尚存在较大改进空间。

2.2.3 不平衡型 MMEAs

鉴于实际应用场景中的 MMOPs 通常具有不平衡特征,CPDEA^[6]首次对此类问题进行了针对性研究,提出了一种收敛惩罚密度方法。该方法有利于均衡种群的多样性和收敛性,可提升种群对高搜索难度等效 PSs 的覆盖能力,但利用高斯概率密度函数和 k 近邻划分的小生境在进化初期可能因范围过大而受到其他个体干扰,在后期又可能因范围过小而陷入局部最优,影响部分搜索难度大的等效 PSs 所在区域的定位与开发。CDP-BCD^[14]针对全局收敛优先机制的不足,采用双种群协同方式进行种群更新。其中,辅助种群用于帮助主种群定位可能存在等效 PSs 的区域,主种群则侧重于平衡决策空间中的收敛性和多样性。MMEA-ICRM^[15]将局部收敛指标与全局收敛指标结合。前者用于定位各等效 PSs,并防止潜在的过早收敛。后者用于筛选具有良好局部收敛质量的个体。此外,MMEA-ICRM 还使用两阶段交配选择来增强决策空间中的多样性。

当前,专门面向不平衡 MMOPs 的 MMEAs 相对较少。如何更好地应对不平衡带来的挑战,尚需针对性开展研究。

2.3 研究动机

尽管部分现有 MMEAs 通过放宽支配关系或仅在小生境范围内衡量收敛性,可在环境选择时提升难搜索等效 PSs 所在区域个体的存活率,避免种群过快聚集到易搜索等效 PSs 所在区域,有利于提高难搜索区域中的 PSs 被成功定位和开发的可能

性。但由于不平衡 MMOPs 中不同等效 PSs 所在区域的收敛性可能存在极大差异,现有策略仍难以全面定位和均衡开发各难易不同的等效 PSs 所在区域,需要进一步研究不同区域中个体收敛性的理想评估方式,并据此开展合适的优化操作。

仍以 IDMPM2T1 测试问题为例,图 2 示意了优化过程中支配关系放宽或小生境范围设置不当,导致不同等效 PSs 所在区域的定位或开发不够理想的情形。图 2(a)中, a 、 b 、 c 和 d 为靠近等效 PS₁ 的个体, e 和 f 为靠近等效 PS₂ 的个体。图 2(b)为这些个体在目标空间所处的帕累托等级层,其中 a 和 b 支配其他 4 个个体, e 则被所有其他个体支配。

当采用较小幅度放宽支配关系时,设 c 和 d 不再被 a 和 b 支配,其他支配关系不变。若需从这 6 个个体中选择 3 个进入下一代,综合考虑收敛性和多样性,则 a 、 b 和 c 入围。此时,由于 e 和 f 均未入围,导致等效 PS₂ 所在区域不能被定位。而当支配关系放宽过大时,各个体的支配关系可能过度减少,从而导致优化过程收敛压力显著降低,最终不仅无法全面定位各等效 PSs 所在区域,甚至完全无法收敛。

当采用小生境方式时,同样存在类似挑战。若半径设置过大,如图 2(a)中的半径 r ,假设此时 e 不再被 c 支配,其他支配关系不变。在选择下一代个体时,依然会是选择 a 、 b 和 c 入围,仍会导致等效 PS₂ 所在区域不能被定位。而当半径设置过小时,各个体的支配关系亦可能过度减少,同样造成因收敛压力显著降低而无法全面定位各等效 PSs 所在区域,甚至完全无法收敛。

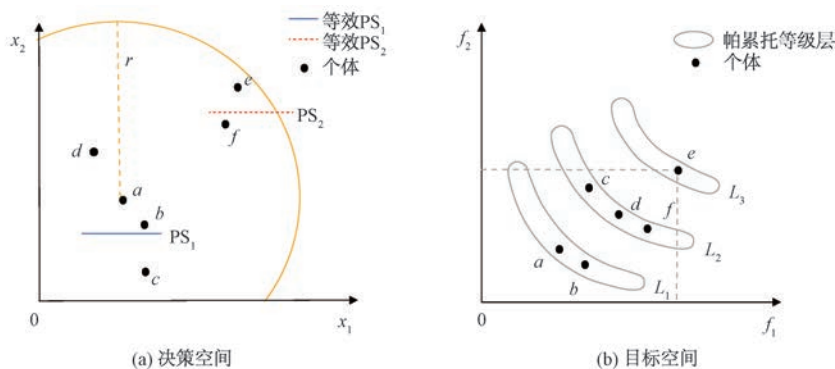


图 2 支配关系放宽及小生境设置示意图

为合理放宽支配关系,并有效发挥小生境的作用,本文将整个优化过程划分为前后相关的两个阶段。其中,第一阶段基于种群平均支配数、自适应权重和截断机制,通过合理放宽支配关系,在个体收敛性评估过程中差异化减少不同个体被支配数的取

值,以更全面定位搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域。第二阶段基于动态划分的各子种群的收敛状态,通过有效发挥小生境的作用,自适应地采用不同的环境选择方式,以更均衡开发前一阶段所定位的各等效 PSs 所在区域。

3 算法设计

本节首先介绍 IMMO-TSE 的整体框架,然后详细介绍第一阶段所采用的个体收敛性计算策略,以及第二阶段所采用的自适应环境选择策略,最后分析 IMMO-TSE 的时间复杂度。

3.1 IMMO-TSE 整体框架

IMMO-TSE 的整体框架如算法 1 所示。首先,随机生成大小为 N 的初始种群 P (第 1 行),并将当前迭代次数 g 初始化为 0 (第 2 行)。当 g 小于两阶段分界点 δ 与最大迭代次数 M 的乘积 δM 时,采用第一阶段进化方式 (第 5-8 行)。当 g 大于等于 δM 且小于 M 时,采用第二阶段进化方式 (第 10-15 行)。在每轮迭代后,对 g 进行加一操作 (第 17 行)。当达到最大迭代次数时,输出最终种群 P 。

当采用第一阶段进化方式时,首先基于当前种群 P 中个体的帕累托支配等级生成交配池 Q ^[43] (第 5 行)。然后基于 Q 采用经典的模拟二进制交叉^[44]和多项式变异^[43]生成子代种群 O (第 6 行)。接着基于文献[20]中的多样性计算方式和 3.2 节提出的个体收敛性计算策略评估 $P \cup O$ 中各个体的适应度 (第 7 行)。最后采用快速排序方式,从 $P \cup O$ 中选取 N 个适应度最好的个体生成下一代种群 P (第 8 行)。

当采用第二阶段进化方式时,首先采用 DBSCAN^[45]将当前种群 P 聚类为若干个子种群的集合 P_{sub} (第 10 行)。然后采用与第一阶段相同的方式,为每个子种群 $P_{sub}[i]$ 逐一生成交配池 $Q_{sub}[i]$,并基于 $Q_{sub}[i]$ 生成各子代子种群 $O_{sub}[i]$ (第 11-14 行)。最后采用 3.3 节提出的自适应环境选择策略,并结合快速排序方式,基于 $P_{sub} \cup O_{sub}$ 生成下一代种群 P (第 15 行)。

算法 1. IMMO-TSE

输入: 种群大小 N , 最大迭代次数 M , 两阶段分界点 δ , 子种群收敛状态判断阈值 τ

输出: 种群 P

1. 初始化种群 P ;
2. $g \leftarrow 0$;
3. while $g < M$ do
4. if $g < \delta M$ then
5. 基于 P 生成交配池 Q ;
6. 基于 Q 生成子代种群 O ;
7. 评估 $P \cup O$ 中各个体的适应度;
8. 对 $P \cup O$ 进行环境选择,生成下一代种群 P ;
9. else

10. 将 P 聚类为子种群集合 P_{sub} ;
11. for $i = 1$ to $|P_{sub}|$
12. 基于 $P_{sub}[i]$ 生成交配池 $Q_{sub}[i]$;
13. 基于 $Q_{sub}[i]$ 生成子代子种群 $O_{sub}[i]$;
14. end for
15. 对 $P_{sub} \cup O_{sub}$ 进行自适应环境选择,生成下一代种群 P ; // 算法 2
16. end if
17. $g++$;
18. end while

值得注意的是,经过第一阶段对各等效 PSs 所在区域的定位,种群中的个体会大致分布在各等效 PSs 附近。因此,若对种群进行聚类操作,则所得到的每个子种群总体上会与各等效 PSs 所在区域一一对应。为聚焦并提升各等效 PSs 所在区域的开发效能,第二阶段采用了对聚类后得到的各子种群单独生成子代的方式。由于 DBSCAN 算法无需预先指定簇的数量,而可根据种群密度自动识别簇结构,能够有效避免簇数量固定导致的划分误差,且可以识别出任意形状的簇,故在第二阶段采用了 DBSCAN 对当前种群进行聚类。

此外,尽管 IMMO-TSE 在第一阶段和第二阶段采用的交叉变异算子相同,但用于生成交配池的源头不同。其中,第一阶段基于整个种群生成交配池,以支持对各等效 PSs 所在区域的全面定位,第二阶段采用小生境方式,基于与各等效 PSs 所在区域对应的子种群生成交配池,以支持对各等效 PSs 所在区域的深入开发。与此同时,在第二阶段进化中,由于变异操作的存在,少量新生子代个体可能脱离原父代子种群所对应等效 PSs 所在区域而进入其他子种群所对应区域。为始终聚焦于第一阶段所定位各等效 PSs 所在区域的开发,避免进化过程的发散,在第二阶段的每轮迭代中,采用了对当前种群重新聚类的方式。

3.2 基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略

针对不平衡 MMOPs 中,各难搜索等效 PSs 所在区域收敛性较差导致对应区域难以有效定位的挑战,IMMO-TSE 在第一阶段的进化中采用了公式 (2) 所示,基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略。该策略通过适度放宽个体间的支配关系,以实现对各难易不同的等效 PSs 所在区域的全面定位。

$$\text{Convergence}(p, \mathbf{P}) = \max\left(0, \text{dom}(p, \mathbf{P}) - \left(1 + \frac{M - g/\delta}{M}\right) \overline{\text{dom}}(\mathbf{P})\right) \quad (2)$$

其中, $\text{Convergence}(p, \mathbf{P})$ 表示个体 p 在种群 $\mathbf{P}$ 中的收敛性, 其最小取值为 0。 $\text{dom}(p, \mathbf{P})$ 表示 p 被 $\mathbf{P}$ 中其他个体支配的次数, $\overline{\text{dom}}(\mathbf{P})$ 表示 $\mathbf{P}$ 中各个体被其他个体支配的平均次数, g 和 M 分别为 IMMO-TSE 的当前迭代次数和最大迭代次数, δ 为 IMMO-TSE 中前后两个阶段的分界点。

$\text{dom}(p, \mathbf{P})$ 的计算公式如下:

$$\text{dom}(p, \mathbf{P}) = \sum_{q \in \mathbf{P}, q \neq p} P\text{dom}(p, q) \quad (3)$$

其中, $P\text{dom}(p, q)$ 用于判断个体 q 是否支配个体 p :

$$P\text{dom}(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{if } q \prec p \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

其中, $q \prec p$ 表示个体 q 帕累托支配个体 p 。

对于种群 $\mathbf{P}$ 中个体 p 而言, $\text{dom}(p, \mathbf{P})$ 的值越大, 说明其当前收敛性越差。在多样性等其他指标相同的情况下, p 在环境选择过程中被删除的可能性越大。从而导致在后续进化中, 其所在区域被进一步探索的可能性越小。

由于不平衡 MMOPs 的难搜索区域正是个体收敛性相对较差的区域, 若直接用 $\text{dom}(p, \mathbf{P})$ 衡量个体的收敛性, 则不利于对难搜索区域的充分探索, 进而难以实现对难搜索等效 PSs 所在区域的有效定位。

为此, 本文在采用公式(2)计算个体收敛性时, 一方面以 $\text{dom}(p, \mathbf{P})$ 为基础, 以客观体现个体当前的收敛状态; 另一方面通过减去若干倍当前种群平均支配数 $\overline{\text{dom}}(\mathbf{P})$, 并采用截断机制 $\max(0, *)$ 限定收敛性的取值下限, 可有限降低自身收敛状态本就较好的易搜索区域中个体收敛性的取值, 而对于难搜索区域中个体收敛性的取值则进行更大程度的降低。故采用公式(2)可总体降低不同区域个体收敛性取值的差异, 并降低收敛性对优化过程的影响, 避免优化过程中过早收敛至部分易搜索的等效 PSs, 以更好地实现对各等效 PSs 所在区域的全面定位。

与此同时, 随着优化过程的逐步推进, 各区域中个体的收敛性总体上均会越来越越好, 各个体被其他个体支配的次数会越来越低。为避免过大力度地持续性降低个体收敛性的取值, 导致收敛性失去对优化过程的必要影响, 公式(2)采用自适应权重 $(1 + (M - g/\delta)/M)$ 作为系数, 逐步降低在第一阶段进

化每轮迭代过程中所减去的当前种群平均支配数 $\overline{\text{dom}}(\mathbf{P})$ 的权重。具体而言, 在初始轮的个体收敛性计算中, 所减去的当前种群平均支配数的权重值为 2。此后, 随着迭代次数 g 的增长, 该权重逐步减小。当进入第一阶段最后一次迭代时, 该权重减至 1。此外, 公式(2)以 $\overline{\text{dom}}(\mathbf{P})$ 为基准降低个体收敛性取值的原因, 在于 $\overline{\text{dom}}(\mathbf{P})$ 能够有效刻画当前种群的整体收敛状态, 为每轮迭代中个体收敛性取值的减少区间提供合理依据。既避免因减少过大, 导致绝大部分个体的收敛性都取 0 值, 失去个体收敛性差异在优化过程中的意义; 又避免因收敛性取值减少不足, 导致绝大部分个体的收敛性都取不到 0 值、而仅作同等程度的减少, 无法差异化降低不同区域的个体收敛性取值。

采用公式(2)尽管有利于降低不同难度搜索区域的个体收敛性取值差异, 但相对而言, 易搜索区域的收敛性在调整后依然整体上会优于难搜索区域。因而在第一阶段进化结束时, 尽管采用公式(2)能更好地实现对各等效 PSs 所在区域的全面定位, 但所定位各区域的个体数量在种群中仍会存在差异。表现为易搜索区域的个体数量仍会相对较多, 且收敛性相对更好, 但多样性会相对较差; 难搜索区域的个体数量则会相对较少, 且收敛性相对较差, 但多样性会相对较好。

3.3 基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略

针对不平衡 MMOPs 中, 难搜索等效 PSs 所在区域收敛性较差, 导致对应区域难以有效开发的挑战, IMMO-TSE 在第二阶段进化中通过小生境方式, 采用了算法 2 所示的基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略, 以实现对各难易不同的等效 PSs 所在区域的均衡开发。

算法 2. 自适应环境选择

输入: 父代子种群集合 $\mathbf{P}_{sub}$, 子代子种群集合 $\mathbf{O}_{sub}$, 子种群收敛状态判断阈值 τ , 种群大小 N

输出: 种群 $\mathbf{P}$

1. 将 $\mathbf{P}_{sub} \cup \mathbf{O}_{sub}$ 中的全局非支配个体放入 $\mathbf{R}$ 中;
2. for $i = 1$ to $|\mathbf{P}_{sub}|$
3. 计算 $(\mathbf{P}_{sub}[i] \cup \mathbf{O}_{sub}[i]) \cap \mathbf{R}$ 中元素个数 $z[i]$;
4. 将 $\mathbf{P}_{sub}[i] \cup \mathbf{O}_{sub}[i]$ 中的非支配个体和支配个体分别放入 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$;
5. end for
6. while $|\mathbf{T}| < N$ do
7. 将 $\mathbf{S}$ 中的当前全部非支配个体放入 $\mathbf{T}$ 中, 并将对应个体从 $\mathbf{S}$ 中删除;
8. end while

9. if $\exists i \in [1, |P_{sub}|], z[i] \leq \tau |R| / |P_{sub}|$
10. 基于多样性从 T 中选择 N 个个体放入 P ;
11. else
12. 基于适应度从 T 中选择 N 个个体放入 P ;
13. end if

算法 2 中, 首先将父代子种群集合 P_{sub} 和子代子种群集合 O_{sub} 的并集中, 所有全局非支配个体放入集合 R 中(第 1 行)。然后, 逐一计算每个父代子种群 $P_{sub}[i]$ 与其子代种群 $O_{sub}[i]$ 的并集中属于 R 的元素个数 $z[i]$ (第 3 行), 并将 $P_{sub}[i] \cup O_{sub}[i]$ 中的非支配个体和支配个体分别放入集合 T 和 S 中(第 4 行)。接着, 若 T 中的元素个数小于种群大小 N , 则迭代地将 S 中的当前全部非支配个体放入 T 中, 并将对应个体从 S 中删除(第 6-8 行)。最后, 若存在某个 $P_{sub}[i] \cup O_{sub}[i]$ 中所包含全局非支配个体数均小于等于阈值 τ 与各子种群当前全局非支配个体数平均值 $|R| / |P_{sub}|$ 的乘积(第 9 行), 则从 T 中选择 N 个多样性最好的个体, 放入 P 中作为下一代种群(第 10 行)。否则, 从 T 中选择 N 个适应度最好的个体, 放入 P 中作为下一代种群(第 12 行)。

在算法 2 中, 基于与各等效 PSs 所在区域对应的各子种群所包含当前全局非支配个体数, 自适应采用不同环境选择算子的原因, 在于若某个或某些子种群所包含当前全局非支配个体数少于等于阈值 τ 与各子种群当前全局非支配个体数平均值的乘积, 说明这些子种群所对应区域当前的收敛程度明显差于其他区域, 需额外加大这些区域的开发力度, 方能实现对各 PSs 所在区域的均衡开发。相反, 若所有子种群所包含当前全局非支配个体数均大于阈值 τ 与各子种群当前全局非支配个体数平均值的乘积, 说明各子种群所对应区域当前的收敛程度差异在相对较小范围内, 鉴于进化算法固有的随机性, 不需额外关注某些区域的开发, 即可实现对各 PSs 所在区域的均衡开发。

当优化过程中存在需额外加大开发力度的区域时, 在算法 2 中采用了基于多样性的环境选择算子。其中, 多样性的计算采用与文献[20]相同的方法。在从基于支配关系获得的集合 T 中选择个体生成下一代种群时, 仅从多样性的角度进行选择, 而不考虑收敛性, 从而偏向保留多样性相对较好而收敛性相对较差的难搜索区域中的相关个体。因此可加大难搜索区域的开发力度, 进而有利于各 PSs 所在区域的均衡开发。

当优化过程中不存在需额外加大开发力度的区

域时, 在算法 2 中采用了基于适应度的环境选择算子。此处的适应度为多样性与收敛性之和, 其中多样性的计算亦采用与文献[20]相同的方法, 收敛性的计算则直接用当前个体被种群中其他个体支配的次数表示。此时, 在从 T 中选择个体生成下一代种群时, 同步考虑收敛性和多样性, 实现对各 PSs 所在区域的均衡开发。

3.4 时间复杂度分析

IMMO-TSE 分为前后两个阶段。在第一阶段的每轮迭代中, 交配池生成和子代生成的时间复杂度分别为 $O(mN^2)$ 和 $O(N)^{[18]}$ 。其中, m 为目标维度, N 为种群大小。适应度计算需评估每个个体的多样性和收敛性。其中, 个体多样性计算所需时间为 $O(mN^2)^{[20]}$ 。所采用基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算中, 所需时间主要在于基于个体间支配关系的平均支配数计算, 其时间复杂度为 $O(mN^2)$ 。因此, 适应度计算的整体时间复杂度为 $O(mN^2)$ 。在此基础上的环境选择, 仅为从 $2N$ 个个体中选取 N 为适应度值最大的个体, 基于快速排序方式, 最坏情况下的时间复杂度为 $O(N^2)$ 。故第一阶段的总体时间复杂度为 $O(mN^2)$ 。

在第二阶段的每轮迭代中, 子种群聚类最坏情况下的时间复杂度为 $O(N^2)^{[45]}$ 。各子种群独立进行交配池生成和子代生成, 所需时间与第一阶段相同, 亦为 $O(mN^2)$ 和 $O(N)$ 。所采用基于子种群收敛状态的自适应环境选择中, 首先, 通过非支配排序识别种群中的所有全局非支配个体, 所需时间为 $O(mN^2)$, 对各个子种群中全局非支配个体数量的统计则需 $O(N)$ 。接着, 基于各子种群内部的局部非支配关系, 进一步将各子种群划分为非支配和支配两个子集, 其时间复杂度为 $O(mN^2)$ 。在最后的环境选择阶段, 不论基于多样性还是基于适应度, 采用快速排序方式的个体选择最坏情况下的时间复杂度为 $O(N^2)$ 。故第二阶段的时间复杂度仍为 $O(mN^2)$ 。

综上, IMMO-TSE 的时间复杂度为 $O(mN^2)$ 。

4 实验结果与分析

本节在不平衡多模态多目标优化基准测试问题集 IDMP^[6] 及其难度更大变体 IDMP'^[6] 和 IDMP_e^[46], 以及带不平衡特性的真实地图问题^[47] 上, 将 IMMO-TSE 与 7 个代表性的 MMEAs 进行对比, 对 IMMO-TSE 的性能进行综合分析。

4.1 实验设计

(1) 基准测试问题集

IDMP 是不平衡多模态多目标优化领域专用的基准测试问题集,共包含 4 类难度不同,目标数分别为二目标、三目标和四目标的 12 个测试问题。其中,难度类型 1 和类型 2 问题中的不平衡对应不平衡 MMOPs 定义中的条件(1)。难度类型 3 问题中的不平衡对应定义中的条件(2)。难度类型 4 问题中的不平衡则同时对应定义中的条件(1)和(2)。IDMP 通过难度函数中的参数 α ,调整不同等效 PSs 的搜索难度,在各测试问题上的默认取值如表 1 所示。 $\alpha_{p,i}$ 表示在 i 目标问题上寻找第 p 个等效 PS 的难度。 $\alpha_{p,i}$ 的值越大,寻找第 p 个等效 PS 的难度越大。

表 1 IDMP 测试问题中 $\alpha_{p,i}$ 的默认设置

目标数		难度类型 1	难度类型 2	难度类型 3	难度类型 4
二目标	$\alpha_{1,2}$	1	0	0	1
	$\alpha_{2,2}$	3	0.4	0.4	4
三目标	$\alpha_{1,3}$	1	0	0	1
	$\alpha_{2,3}$	2	0.2	0.1	2
	$\alpha_{3,3}$	3	0.4	0.2	3
	$\alpha_{4,3}$	4	0.6	0.3	4
四目标	$\alpha_{1,4}$	1	0	0	1
	$\alpha_{2,4}$	2	0.2	0.05	2
	$\alpha_{3,4}$	3	0.4	0.1	3
	$\alpha_{4,4}$	4	0.6	0.15	4
	$\alpha_{1,4}$	1	0	0	0
	$\alpha_{2,4}$	2	0.2	0.05	0
	$\alpha_{3,4}$	3	0.4	0.1	0
	$\alpha_{4,4}$	4	0.6	0.15	0

(2) 对比算法与参数设置

7 个先进的 MMEAs 被用于与 IMMO-TSE 进行对比,分别为 DN-NSGAI^[16]、BOEA^[24]、MMOEA-GPD^[17]、CMMO^[32]、MMEA-IES^[35]、FPITSEA^[39]和 CPDEA^[6]。其中, DN-NSGAI 是经典的 MMEAs 算法。MMOEA-GPD 是在决策空间中进行多样性引入的算法。BOEA 是基于小生境技术的算法。CMMO 是采用支配关系放宽方法的算法。MMEA-IES 和 FPITSEA 是仅在小生境范围内衡量收敛性的算法。CPDEA 是专门面向不平衡 MMOPs 的算法。

为确保公平比较,参照多模态多目标优化领域的通用做法,IMMO-TSE 与各对比算法在各测试问题上的种群大小和最大评估次数进行相同的设置,如表 2 所示。交叉算子和变异算子的参数设置如表 3 所示,其中 D 为决策变量的维度。各对比算法的特有参数与原始文献保持一致。IMMO-TSE

中的两阶段分界点 δ 设置为 0.4,子种群收敛状态判断阈值 τ 设置为 0.7。

表 2 种群大小和最大评估次数设置

目标	种群大小(N)	最大评估次数(M)
二目标	60	18000
三目标	120	36000
四目标	240	72000

表 3 交叉变异参数设置

参数名	参数值
交叉概率(P_c)	1
变异概率(P_m)	1/ D
交叉分布指标(η_c)	20
变异分布指标(η_m)	20

各算法运行的硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i7-7700H CPU、64GB RAM,软件环境为 Window 10 下的 PlatEMO^[48]、MATLAB 2021b。

(3) 评价指标

参照多模态多目标优化领域的通用做法,使用 IGD^[49] 指标和 HV^[50] 指标衡量 IMMO-TSE 与各对比算法所获得 PF 与真实 PF 在目标空间的接近程度和均匀程度。使用 IGDX^[51] 指标和 PSP^[52] 指标衡量 IMMO-TSE 与各对比算法所获得等效 PSs 与真实等效 PSs 在决策空间的接近程度和均匀程度。使用 IGDM^[28] 指标综合衡量 IMMO-TSE 与各对比算法所获得 PF、PSs 与真实 PF、PSs 在目标空间与决策空间的接近程度和均匀程度。IGDM 基于一组均匀分布于真实 PF 上的参考点,并将每个参考点在决策空间中对应的解所组成集合作为参考解集,从收敛性、目标空间多样性和决策空间多样性三个方面对算法获得的种群进行综合评价。

上述指标中,IGD、IGDX 和 IGDM 的值越小表示算法性能越好,HV 和 PSP 的值越大表示算法性能越好。

在各测试问题上,每个算法均独立运行 30 次,采用置信水平为 95% 的 Wilcoxon 秩和检验^[53]和 Friedman 检验^[54]对 IMMO-TSE 与各对比算法的性能进行衡量。符号“+”、“-”和“=”分别表示对比算法的性能明显优于、劣于和近似于 IMMO-TSE。

4.2 对比实验

表 4 和表 5 分别为 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 12 个 IDMP 基准测试问题集上,独立运行 30 次得到的平均 IGD 值和平均 HV 值,以及对应标准差的统计结果,在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

表 4 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 IGD 均值和标准差

Problem	DN-NSGAII	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1	1.6833e-3 (9.09e-5) —	1.6647e-3 (2.09e-4) —	1.3741e-3 (1.53e-4) =	1.4083e-3 (2.03e-4) =	1.6829e-3 (7.45e-5) —	1.3938e-3 (4.64e-5) —	1.5838e-3 (1.05e-4) —	1.2993e-3 (4.96e-5)
IDMPM2T2	1.6671e-3 (8.24e-5) —	1.6284e-3 (1.49e-4) —	1.5813e-3 (1.11e-4) —	1.4831e-3 (2.01e-4) —	1.7349e-3 (9.27e-5) —	1.3835e-3 (5.43e-5) —	1.4689e-3 (4.60e-5) —	1.2768e-3 (3.96e-5)
IDMPM2T3	1.8305e-3 (2.09e-4) —	1.6076e-3 (2.13e-4) —	1.5133e-3 (9.13e-5) —	1.6248e-3 (7.43e-5) —	1.7636e-3 (7.08e-5) —	1.6152e-3 (9.51e-5) —	1.5737e-3 (7.08e-5) —	1.3523e-3 (3.08e-5)
IDMPM2T4	1.6923e-3 (9.57e-5) —	1.5823e-3 (2.43e-4) —	1.3602e-3 (1.57e-4) =	1.3295e-3 (1.63e-4) —	1.6726e-3 (8.44e-5) —	1.4200e-3 (2.07e-4) —	1.5436e-3 (1.03e-4) —	1.3088e-3 (8.58e-5)
IDMPM3T1	8.4232e-3 (2.73e-4) —	7.1166e-3 (2.77e-4) —	7.1347e-3 (3.09e-4) —	7.4850e-3 (2.21e-4) —	7.6890e-3 (2.26e-4) —	7.4264e-3 (2.06e-4) —	6.7895e-3 (1.54e-4) —	6.5360e-3 (1.57e-4)
IDMPM3T2	8.4470e-3 (3.61e-4) —	7.0885e-3 (2.24e-4) —	7.4732e-3 (2.13e-4) —	7.5920e-3 (1.64e-4) —	7.5721e-3 (2.11e-4) —	7.4428e-3 (1.71e-4) —	6.7035e-3 (1.18e-4) —	6.4900e-3 (1.42e-4)
IDMPM3T3	8.4645e-3 (4.73e-4) —	7.0793e-3 (2.58e-4) —	7.4091e-3 (2.23e-4) —	7.5578e-3 (2.06e-4) —	7.6407e-3 (1.90e-4) —	7.4489e-3 (1.75e-4) —	7.1193e-3 (1.75e-4) —	6.4608e-3 (9.28e-5)
IDMPM3T4	8.3327e-3 (2.67e-4) —	7.0996e-3 (2.49e-4) —	7.0605e-3 (2.73e-4) —	7.4097e-3 (3.03e-4) —	7.7183e-3 (3.25e-4) —	7.3496e-3 (1.78e-4) —	6.7124e-3 (1.40e-4) —	6.4486e-3 (1.05e-4)
IDMPM4T1	8.0892e-3 (4.44e-4) —	6.2999e-3 (2.04e-4) —	5.8721e-3 (2.32e-4) +	7.1742e-3 (1.30e-4) —	8.7378e-3 (2.36e-4) —	6.6765e-3 (1.15e-4) —	6.2035e-3 (1.11e-4) —	6.0491e-3 (7.30e-5)
IDMPM4T2	7.7690e-3 (2.15e-4) —	6.3486e-3 (2.30e-4) —	6.0259e-3 (2.83e-4) —	7.0101e-3 (1.40e-4) —	8.3044e-3 (2.67e-4) —	6.5937e-3 (1.05e-4) —	6.0665e-3 (7.95e-5) —	6.0066e-3 (5.31e-5)
IDMPM4T3	7.7468e-3 (2.32e-4) —	6.4905e-3 (2.34e-4) —	6.0134e-3 (2.81e-4) —	7.0130e-3 (1.84e-4) —	8.3458e-3 (2.88e-4) —	6.5688e-3 (1.18e-4) —	6.4888e-3 (1.13e-4) —	5.9906e-3 (5.99e-5)
IDMPM4T4	7.6958e-3 (2.05e-4) —	6.3834e-3 (2.06e-4) —	5.8770e-3 (2.35e-4) +	7.0303e-3 (1.50e-4) —	8.8663e-3 (4.20e-4) —	6.5050e-3 (1.23e-4) —	6.2131e-3 (1.50e-4) —	5.9945e-3 (6.27e-5)
+/-/=	0/12/0	0/12/0	2/8/2	0/11/1	0/12/0	0/12/0	0/12/0	

表 5 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 HV 均值和标准差

Problem	DN-NSGAII	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1	5.7576e-1 (6.14e-4) —	5.7614e-1 (1.71e-3) —	5.7825e-1 (1.18e-3) =	5.7809e-1 (1.54e-3) =	5.7551e-1 (7.37e-4) —	5.7773e-1 (7.68e-4) —	5.7620e-1 (1.38e-3) —	5.7856e-1 (6.86e-4)
IDMPM2T2	5.7628e-1 (5.23e-4) —	5.7654e-1 (1.13e-3) —	5.7703e-1 (6.80e-4) —	5.7790e-1 (1.23e-3) —	5.7510e-1 (6.77e-4) —	5.7800e-1 (5.17e-4) —	5.7781e-1 (4.37e-4) —	5.7903e-1 (4.63e-4)
IDMPM2T3	5.7527e-1 (1.29e-3) —	5.7685e-1 (1.53e-3) —	5.7746e-1 (7.34e-4) —	5.7666e-1 (5.61e-4) —	5.7492e-1 (7.18e-4) —	5.7644e-1 (6.70e-4) —	5.7666e-1 (4.83e-4) —	5.7847e-1 (2.49e-4)
IDMPM2T4	5.7629e-1 (5.46e-4) —	5.7709e-1 (1.86e-3) —	5.7857e-1 (1.11e-3) =	5.7875e-1 (1.14e-3) +	5.7540e-1 (8.34e-4) —	5.7768e-1 (1.76e-3) —	5.7688e-1 (1.05e-3) —	5.7854e-1 (8.26e-4)
IDMPM3T1	2.5951e-1 (3.07e-3) —	2.6730e-1 (1.61e-3) —	2.6574e-1 (1.81e-3) —	2.6480e-1 (1.35e-3) —	2.6155e-1 (1.35e-3) —	2.6504e-1 (1.33e-3) —	2.6779e-1 (1.45e-3) —	2.6936e-1 (1.70e-3)
IDMPM3T2	2.6092e-1 (2.11e-3) —	2.6825e-1 (1.14e-3) —	2.6597e-1 (1.24e-3) —	2.6624e-1 (1.21e-3) —	2.6320e-1 (1.19e-3) —	2.6647e-1 (8.50e-4) —	2.6988e-1 (8.56e-4) —	2.7164e-1 (7.35e-4)
IDMPM3T3	2.6120e-1 (1.99e-3) —	2.6709e-1 (1.64e-3) —	2.6595e-1 (1.13e-3) —	2.6620e-1 (1.01e-3) —	2.6213e-1 (1.21e-3) —	2.6659e-1 (1.04e-3) —	2.6590e-1 (1.21e-3) —	2.7164e-1 (6.23e-4)
IDMPM3T4	2.6286e-1 (1.52e-3) —	2.6858e-1 (1.32e-3) —	2.6789e-1 (1.49e-3) —	2.6708e-1 (1.56e-3) —	2.6124e-1 (2.43e-3) —	2.6674e-1 (1.15e-3) —	2.6927e-1 (1.50e-3) —	2.7115e-1 (7.46e-4)
IDMPM4T1	2.3552e-1 (4.51e-3) —	2.4699e-1 (1.31e-3) =	2.4809e-1 (1.17e-3) +	2.4104e-1 (9.31e-4) —	2.3052e-1 (1.90e-3) —	2.4545e-1 (9.51e-4) —	2.4505e-1 (1.10e-3) —	2.4719e-1 (1.04e-3)
IDMPM4T2	2.3923e-1 (2.22e-3) —	2.4762e-1 (1.23e-3) —	2.4725e-1 (1.15e-3) —	2.4455e-1 (7.66e-4) —	2.3381e-1 (1.79e-3) —	2.4633e-1 (7.58e-4) —	2.4761e-1 (6.92e-4) —	2.4852e-1 (4.78e-4)
IDMPM4T3	2.3891e-1 (1.65e-3) —	2.4580e-1 (1.83e-3) —	2.4748e-1 (1.53e-3) —	2.4426e-1 (9.04e-4) —	2.3385e-1 (1.66e-3) —	2.4648e-1 (6.98e-4) —	2.4392e-1 (9.18e-4) —	2.4880e-1 (4.65e-4)
IDMPM4T4	2.3860e-1 (2.11e-3) —	2.4731e-1 (1.34e-3) —	2.4826e-1 (9.92e-4) =	2.4379e-1 (1.04e-3) —	2.3090e-1 (2.67e-3) —	2.4669e-1 (6.10e-4) —	2.4593e-1 (1.34e-3) —	2.4804e-1 (6.67e-4)
+/-/=	0/12/0	0/11/1	1/8/3	1/10/1	0/12/0	0/12/0	0/12/0	

可以看出,IMMO-TSE 分别在 10 个和 9 个测试问题上获得了最佳 IGD 均值和最佳 HV 均值。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略和基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,总体上可明显提升 IMMO-TSE 在各测试问题目标空间上的优化性能。

MMOEA-GPD 在 IDMPM4T1 和 IDMPM4T4 测试问题上获得了最佳 IGD 均值和 HV 均值。原因在于这两个测试问题的目标维度较高,搜索空间更大,且类型 1 问题各等效 PSs 的收敛性差异较大,类型 4 问题则兼具收敛性差异和搜索复杂度差异,导致部分等效 PSs 的搜索难度更大。MMOEA-GPD 通过全局支配关系和调和平均距离评估个体质量,在经过早期的快速收敛后,将大部分计算资源

用于多样性保持,从而在 IDMPM4T1 和 IDMPM4T4 上获得了优于其他算法的性能。CMMO 在 IDMPM2T4 测试问题上获得了最佳 HV 均值。原因在于该问题目标维度较低,同时类型 4 问题兼具收敛性差异和搜索复杂度差异。CMMO 采用双种群协同策略,一个种群专注于全局收敛,另一个种群通过放宽支配关系进行辅助搜索,能够有效覆盖目标空间的不同区域,避免解集过度集中,从而获得了较好的优化性能。

表 6 和表 7 分别为 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 12 个 IDMP 基准测试问题集上,独立运行 30 次得到的平均 IGDX 值和平均 PSP 值,以及对应标准差的统计结果,在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

表 6 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 IGDX 均值和标准差

Problem	DN-NSGAI	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1	6.2885e-1 (1.70e-1) —	2.4711e-2 (8.76e-2) —	2.5299e-1 (3.26e-1) —	3.6002e-1 (3.41e-1) —	2.0196e-3 (1.64e-4) —	2.0784e-3 (6.73e-5) —	2.0562e-3 (1.16e-4) —	1.8292e-3 (7.62e-5)
IDMPM2T2	6.0665e-1 (2.05e-1) —	3.8815e-2 (1.26e-1) —	4.8850e-2 (1.70e-1) —	2.7050e-1 (3.35e-1) —	2.2802e-3 (1.16e-4) —	2.1524e-3 (1.17e-4) —	2.0555e-3 (7.74e-5) —	1.8253e-3 (7.25e-5)
IDMPM2T3	2.7360e-1 (3.34e-1) —	2.1334e-1 (2.28e-1) —	7.5461e-3 (5.96e-3) —	2.6899e-3 (1.11e-3) —	2.7999e-3 (2.68e-4) —	2.5157e-2 (1.23e-1) —	3.0469e-3 (3.51e-4) —	2.6480e-3 (2.50e-4)
IDMPM2T4	6.0647e-1 (2.05e-1) —	1.9074e-1 (2.36e-1) —	1.8877e-1 (2.97e-1) —	4.9435e-1 (3.02e-1) —	2.2331e-3 (5.77e-4) —	1.3637e-1 (2.73e-1) —	2.0172e-3 (1.69e-4) —	1.8627e-3 (1.29e-4)
IDMPM3T1	7.2980e-1 (2.53e-1) —	7.6950e-2 (1.35e-1) —	1.3175e-1 (1.80e-1) —	1.0080e-1 (1.20e-1) —	1.1403e-2 (7.40e-4) —	1.2617e-2 (2.93e-4) —	1.1322e-2 (1.83e-4) —	1.0680e-2 (1.85e-4)
IDMPM3T2	4.2323e-1 (3.00e-1) —	7.5601e-2 (1.24e-1) —	1.1248e-2 (3.02e-4) —	2.7216e-2 (6.15e-2) —	1.1508e-2 (5.62e-4) —	1.2811e-2 (3.12e-4) —	1.1355e-2 (1.87e-4) —	1.0734e-2 (1.80e-4)
IDMPM3T3	4.9381e-1 (2.74e-1) —	1.2291e-1 (1.97e-1) —	1.4032e-2 (6.33e-4) —	3.0116e-2 (6.17e-2) —	1.2225e-2 (6.12e-4) +	1.5432e-2 (3.25e-4) —	1.2416e-2 (3.92e-4) +	1.3636e-2 (1.48e-4)
IDMPM3T4	5.5622e-1 (2.95e-1) —	2.3848e-1 (2.21e-1) —	1.3953e-1 (1.92e-1) —	1.2580e-1 (1.79e-1) —	1.1713e-2 (8.55e-4) —	2.0605e-2 (4.39e-2) —	1.1276e-2 (2.23e-4) —	1.0650e-2 (1.41e-4)
IDMPM4T1	7.8324e-1 (2.93e-1) —	3.2279e-1 (2.95e-1) —	9.5573e-1 (1.81e-1) —	1.7369e-2 (4.84e-2) —	1.6703e-2 (6.35e-3) —	9.4791e-3 (1.51e-4) —	8.6361e-3 (7.72e-5) —	8.4034e-3 (7.80e-5)
IDMPM4T2	7.4798e-1 (3.17e-1) —	3.4594e-1 (2.98e-1) —	8.3111e-1 (3.05e-1) —	4.4042e-2 (9.15e-2) —	1.2126e-2 (2.49e-3) —	9.5975e-3 (1.54e-4) —	8.7677e-3 (1.08e-4) —	8.4513e-3 (6.62e-5)
IDMPM4T3	7.4062e-1 (3.32e-1) —	2.7431e-1 (2.56e-1) —	8.3144e-1 (3.03e-1) —	2.6604e-2 (9.75e-2) —	1.3532e-2 (2.06e-3) —	9.5114e-3 (1.27e-4) —	1.1415e-2 (2.49e-3) —	8.4421e-3 (8.66e-5)
IDMPM4T4	9.2487e-1 (2.19e-1) —	4.1642e-1 (3.20e-1) —	9.7525e-1 (1.81e-1) —	3.5449e-2 (8.17e-2) —	1.4991e-2 (4.59e-3) —	9.4515e-3 (1.40e-4) —	8.7468e-3 (1.36e-4) —	8.4202e-3 (7.70e-5)
+/-/=	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	1/11/0	0/12/0	1/11/0	

可以看出,IMMO-TSE 在 11 个测试问题上获得了最佳 IGDX 均值,在 10 个测试问题上获得了最佳 PSP 均值。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略和基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,总体上可明显提升 IMMO-TSE 在各测试问题决策空间上的优化性能。

CMMO 在 IDMPM2T3 测试问题上获得了最

佳 PSP 均值。MMEA-IES 在 IDMPM3T3 测试问题上获得了最佳 IGDX 均值和 PSP 均值。IDMPM2T3 和 IDMPM3T3 测试问题均属于第 3 类难度问题。此类问题所面临的核心难题在于,对于 PF 上的一个点,寻找一个等效 PS 上的解的复杂度低于寻找另一个等效 PS 上的解的复杂度。CMMO 和 MMEA-IES 分别通过放宽支配关系和在小生境范围内衡量收敛性,有利于避免难搜索区域个体被淘汰,可为

表 7 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 PSP 均值和标准差

Problem	DN-NSGAI	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1	3.2109e+1 (1.22e+2)−	1.9902e+2 (1.15e+2)−	1.9328e+2 (2.39e+2)−	2.5811e+2 (2.81e+2)−	4.9727e+2 (3.74e+1)−	4.8103e+2 (1.58e+1)−	4.8692e+2 (2.57e+1)−	5.4678e+2 (2.11e+1)
IDMPM2T2	4.4577e+1 (1.36e+2)−	2.4600e+2 (1.12e+2)−	4.3589e+2 (1.85e+2)−	3.2934e+2 (2.74e+2)−	4.3921e+2 (2.23e+1)−	4.6498e+2 (2.42e+1)−	4.8661e+2 (1.82e+1)−	5.4786e+2 (2.05e+1)
IDMPM2T3	1.5747e+2 (1.60e+2)−	2.7952e+1 (2.75e+1)−	1.9493e+2 (1.12e+2)−	3.9505e+2 (6.45e+1)+	3.5910e+2 (2.93e+1)−	3.4694e+2 (6.72e+1)−	3.3126e+2 (3.65e+1)−	3.7897e+2 (3.33e+1)
IDMPM2T4	4.7383e+1 (1.45e+2)−	5.9515e+1 (8.56e+1)−	1.7083e+2 (2.13e+2)−	1.4661e+2 (2.47e+2)−	4.6689e+2 (8.25e+1)−	3.8232e+2 (1.96e+2)−	4.9803e+2 (3.32e+1)−	5.3840e+2 (3.37e+1)
IDMPM3T1	6.6687e-1 (9.54e-1)−	5.0610e+1 (2.62e+1)−	4.4619e+1 (3.43e+1)−	5.9375e+1 (4.33e+1)−	8.7863e+1 (4.91e+0)−	7.9261e+1 (1.81e+0)−	8.8289e+1 (1.40e+0)−	9.3569e+1 (1.58e+0)
IDMPM3T2	1.3371e+1 (2.45e+1)−	4.8473e+1 (2.79e+1)−	8.8861e+1 (2.34e+0)−	8.4561e+1 (2.20e+1)−	8.7019e+1 (4.05e+0)−	7.8084e+1 (1.90e+0)−	8.8029e+1 (1.45e+0)−	9.3065e+1 (1.57e+0)
IDMPM3T3	7.0758e+0 (1.74e+1)−	3.9723e+1 (2.60e+1)−	7.0631e+1 (2.82e+0)−	6.6651e+1 (1.72e+1)−	8.1629e+1 (4.08e+0)+	6.4166e+1 (1.38e+0)−	8.0322e+1 (2.73e+0)+	7.2520e+1 (7.83e-1)
IDMPM3T4	4.4015e+0 (1.28e+1)−	2.0472e+1 (2.66e+1)−	4.8068e+1 (3.86e+1)−	5.9055e+1 (4.33e+1)−	8.5639e+1 (5.89e+0)−	7.6928e+1 (1.39e+1)−	8.8651e+1 (1.75e+0)−	9.3827e+1 (1.22e+0)
IDMPM4T1	6.6510e-1 (9.80e-1)−	2.0164e+1 (3.12e+1)−	1.0811e-1 (2.17e-1)−	1.1351e+2 (2.09e+1)−	6.7396e+1 (2.14e+1)−	1.0552e+2 (1.68e+0)−	1.1580e+2 (1.04e+0)−	1.1901e+2 (1.10e+0)
IDMPM4T2	3.3847e+0 (1.47e+1)−	1.7149e+1 (3.11e+1)−	2.1468e+0 (8.70e+0)−	9.9251e+1 (3.83e+1)−	8.5344e+1 (1.49e+1)−	1.0422e+2 (1.67e+0)−	1.1407e+2 (1.40e+0)−	1.1833e+2 (9.30e-1)
IDMPM4T3	3.7516e+0 (1.60e+1)−	2.4122e+1 (3.03e+1)−	2.0797e+0 (8.75e+0)−	1.0989e+2 (2.06e+1)−	7.5455e+1 (1.09e+1)−	1.0515e+2 (1.42e+0)−	8.9845e+1 (1.12e+1)−	1.1847e+2 (1.21e+0)
IDMPM4T4	1.8966e-1 (3.00e-1)−	8.6491e+0 (1.91e+1)−	1.0581e-1 (2.07e-1)−	1.0406e+2 (3.43e+1)−	7.1471e+1 (1.67e+1)−	1.0582e+2 (1.57e+0)−	1.1435e+2 (1.76e+0)−	1.1877e+2 (1.09e+0)
+/-/=	0/12/0	0/12/0	0/12/0	1/11/0	1/11/0	0/12/0	1/11/0	

该区域提供更多探索机会,从而提高算法在决策空间的全局搜索能力。

IMMO-TSE 则在处理第 3 类难度的四目标测试问题 IDMPM4T3 时展现出更显著的优势。原因在于 CMMO 和 MMEA-IES 在面对更高维目标问题时,其搜索效率以及维持解集多样性的能力不足,导致综合性能不如 IMMO-TSE。

表 8 为 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 12 个 IDMP 基准测试问题集上,独立运行 30 次的平均 IGD 值,以及对应标准差的统计结果,在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

可以看出,IMMO-TSE 在 11 个测试问题上获得了最佳 IGD 均值。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略和基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,总体上可明显提升 IMMO-TSE 在各测试问题上的综合优化性能。

为更直观地呈现 IMMO-TSE 与各算法的性能对比,图 3 和图 4 分别展示了 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMPM3T1 测试问题上,在决策空间和目标空间的实际运行结果。其中,红点在图 3 和图 4 中分别表示 IDMPM3T1 的真实等效 PSs 和 PF,

蓝点分别表示对应算法所获得的等效 PSs 和 PF。

从图 3 可以看出,MMEA-IES、FPITSEA、CPDEA 和 IMMO-TSE 均成功找到了决策空间中所有的等效 PSs。但 FPITSEA 的收敛性较差,MMEA-IES 和 CPDEA 获得的解未能均匀分布在等效 PSs 上,而其他算法均未能找全所有等效 PSs。从图 4 可以看出,IMMO-TSE 获得的解均匀地分布在 PF 上。而其他算法要么尚未收敛,要么在 PF 上的分布不如 IMMO-TSE 均匀。综上,说明 IMMO-TSE 在 IDMPM3T1 测试问题上相较于各对比算法,在决策空间和目标空间均具有最佳的综合优化性能。

图 5 和图 6 进一步展示了 IMMO-TSE 和 7 个对比算法,在四目标测试问题 IDMPM4T1- IDMPM4T4 上,分别采用 IGD 指标和 IGDX 指标,在决策空间和目标空间的收敛过程。

从图 5 可以看出,IMMO-TSE 和各对比算法在目标空间获得了较接近的 IGD 值,但 IMMO-TSE 在 3 个测试问题上获得了最小的 IGD 值,相对而言性能最优。从图 6 可以看出,DN-NSGAI、BOEA、MMOEA-GPD 和 CMMO 所获 IGDX 值明显较差,在部分问题上甚至未能收敛。其余 4 个算法在决策空间均取得了较好效果,但 IMMO-TSE 在 4 个测试

表 8 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 IGD 均值和标准差

Problem	DN-NSGAI	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1	4.7155e-1 (1.24e-1) —	8.1247e-2 (1.04e-1) —	2.2715e-1 (2.21e-1) —	2.7428e-1 (2.49e-1) —	1.4475e-2 (1.18e-3) —	1.4745e-2 (4.81e-4) —	1.4726e-2 (8.93e-4) —	1.2991e-2 (6.03e-4)
IDMPM2T2	4.5523e-1 (1.49e-1) —	7.1889e-2 (1.26e-1) —	6.0097e-2 (1.32e-1) —	2.0881e-1 (2.44e-1) =	1.4286e-2 (7.05e-4) —	1.4844e-2 (7.42e-4) —	1.4014e-2 (4.33e-4) —	1.2756e-2 (5.03e-4)
IDMPM2T3	2.2355e-1 (2.35e-1) —	3.1846e-1 (1.74e-1) —	4.8433e-2 (3.94e-2) —	1.6285e-2 (7.42e-3) +	1.5775e-2 (1.72e-3) +	3.2418e-2 (8.89e-2) =	1.8147e-2 (2.22e-3) —	1.6707e-2 (1.67e-3)
IDMPM2T4	4.5526e-1 (1.49e-1) —	2.6971e-1 (1.89e-1) —	1.9861e-1 (1.99e-1) —	3.7236e-1 (2.20e-1) —	1.6073e-2 (4.03e-3) —	1.1272e-1 (1.99e-1) —	1.4456e-2 (1.62e-3) —	1.3245e-2 (1.06e-3)
IDMPM3T1	6.0705e-1 (1.41e-1) —	1.8966e-1 (1.46e-1) —	2.0525e-1 (1.42e-1) —	1.5880e-1 (1.09e-1) —	8.3273e-2 (5.79e-3) —	8.9812e-2 (2.10e-3) —	8.0577e-2 (1.34e-3) —	7.6074e-2 (1.50e-3)
IDMPM3T2	4.2617e-1 (2.07e-1) —	1.8751e-1 (1.31e-1) —	7.8829e-2 (2.67e-3) —	9.1786e-2 (5.64e-2) —	8.2339e-2 (4.59e-3) —	9.0583e-2 (2.36e-3) —	8.0262e-2 (1.35e-3) —	7.5692e-2 (1.24e-3)
IDMPM3T3	4.8218e-1 (1.89e-1) —	2.3927e-1 (1.86e-1) —	7.9009e-2 (6.27e-3) —	9.2006e-2 (5.68e-2) —	8.1656e-2 (3.96e-3) —	9.0322e-2 (2.31e-3) —	8.3765e-2 (2.01e-3) —	7.5699e-2 (1.14e-3)
IDMPM3T4	5.2012e-1 (1.74e-1) —	3.5537e-1 (1.94e-1) —	2.1251e-1 (1.56e-1) —	1.7343e-1 (1.40e-1) —	8.6284e-2 (6.99e-3) —	9.6546e-2 (3.95e-2) —	8.0191e-2 (1.60e-3) —	7.5623e-2 (1.04e-3)
IDMPM4T1	6.2233e-1 (1.54e-1) —	4.0438e-1 (2.08e-1) —	7.2102e-1 (8.40e-2) —	6.9017e-2 (4.18e-2) —	1.2549e-1 (4.59e-2) —	6.7892e-2 (1.09e-3) —	6.1956e-2 (6.65e-4) —	5.9884e-2 (5.80e-4)
IDMPM4T2	5.9122e-1 (1.79e-1) —	4.1321e-1 (2.02e-1) —	6.4317e-1 (1.52e-1) —	9.1083e-2 (7.90e-2) —	8.8695e-2 (1.86e-2) —	6.7757e-2 (1.05e-3) —	6.1301e-2 (7.47e-4) —	5.9601e-2 (4.17e-4)
IDMPM4T3	5.7637e-1 (1.93e-1) —	3.5844e-1 (2.06e-1) —	6.4491e-1 (1.66e-1) —	7.6115e-2 (8.40e-2) —	8.4906e-2 (1.29e-2) —	6.7133e-2 (9.07e-4) —	6.7498e-2 (1.62e-2) —	5.9579e-2 (6.27e-4)
IDMPM4T4	6.9786e-1 (1.05e-1) —	4.7364e-1 (1.98e-1) —	7.1809e-1 (8.93e-2) —	8.3613e-2 (6.96e-2) —	1.1004e-1 (3.29e-2) —	6.7039e-2 (9.67e-4) —	6.2241e-2 (1.23e-3) —	5.9631e-2 (5.78e-4)
+/-/=	0/12/0	0/12/0	0/12/0	1/10/1	1/11/0	0/11/1	0/12/0	

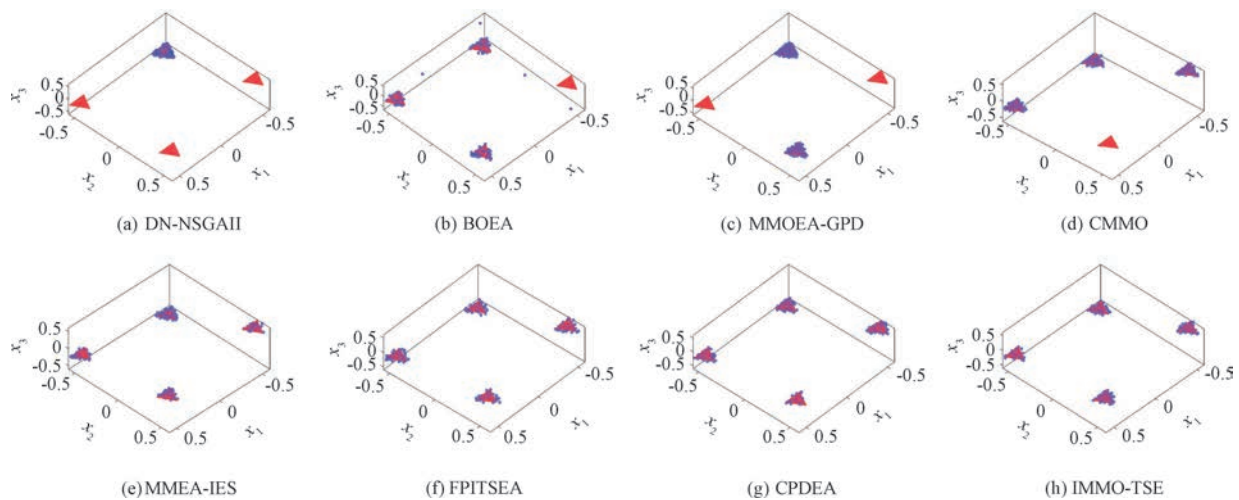


图 3 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在 IDMPM3T1 测试问题上获得的等效 PSs 分布

问题上均获得了最小的 IGD 值,相对而言亦性能最优。

此外,为量化 IMMO-TSE 和 7 个对比算法的整体性能,图 7 采用箱线图展示了所有算法在 12 个测试问题上各自独立运行 30 次,在 IGD 和 IGDX 上的 Friedman 测试排名。其中,红色线段表示各算法的中位数性能排名,蓝色矩形表示它们的平均性能排名。排名值越小,表明算法的综合性能越好。

从图 7 可看出,IMMO-TSE 在 IGD 和 IGDX 上的中位数和平均性能排名均显著低于其他 7 个对比算法,说明 IMMO-TSE 的整体性能明显优于各对比算法。

4.3 消融实验

为分析 IMMO-TSE 中各组成部分所起的作用,对 IMMO-TSE 进行消融实验。

将 IMMO-TSE 第一阶段个体收敛性计算策略改为仅基于支配数计算收敛性的算法称为 IMMO-

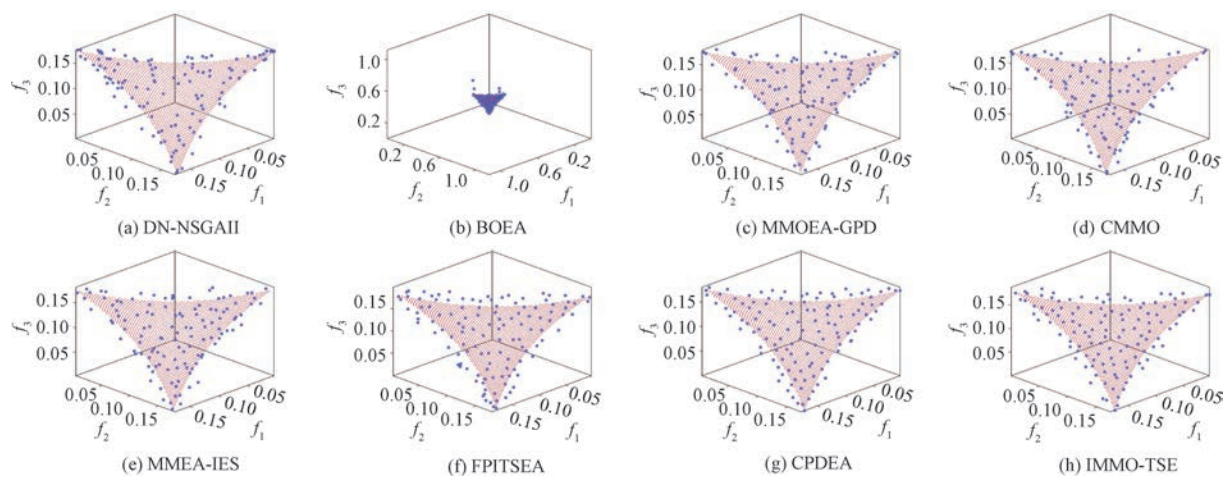


图4 IMMO-TSE与7个对比算法在IDMPM3T1测试问题上获得的PF分布

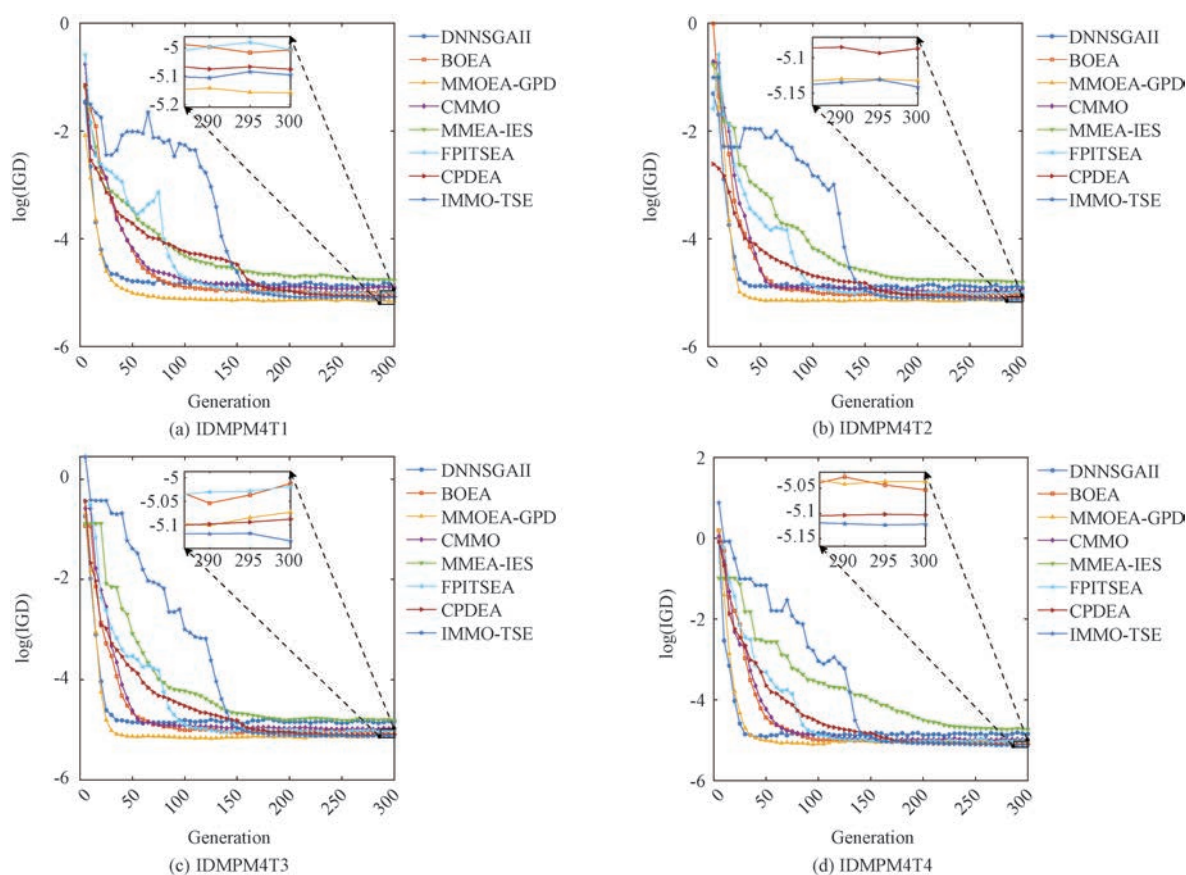


图5 IMMO-TSE与7个对比算法在四目标测试问题上的log(IGD)值对比图

TSE-V1。将第一阶段个体收敛性计算策略中的自适应权重 $(1+(M-g/\delta)/M)$ 改为固定值1.5的算法称为IMMO-TSE-V2。去掉第一阶段个体收敛性计算策略中截断机制的算法称为IMMO-TSE-V3。将第二阶段环境选择中的自适应方式改成随机方式的算法称为IMMO-TSE-V4。第二阶段仅基于适应度进行环境选择的算法称为IMMO-TSE-V5。第二阶段仅基于多样性进行环境选择的算法

称为IMMO-TSE-V6。

表9为IMMO-TSE与6个变种算法在12个IDMP基准测试问题集上,独立运行30次的平均IGDM值,以及对应标准差的统计结果,在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

可以看出,IMMO-TSE在9个测试问题上获得了最佳IGDM均值。说明其所采用个体收敛性计算策略和自适应环境选择策略,对于提升IMMO-

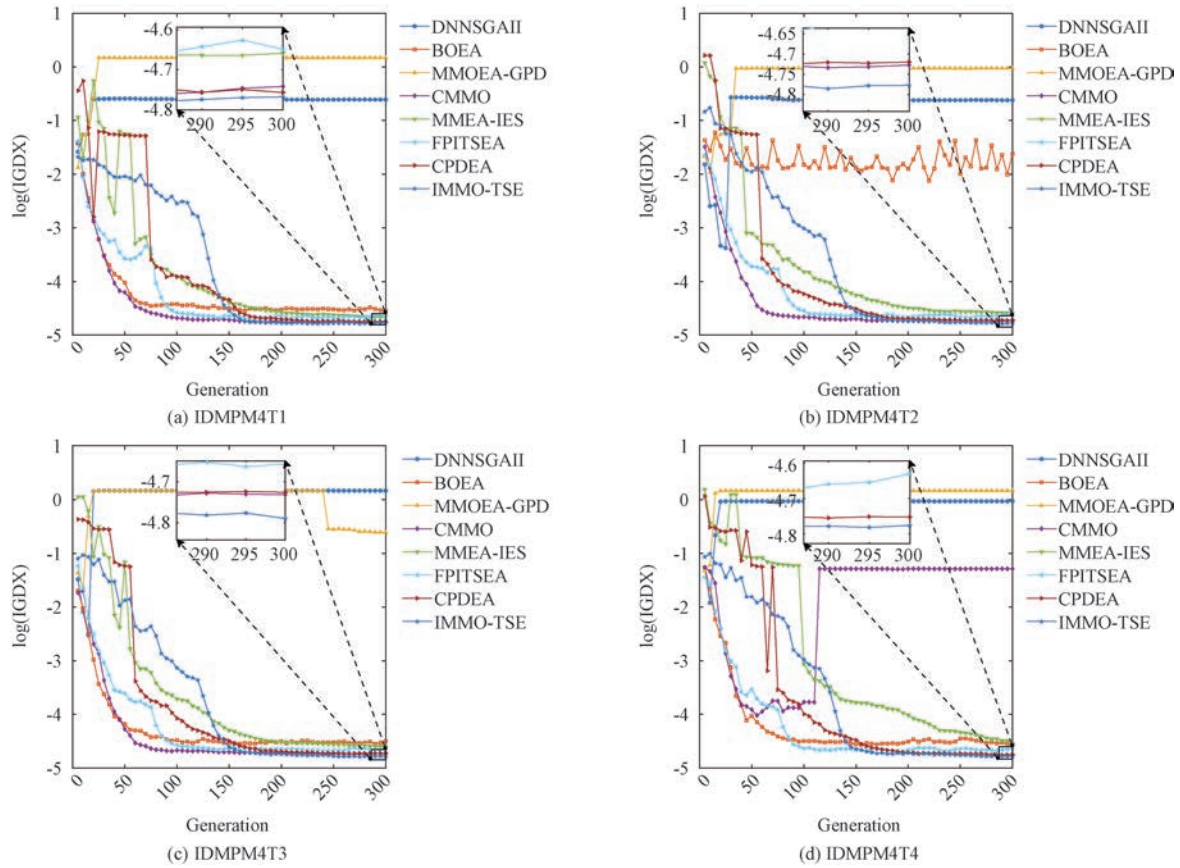


图6 IMMO-TSE与7个对比算法在四目标测试问题上的log(IGDX)值对比图

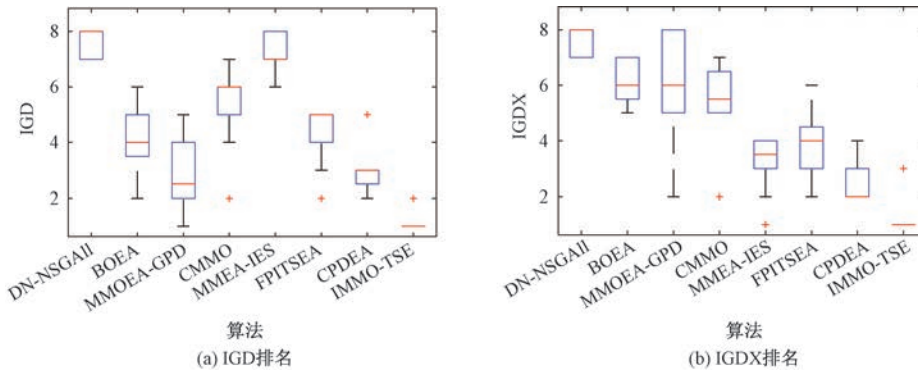


图7 IMMO-TSE和7个对比算法在IDMP测试问题上IGD和IGD指标排名箱线图

TSE的综合优化性能,具有明显作用。

其中,IMMO-TSE-V1、IMMO-TSE-V2和IMMO-TSE-V3在所有12个测试问题中均显著劣于IMMO-TSE。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略在IMMO-TSE第一阶段对各等效PSs的定位具有明显作用。IMMO-TSE-V4仅在1个测试问题IDMPM3T2上与IMMO-TSE无显著差异,在其他测试问题中显著劣于IMMO-TSE。IMMO-TSE-V5仅在4个测试问题上与IMMO-TSE无显著差异,在其他测试问题中显著劣于IMMO-TSE。IMMO-TSE-V6在2个测

试问题中显著优于IMMO-TSE,但在8个测试问题中显著劣于IMMO-TSE,在剩余2个测试问题中无显著差异。与IMMO-TSE-V4、IMMO-TSE-V5和IMMO-TSE-V6的上述对比表明,基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,在IMMO-TSE第二阶段对各等效PSs所在区域的开发具有明显作用。

4.4 参数敏感性实验

IMMO-TSE包括两个独有参数,分别为用于设置第一阶段和第二阶段分界点的 δ ,用于判断子种群收敛状态的阈值 τ 。根据IMMO-TSE的设计意图, δ 的取值越小,算法越注重在第二阶段对各等

表 9 IMMO-TSE 与 6 个变种算法在 IDMP 测试问题上独立运行 30 次获得的 IGDM 均值和标准差

Problem	IMMO-TSE-V1	IMMO-TSE-V2	IMMO-TSE-V3	IMMO-TSE-V4	IMMO-TSE-V5	IMMO-TSE-V6	IMMO-TSE
IDMPM2T1	4.2136e-1 (1.86e-1) —	4.3774e-1 (1.69e-1) —	4.0507e-1 (1.99e-1) —	1.1104e-1 (1.99e-1) =	2.2552e-1 (2.47e-1) —	1.2720e-2 (2.65e-4) +	1.2991e-2 (6.03e-4)
IDMPM2T2	3.7229e-1 (2.21e-1) —	3.5595e-1 (2.29e-1) —	3.2333e-1 (2.40e-1) —	1.7616e-1 (2.35e-1) —	1.9256e-1 (2.40e-1) —	1.2758e-2 (2.01e-4) =	1.2756e-2 (5.03e-4)
IDMPM2T3	3.0881e-1 (2.42e-1) —	2.4421e-1 (2.46e-1) —	2.5980e-1 (2.47e-1) —	3.5131e-2 (2.27e-2) —	7.7517e-2 (7.44e-2) —	1.3803e-2 (3.13e-4) +	1.6707e-2 (1.67e-3)
IDMPM2T4	4.8677e-1 (8.92e-2) —	4.8672e-1 (8.95e-2) —	4.7037e-1 (1.24e-1) —	2.4184e-1 (2.49e-1) —	2.7449e-1 (2.49e-1) —	2.9058e-2 (8.95e-2) =	1.3245e-2 (1.06e-3)
IDMPM3T1	5.1217e-1 (1.47e-1) —	5.0458e-1 (1.62e-1) —	5.4352e-1 (1.90e-1) —	1.3766e-1 (1.31e-1) —	1.5106e-1 (1.06e-1) —	8.6325e-2 (1.95e-3) —	7.6074e-2 (1.50e-3)
IDMPM3T2	2.9377e-1 (2.27e-1) —	3.0020e-1 (1.67e-1) —	3.6069e-1 (1.97e-1) —	8.4891e-2 (4.09e-2) —	7.5628e-2 (1.24e-3) =	8.5214e-2 (1.92e-3) —	7.5692e-2 (1.24e-3)
IDMPM3T3	3.0814e-1 (2.11e-1) —	3.1528e-1 (1.87e-1) —	3.5374e-1 (2.29e-1) —	7.7340e-2 (1.95e-3) —	9.0767e-2 (5.68e-2) =	8.5109e-2 (1.88e-3) —	7.5699e-2 (1.14e-3)
IDMPM3T4	4.8928e-1 (1.71e-1) —	5.2831e-1 (2.08e-1) —	5.0499e-1 (1.74e-1) —	9.9753e-2 (6.79e-2) —	1.8001e-1 (1.28e-1) —	8.5382e-2 (1.26e-3) —	7.5623e-2 (1.04e-3)
IDMPM4T1	6.0044e-1 (1.78e-1) —	6.0819e-1 (1.69e-1) —	5.7663e-1 (1.47e-1) —	6.0601e-2 (9.22e-4) —	1.8269e-1 (1.79e-1) —	6.4245e-2 (7.18e-4) —	5.9884e-2 (5.80e-4)
IDMPM4T2	5.2204e-1 (1.74e-1) —	5.6133e-1 (1.85e-1) —	5.5318e-1 (1.60e-1) —	6.0706e-2 (6.40e-4) —	7.4986e-2 (5.81e-2) =	6.3589e-2 (7.47e-4) —	5.9601e-2 (4.17e-4)
IDMPM4T3	5.6914e-1 (1.88e-1) —	5.1452e-1 (1.98e-1) —	5.6169e-1 (2.13e-1) —	6.0408e-2 (7.48e-4) —	6.7178e-2 (4.18e-2) =	6.3817e-2 (5.62e-4) —	5.9579e-2 (6.27e-4)
IDMPM4T4	6.8659e-1 (1.26e-1) —	6.2416e-1 (1.91e-1) —	6.2355e-1 (1.34e-1) —	1.1408e-1 (1.31e-1) —	1.4374e-1 (1.12e-1) —	6.3674e-2 (6.90e-4) —	5.9631e-2 (5.78e-4)
+/-/=	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/11/1	0/8/4	2/8/2	

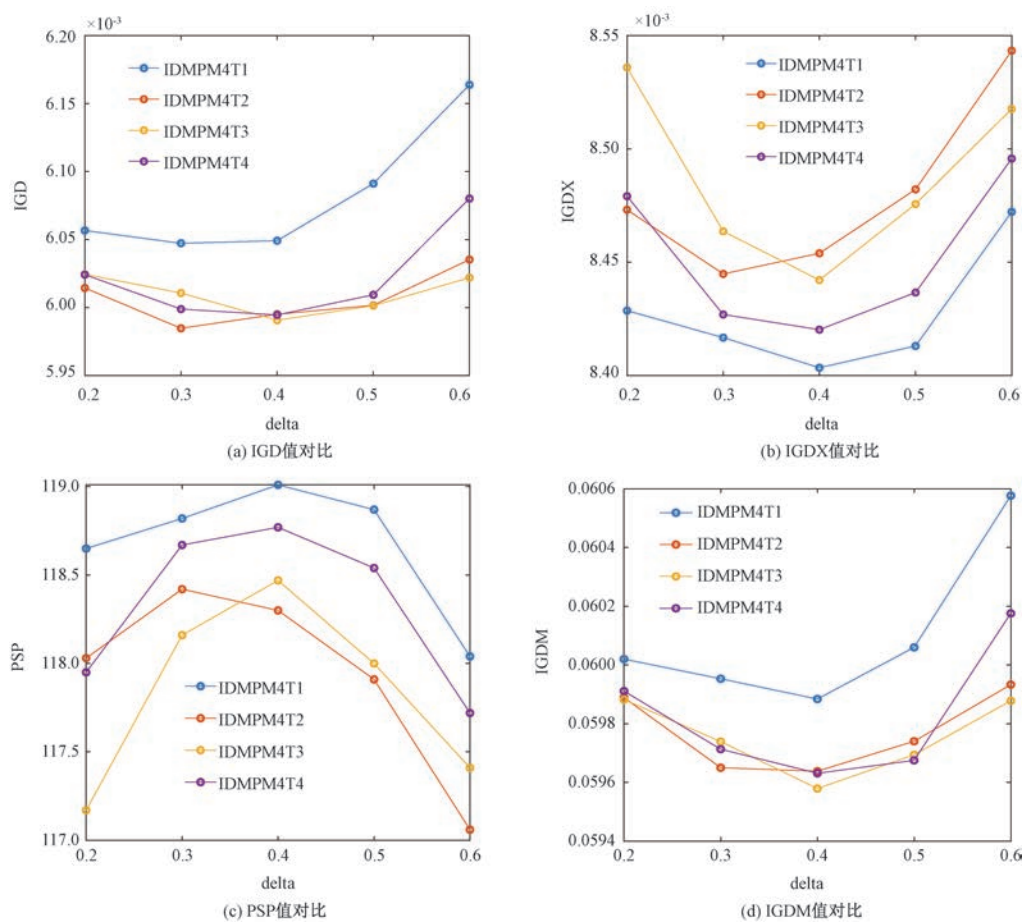
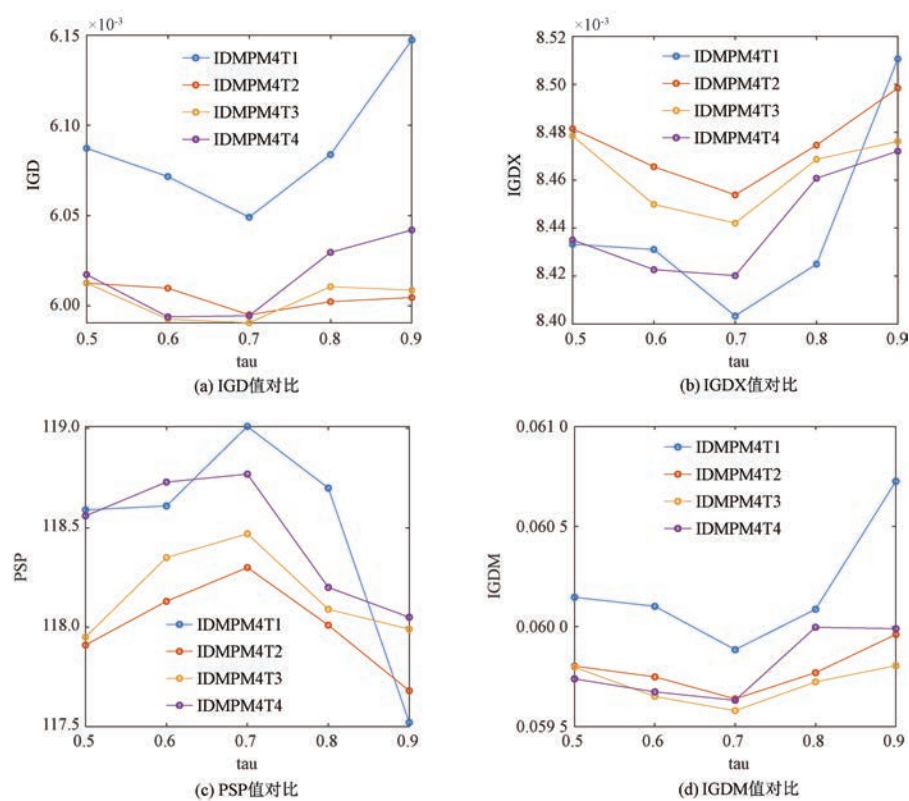
效 PSs 所在区域的均衡开发; δ 的取值越大, 算法越注重在第一阶段对搜索难度不同的各等效 PSs 所在区域的全面定位。 τ 的取值越小, 算法在第二阶段越关注各子种群的收敛性, τ 的取值越大, 算法在第二阶段越关注各子种群的多样性。

为直观展示 IMMO-TSE 中参数 δ 和参数 τ 对不同取值的敏感程度, 在 4 个四目标测试问题 IDMPM4T1- IDMPM4T4 上, 对它们进行敏感性实验。每次仅改变单个参数的取值, 在每个测试问题上独立运行 30 次, 参数 δ 和参数 τ 相关的 IGD、IGDX、PSP 和 IGDM 均值变化曲线分别如图 8 和图 9 所示。

在 δ 的取值为 0.4 时, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值最小、PSP 均值最大。说明此时 IMMO-TSE 中两阶段分界点的设置较理想。在 δ 的取值从 0.2 变为 0.4 的过程中, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值逐渐变小、PSP 均值逐渐变大。说明 δ 的取值越小, 第一阶段进化占比越低时, 越无法充分定位所有等效 PSs 所在区域, 越会导致算法的总体性能下降。相反, 在 δ 的取值从 0.4 变为 0.6 的过程中, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值逐渐变大、PSP 均值逐渐变小。说明 δ 的取值越大,

第二阶段进化占比越低时, 越无法对各等效 PSs 所在区域进行均衡开发, 亦越会导致算法的总体性能下降。

在 τ 的取值为 0.7 时, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值最小、PSP 均值最大。说明此时在 IMMO-TSE 的第二阶段对各等效 PSs 所在区域的开发较均衡。在 τ 的取值从 0.5 变为 0.7 的过程中, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值逐渐变小、PSP 均值逐渐变大。说明 τ 的取值越小, 每个子种群只需包含越少量的全局非支配个体, 便会被认为已处于较好收敛状态, 越容易导致算法偏向采用基于适应度的环境选择。即越容易过于关注收敛性, 越不利于对难搜索区域的深入开发, 进而越容易造成对不同搜索区域的开发失衡, 最终导致算法性能的下降。相反, 在 τ 的取值从 0.7 变为 0.9 的过程中, 所得到的 IGD、IGDX 和 IGDM 均值逐渐变大、PSP 均值逐渐变小。说明 τ 的取值越大, 每个子种群需包含越多的全局非支配个体, 才会被认为已处于较好的收敛状态, 越容易导致算法偏向采用基于多样性的环境选择。即越容易过于关注多样性, 越不利于种群的收敛, 最终亦导致算法性能的下降。

图 8 参数 δ 在四目标测试问题上的敏感性对比结果图 9 参数 τ 在四目标测试问题上的敏感性对比结果

总体而言, δ 和 τ 均对取值敏感, 过大或过小的取值均会造成 IMMO-TSE 的性能下降, 此种实验结果与 IMMO-TSE 的设计预期吻合。

4.5 运行时间对比

尽管 IMMO-TSE 在第一阶段采用了更为复杂的个体收敛性计算策略, 并在第二阶段采用了需要更多计算量的自适应环境选择策略, 但 3.4 节的分析表明, 其时间复杂度理论上依然为 $O(mN^2)$, 并未导致时间复杂度的等级提升。

为更直观地呈现 IMMO-TSE 和各算法所需实际运行时间的对比, 图 10 展示了 IMMO-TSE 与 7 个对比算法, 在 IDMP 的全部 12 个测试问题上, 独立运行 30 次的平均运行时间。

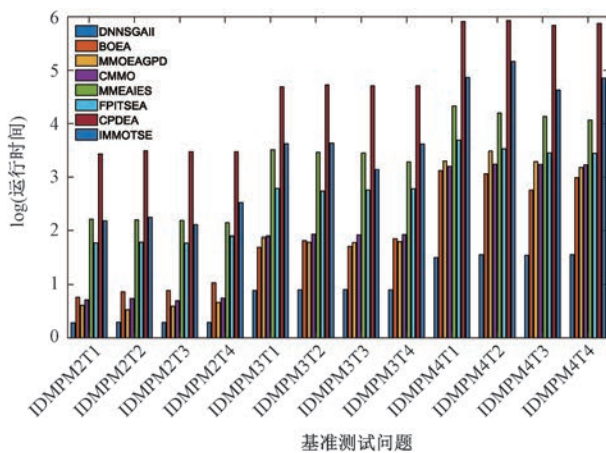


图 10 IMMO-TSE 和 7 个对比算法在 IDMP 各测试问题上的运行时间对比

可以看出, DN-NSGAI 在所有测试问题上的运行时间均显著低于其他算法。而专门面向不平衡 MMOPs 的 CPDEA 和 IMMO-TSE 的运行时间相对较长。其中, CPDEA 的运行时间显著高于其他算法。原因在于 DN-NSGAI 仅基于决策空间计算拥挤距离, 且在环境选择时直接采用了 NSGA-II 的快速非支配排序方法, 未引入复杂的收敛性调整机制或额外的聚类操作, 因此计算开销较小。相比之下, CPDEA 和 IMMO-TSE 作为专门面向不平衡 MMOPs 的算法, 引入额外计算步骤对决策空间中收敛性与多样性的不平衡进行了专门处理, 增加了计算负担。其中, CPDEA 采用了收敛惩罚密度估计和双 k 近邻方法, 而 IMMO-TSE 则在第一阶段采用了较复杂的个体收敛性计算策略, 并在第二阶段采用了需要更多计算量的自适应环境选择策略。但得益于第一阶段对各等效 PSs 所在区域的快速定位, 以及第二阶段对各子种群的均衡开发,

相比 CPDEA 在每轮迭代中均需对决策空间中的距离进行变换和密度估计, IMMO-TSE 可减少不必要的计算开销, 从而在保证性能的同时提升了效率。

4.6 难度更大测试问题实验

为进一步验证 IMMO-TSE 在难度更大的不平衡 MMOPs 上的性能, 在 IDMP^[6] 和 IDMP_e^[46] 测试问题集上, 对 IMMO-TSE 和各对比算法进行比较。

其中, IDMP' 通过提升表 1 中各 IDMP 中的难度函数参数 α 得到, 如表 10 所示。由于表 1 中 IDMPM3T1-IDMPM3T2 和 IDMPM4T1-IDMPM4T2 测试问题的默认难度取值, 已覆盖这些问题所有可能的难度级别, 故它们的难度参数不需再进行调整, 在表 10 中用“—”表示。据此, 共形成 8 个新的难度更大测试问题 IDMPM2T1'-IDMPM2T4'、IDMPM3T3'-IDMPM3T4' 和 IDMPM4T3'-IDMPM4T4'。

表 10 难度更大的 IDMP 测试问题中 $\alpha_{p,i}$ 的设置

目标数		难度类型 1	难度类型 2	难度类型 3	难度类型 4
二目标	$\alpha_{1,2}$	1	0	0	1
	$\alpha_{2,2}$	4	0.6	0.6	8
三目标	$\alpha_{1,3}$	—	—	0	1
	$\alpha_{2,3}$	—	—	0.2	2
	$\alpha_{3,3}$	—	—	0.4	4
	$\alpha_{4,3}$	—	—	0.6	8
四目标	$\alpha_{1,4}$	—	—	0	1
	$\alpha_{2,4}$	—	—	0.2	2
	$\alpha_{3,4}$	—	—	0.4	4
	$\alpha_{4,4}$	—	—	0.6	8
	$\alpha_{1,4}$	—	—	0	0
	$\alpha_{2,4}$	—	—	0.2	0
	$\alpha_{3,4}$	—	—	0.4	0
	$\alpha_{4,4}$	—	—	0.6	0

IDMP_e 为最新的不平衡多模态多目标优化测试问题集, 共包含 4 个两目标的测试问题 IDMPM2T1_e-IDMPM2T4_e 和 4 个三目标的测试问题 IDMPM3T1_e-IDMPM3T4_e。IDMP_e 通过在 IDMP 的相应目标函数中添加一个小的正向噪声得到, 各测试问题均具有局部特征, 既包含容易搜索的局部 PSs, 也包含难搜索的全局 PSs, 相比 IDMP 具有更大的优化难度, 详情可参见文献 [46]。

表 11 为 IMMO-TSE 与 7 个对比算法, 在 16 个难度更大的 IDMP 测试问题上, 独立运行 30 次的平均 IGDM 值, 以及对应标准差的统计结果, 在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

表 11 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在难度更大测试问题上独立运行 30 次获得的 IGDM 均值和标准差

Problem	DN-NSGAI	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IDMPM2T1'	4.5521e-1 (1.49e-1) —	9.6650e-2 (1.21e-1) —	3.1676e-1 (2.23e-1) —	4.0500e-1 (2.00e-1) —	1.6700e-2 (5.47e-3) —	1.4882e-2 (7.01e-4) —	1.4157e-2 (6.20e-4) —	1.3667e-2 (1.48e-3)
IDMPM2T2'	4.2270e-1 (1.85e-1) —	1.6998e-1 (1.82e-1) —	2.0544e-1 (2.12e-1) —	2.9059e-1 (2.47e-1) —	1.7471e-2 (5.93e-3) —	8.0223e-2 (1.69e-1) —	1.4235e-2 (6.40e-4) —	1.3393e-2 (1.38e-3)
IDMPM2T3'	3.3730e-1 (2.26e-1) —	3.3695e-1 (1.64e-1) —	1.0071e-1 (1.32e-1) —	8.1214e-2 (1.32e-1) =	1.7272e-2 (2.36e-3) +	4.9349e-2 (1.24e-1) —	1.9062e-2 (1.66e-3) =	1.8884e-2 (3.37e-3)
IDMPM2T4'	5.0417e-1 (1.58e-4) —	3.4725e-1 (2.00e-1) —	3.4369e-1 (2.21e-1) —	4.3773e-1 (1.69e-1) —	2.6870e-2 (2.26e-2) —	1.7809e-1 (2.34e-1) —	1.4357e-2 (1.37e-3) +	1.4431e-2 (3.25e-3)
IDMPM3T3'	4.4532e-1 (2.19e-1) —	1.1001e-1 (3.89e-2) —	8.6484e-2 (4.05e-2) —	8.4334e-2 (4.06e-2) —	7.8221e-2 (1.39e-3) —	9.0036e-2 (2.74e-3) —	8.0238e-2 (1.19e-3) —	7.5930e-2 (9.63e-4)
IDMPM3T4'	5.4870e-1 (1.81e-1) —	2.1178e-1 (1.54e-1) —	1.6469e-1 (1.07e-1) —	1.7336e-1 (1.27e-1) —	8.0799e-2 (4.33e-3) —	8.9583e-2 (2.74e-3) —	8.0135e-2 (1.08e-3) —	7.6028e-2 (1.14e-3)
IDMPM4T3'	6.3686e-1 (1.56e-1) —	6.0811e-1 (1.45e-1) —	6.5308e-1 (1.53e-1) —	4.9204e-1 (1.45e-1) —	1.5169e-1 (7.63e-3) —	6.7302e-2 (9.11e-4) —	2.0060e-1 (1.07e-1) —	5.9597e-2 (5.10e-4)
IDMPM4T4'	7.2116e-1 (8.83e-2) —	6.9012e-1 (1.07e-1) —	6.6319e-1 (1.19e-1) —	6.1373e-1 (1.51e-1) —	1.6726e-1 (1.73e-2) —	6.6997e-2 (9.09e-4) —	2.6551e-1 (9.78e-2) —	5.9818e-2 (4.15e-4)
IDMPM2T1_e	3.7132e-2 (3.19e-4) —	3.5334e-2 (5.32e-4) —	3.6622e-2 (1.30e-4) —	3.6654e-2 (5.76e-5) —	3.6587e-2 (6.19e-4) —	1.2889e-2 (5.01e-4) —	3.7168e-2 (2.55e-4) —	1.2046e-2 (2.33e-4)
IDMPM2T2_e	3.7486e-2 (3.50e-4) —	3.4695e-2 (9.55e-4) —	3.6605e-2 (9.90e-5) —	3.6649e-2 (9.69e-5) —	3.7467e-2 (5.34e-4) —	1.2657e-2 (2.54e-4) —	3.7237e-2 (1.91e-4) —	1.1892e-2 (1.22e-4)
IDMPM2T3_e	3.3848e-2 (9.93e-3) —	2.5595e-2 (6.51e-4) —	2.7393e-2 (5.17e-4) —	2.8124e-2 (3.77e-3) —	2.6956e-2 (3.23e-4) —	1.3287e-2 (4.16e-4) —	2.7210e-2 (1.87e-4) —	1.2343e-2 (2.18e-4)
IDMPM2T4_e	6.4608e-2 (1.81e-2) —	6.1111e-2 (1.33e-2) —	7.4238e-2 (5.18e-4) —	6.1287e-2 (2.01e-2) —	6.9754e-2 (3.07e-3) —	1.8704e-2 (1.78e-3) =	7.4468e-2 (2.38e-4) —	1.8281e-2 (1.38e-3)
IDMPM3T1_e	1.3483e-1 (1.73e-3) —	1.1831e-1 (5.34e-3) —	1.3194e-1 (9.02e-4) —	1.3222e-1 (8.20e-4) —	1.3093e-1 (1.53e-3) —	5.3385e-2 (1.36e-3) —	1.3156e-1 (7.84e-4) —	5.2049e-2 (1.16e-3)
IDMPM3T2_e	1.6972e-1 (1.56e-3) —	1.3510e-1 (1.16e-2) —	1.6593e-1 (1.01e-3) —	1.6601e-1 (1.04e-3) —	1.6375e-1 (1.37e-3) —	5.4847e-2 (1.22e-3) —	1.6542e-1 (1.27e-3) —	5.3974e-2 (1.18e-3)
IDMPM3T3_e	1.6926e-1 (1.43e-3) —	1.4233e-1 (1.25e-2) —	1.6561e-1 (1.14e-3) —	1.6546e-1 (1.27e-3) —	1.6370e-1 (1.32e-3) —	6.0811e-2 (7.23e-3) —	1.6466e-1 (1.01e-3) —	5.6238e-2 (1.34e-3)
IDMPM3T4_e	2.4708e-1 (3.47e-2) —	2.0088e-1 (2.44e-2) —	2.6052e-1 (2.24e-3) —	2.6052e-1 (2.56e-3) —	2.5213e-1 (3.97e-3) —	6.0453e-2 (1.94e-3) =	2.5952e-1 (2.27e-3) —	8.5117e-2 (5.38e-2)
+/-/=	0/16/0	0/16/0	0/16/0	0/15/1	1/15/0	0/14/2	1/14/1	

可以看出,IMMO-TSE 在 13 个测试问题上获得了最佳 IGDM 均值。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略和基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,在处理难度更大的不平衡 MMOPs 时,总体上仍具有明显的优势。

MMEA-IES 在 IDMPM2T3' 测试问题上获得了最佳 IGDM 均值,原因在于 IDMPM2T3' 中部分等效 PSs 的搜索难度显著高于其他等效 PSs。MMEA-IES 通过独立子问题机制,并在环境选择时优先保留决策空间中分布较远的个体,可缓解收敛速度差异导致的种群偏向性,从而找到更多复杂度更高的等效 PSs。

CPDEA 在 IDMPM2T4' 测试问题上获得了最佳 IGDM 均值,原因在于 IDMPM2T4' 中部分等效 PSs 同时存在显著的收敛性和搜索复杂度差异。CPDEA 在环境选择中采用收敛惩罚密度机制,有利于保留难搜索 PSs 所在区域中的个体,可在维持

目标空间收敛性的同时,增强决策空间的多样性。

FPITSEA 在 IDMPM3T4_e 测试问题上获得了最佳 IGDM 均值,原因在于 IDMPM3T4_e 具有多层次多模态特性。FPITSEA 采用模糊偏好指标平衡全局和局部搜索,并通过独立进化策略以及基于距离的子集选择方法保证解集在目标空间和决策空间的质量,从而在 IDMPM3T4_e 上获得了优于其他算法的性能。

4.7 真实应用问题实验

为进一步验证 IMMO-TSE 在解决真实应用问题时的效果,在带不平衡特性的真实地图问题上,对 IMMO-TSE 和 7 个对比算法的性能进行比较。该问题基于日本大阪府堺市的真实地图形式化规约而成^[47],包含 6 所小学、3 所初中、13 家便利店和 3 个火车站,核心需求是在地图上寻找多个等效最优的起始位置,以使到最近的上述四类目的地的综合出行成本最小。该问题是 MMO 领域国际通用的真

实测试问题,但其原始版本不考虑出行方式,将综合出行成本简化为总路线的长度,属于平衡型 MMOPs。为使该问题更符合实际的复杂场景,增加对出行方式的考虑,由于不同出行方式的出行成本不同,且由于政府的票价调控,导致途径市中心区域的出行成本普遍高。此种情形下,该问题变成了更为复杂的

不平衡 MMOP。

表 12 为 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在该带有不平衡特性的真实地图问题上,独立运行 30 次的平均 IGD、HV、IGDX、PSP 和 IGDM 值,以及对应标准差的统计结果,在每个测试问题上的最佳结果用粗体表示。

表 12 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在带有不平衡特性的真实地图问题上独立运行 30 次获得的运行结果对比

评价指标	DN-NSGAI	BOEA	MMOEA-GPD	CMMO	MMEA-IES	FPITSEA	CPDEA	IMMO-TSE
IGD	1.1843e+0 (5.84e-2)–	1.5207e+0 (9.29e-2)–	1.2628e+0 (5.51e-2)–	1.1021e+0 (2.84e-2)–	8.6130e-1 (1.14e-2)–	1.5115e+0 (1.22e-1)–	8.8869e-1 (1.67e-2)–	8.2355e-1 (1.07e-2)
HV	5.9363e-1 (5.28e-3)–	6.0831e-1 (2.58e-3)–	6.0214e-1 (5.25e-3)–	6.0972e-1 (3.54e-3)–	6.1074e-1 (3.00e-3)–	5.8142e-1 (9.36e-3)–	6.1105e-1 (4.02e-3)–	6.1317e-1 (2.55e-3)
IGDX	9.3852e-1 (4.44e-2)–	1.1956e+0 (1.25e-1)–	1.0036e+0 (4.47e-2)–	8.7500e-1 (2.74e-2)–	6.6302e-1 (7.78e-3)–	1.2040e+0 (9.80e-2)–	7.0379e-1 (1.49e-2)–	6.5443e-1 (8.55e-3)
PSP	1.0675e+0 (5.01e-2)–	7.1851e-1 (1.84e-1)–	9.9797e-1 (4.37e-2)–	1.1421e+0 (3.56e-2)–	1.5058e+0 (1.72e-2)–	8.3546e-1 (7.23e-2)–	1.4212e+0 (2.98e-2)–	1.5247e+0 (2.02e-2)
IGDM	3.9215e-2 (1.88e-3)–	4.7591e-2 (2.57e-3)–	4.2067e-2 (1.91e-3)–	3.6812e-2 (8.58e-4)–	2.9462e-2 (3.42e-4)–	5.1013e-2 (4.02e-3)–	3.0356e-2 (5.66e-4)–	2.8065e-2 (3.49e-4)
+/-/=	0/4/0	0/4/0	0/4/0	0/4/0	0/4/0	0/4/0	0/4/0	

可以看出,IMMO-TSE 在该不平衡问题上获得了最佳 IGD、HV、IGDX、PSP 和 IGDM 均值。说明基于种群平均支配数和自适应权重、带截断机制的个体收敛性计算策略和基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,在处理真实带有不平衡特性的地图问题时,总体上仍具有明显的效果。

图 11 展示了 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在

该带有不平衡特性的真实地图问题上,在决策空间的实际运行结果。其中,红色圆点在图 11 中表示该应用问题的真实最优解,蓝色圆点表示对应算法所获得的最优解,红色菱形表示小学,蓝色六角星表示初中,绿色正方形表示便利店,黄色三角形表示火车站。可以看出,IMMO-TSE 具有最好的收敛性,且得到的解均匀分布在各 PSs 上。

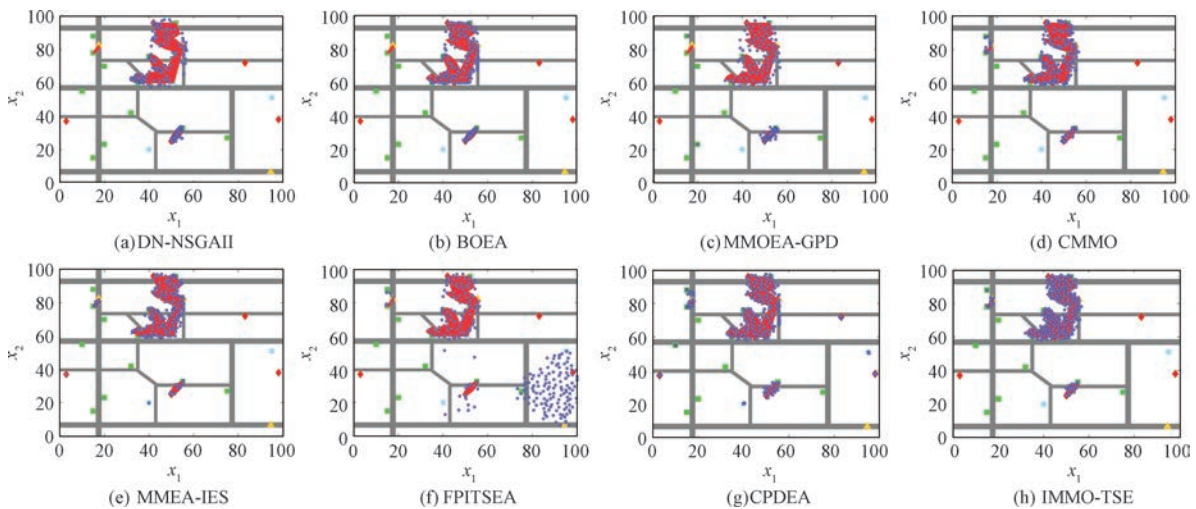


图 11 IMMO-TSE 与 7 个对比算法在带有不平衡特性的真实地图问题上获得的等效 PSs 分布

综上,说明 IMMO-TSE 在带有不平衡特性的真实地图问题上,相较于各对比算法具有最优的综合优化性能。

5 结 论

针对现有 MMEAs 在处理不平衡 MMOPs 时

容易过早收敛至部分易搜索的 PSs,进而丢失其他难搜索的等效 PSs 或对难搜索等效 PSs 所在区域开发不足等问题,本文通过适度放宽支配条件并采用小生境方式,提出了一种基于两阶段进化的不平衡多模态多目标优化算法 IMMO-TSE。通过在第一阶段采用基于种群平均支配数和自适应权重、带

截断机制的个体收敛性计算策略,并在第二阶段采用基于子种群收敛状态的自适应环境选择策略,可实现对不平衡 MMOPs 中各 PSs 所在区域的全面定位和均衡开发,从而显著提升算法的综合优化性能。实验结果表明,相比其他 MMEAs,IMMO-TSE 在综合优化性能上具有明显的竞争优势。

未来工作中,我们将继续研究如何在优化过程中自适应地设置 IMMO-TSE 中各参数的取值。同时为更好地检验 IMMO-TSE 求解实际应用问题的性能,我们将对更为复杂、更高维度的带约束不平衡 MMOPs 进行建模,并将 IMMO-TSE 应用于更多实际问题的求解。在此基础上,结合各类 MMOPs 的特性,进一步对 IMMO-TSE 的收敛性等开展理论分析。

参 考 文 献

- [1] Xu Z, Zhang K, Ser J D, et al. Multi-objective optimization for multimodal multi-objective multi-point shortest path problem considering unforeseeable road eventualities. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2025, 26(6): 8622-8640
- [2] Liang J, Yang J, Yue C, et al. A joint-encoding evolutionary algorithm for multimodal multiobjective feature selection in classification. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2025, 29(6): 2834-2848
- [3] Li G, Li W, He L, et al. A niching differential evolution with Hilbert curve for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 95: 101952
- [4] Zheng W, Doerr B. Theoretical analyses of multiobjective evolutionary algorithms on multimodal objectives. *Evolutionary Computation*, 2023, 31(4): 337-373
- [5] Dang Q, Zhang G, Wang L, et al. Transformer-based intelligent prediction model for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2025, 20(1): 34-49
- [6] Liu Y, Ishibuchi H, Yen G, et al. Handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in evolutionary multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(3): 551-565
- [7] Xie Cheng-Wang, Pan Jia-Min, Guo Hua, et al. A large scale multi-objective evolutionary algorithm adopting hybrid strategies. *Chinese Journal of Computers*, 2024, 47(1): 69-89 (in Chinese)
(谢承旺,潘嘉敏,郭华等.一种采用混合策略的大规模多目标进化算法. *计算机学报*, 2024, 47(1): 69-89)
- [8] Zhong K, Xiao F, Gao X. Two-stage clustering and independent competing based evolutionary algorithm for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2026, 30(2): 823-835
- [9] Zhao H, Ning X, Li J, et al. Evolutionary multi-task framework with bi-knowledge transfer for multimodal optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2026, 30(1): 393-407
- [10] Li Wen-Hua, Ming Meng-Jun, Zhang Tao, et al. Multimodal multi-objective evolutionary algorithm considering global and local Pareto fronts. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(1): 148-160 (in Chinese)
(李文桦,明梦君,张涛等.考虑全局和局部帕累托前沿的多模态多目标优化算法. *自动化学报*, 2023, 49(1): 148-160)
- [11] He Juan-Juan, Yang Qian, Xu Zhi-Wu, et al. Two-stage multimodal multi-objective evolutionary algorithm based on global density updating strategy. *Scientia Sinica Informationis*, 2023, 34(10): 4743-4771 (in Chinese)
(贺娟娟,杨倩,许志伟等.基于全局密度更新策略的两阶段多模态多目标进化算法. *中国科学:信息科学*, 2024, 54(10): 2385-2408)
- [12] Wu X, Ming F, Gong W, et al. Multimodal multi-objective optimization via multi-operator adaptation and clustering-based environmental selection. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 96: 101962
- [13] Cao J, Liu Q, Chen Z, et al. Dual-space distribution metric-based evolutionary algorithm for multimodal multi-objective optimization. *Expert Systems with Applications*, 2025, 262: 125596
- [14] Li Z, Rong H, Yang S, et al. A dual-population coevolutionary algorithm for balancing convergence and diversity in the decision space in multimodal multi-objective optimization. *Applied Soft Computing*, 2024, 162: 111770
- [15] Li Z, Mao W, Rong H, et al. Improved convergence-relaxed mechanism for handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in multimodal multi-objective optimization//*Proceedings of the 2025 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Malaga, Spain, 2025: 609-617
- [16] Liang J, Yue C, Qu B. Multimodal multiobjective optimization: a preliminary study//*Proceedings of the 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver, Canada, 2016: 2454-2461
- [17] Deng S B, Liu H, Cheng K, et al. Goal-directed multimodal multi-objective evolutionary algorithm converging on population derivation. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 92: 101796
- [18] Deb K, Tiwari S. Omni-optimizer: a generic evolutionary algorithm for single and multiobjective optimization. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(3): 1062-1087
- [19] Wang Y, Liu Z, Wang G. Improved differential evolution using two-stage mutation strategy for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2023, 78: 101232
- [20] Zheng T, Liu J, Jin Y, et al. A multitask-assisted evolutionary algorithm for constrained multimodal multiobjective opti-

- mization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2025, 29(5):1729-1744
- [21] Deng Q, Liu Y, Yang S, et al. A repulsive-distance-based maximum diversity selection algorithm for multimodal multiobjective optimization. *Applied Soft Computing*, 2025, 169:112516
- [22] Yue C, Qu B, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5):805-817
- [23] Gao W, Xu W, Gong M, et al. A decomposition-based evolutionary algorithm using an estimation strategy for multimodal multiobjective optimization. *Information Sciences*, 2022, 606:531-548
- [24] Wei Z, Gao W, Gong M, et al. A bi-objective evolutionary algorithm for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2024, 28(1):168-177
- [25] Gu Q, Niu Y, Hui Z, et al. A hierarchical clustering algorithm for addressing multimodal multiobjective optimization problems. *Expert Systems with Applications*, 2025, 264:125710
- [26] Zhao J, Chen F, Xiao R, et al. Multi-modal multi-objective wolf pack algorithm with circumferential scouting and intraniche interactions. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 93:101842
- [27] Hu Z, Zhou T, Su Q, et al. A niching backtracking search algorithm with adaptive local search for multimodal multiobjective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2022, 69:101031
- [28] Liu Y, Yen G, Gong D. A multimodal multiobjective evolutionary algorithm using two-archive and recombination strategies. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(4):660-674
- [29] Peng H, Zhang S, Li L, et al. Multi-strategy multi-modal multi-objective evolutionary algorithm using macro and micro archive sets. *Information Sciences*, 2024, 663:120301
- [30] Peng H, Xia W, Lou Z, et al. A multimodal multi-objective differential evolution with series-parallel combination and dynamic neighbor strategy. *Information Sciences*, 2024, 678:120999
- [31] Dang Q, Liu Q, Yang S, et al. Data-driven evolutionary algorithm based on inductive graph neural networks for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2026, 30(1):186-198
- [32] Ming F, Gong W, Wang L, et al. Balancing convergence and diversity in objective and decision spaces for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2023, 7(2):474-486
- [33] Li W, Yao X, Li K, et al. Coevolutionary framework for generalized multimodal multi-objective optimization. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2023, 10(7):1544-1556
- [34] Dang Q, Zhang G, Wang L, et al. Transformer-based intelligent prediction model for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2025, 20(1):24-49
- [35] Zhang J, Zou J, Yang S, et al. An evolutionary algorithm based on independently evolving sub-problems for multimodal multi-objective optimization. *Information Sciences*, 2023, 619:908-929
- [36] Xiang Y, Zheng J, Hu Y, et al. Weak relationship indicator-based evolutionary algorithm for multimodal multi-objective optimization. *Information Sciences*, 2024, 652:119755
- [37] Han H, Liu Y, Hou Y, et al. Multi-modal multi-objective particle swarm optimization with self-adjusting strategy. *Information Sciences*, 2023, 629:580-598
- [38] Lv Z, Li S, Sun H, et al. A multimodal multi-objective evolutionary algorithm with two-stage dual-indicator selection strategy. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2023, 82:101319
- [39] Xie Y, Li J, Li Y, et al. Two-stage evolutionary algorithm with fuzzy preference indicator for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 85:101480
- [40] Li G, Sun M, Wang Y, et al. A ring-hierarchy-based evolutionary algorithm for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2023, 81:101352
- [41] Yang L, Zhang E, Dang Q. Variational graph autoencoder-driven balancing strategy for multimodal multi-objective optimization. *Information Sciences*, 2025, 712:122116
- [42] Zou J, Deng Q, Liu Y, et al. A dynamic-niching-based Pareto domination for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2024, 28(5):1529-1543
- [43] Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design. *Computer Science and Informatics*, 1996, 26:30-45
- [44] Deb K, Agrawal R. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 1995, 9(2):115-148
- [45] Ester M, Kriegel H, Sander J, et al. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise//*Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Portland, USA, 1996:226-231
- [46] Li W, Yao X, Zhang T, et al. Hierarchy ranking method for multimodal multiobjective optimization with local Pareto fronts. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2023, 27(1):98-110
- [47] Ishibuchi H, Akedo N, Nojima Y. A many-objective test problem for visually examining diversity maintenance behavior in a decision space//*Proceedings of the 13th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. Dublin, Ireland, 2011:649-656

- [48] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. PlatEMO: a MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017,12(4):73-87
- [49] Bosman P, Thierens D. The balance between proximity and diversity in multi-objective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003,7(2):174-188
- [50] While L, Hingston P, Barone L, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006,10(1):29-38
- [51] Zhou A, Zhang Q, Jin Y. Approximating the set of pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009,13(5):1167-1189
- [52] Maree S, Alderliesten T, Thierens D, et al. Real-valued evolutionary multi-modal multi-objective optimization by hill-valley clustering//*Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Prague, Czech Republic, 2019: 568-576
- [53] Capitani L, Martini D. Reproducibility probability estimation and testing for the Wilcoxon rank-sum test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2015,85(3):468-493
- [54] Pereira D, Afonso A, Medeiros F. Overview of Friedman's test and post-hoc analysis. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2015,44(10):2636-2653



MAO Fei-Qiao, Ph. D., lecturer. Her research interests include computational intelligence and intelligent software.

ZENG Wen-Jun, graduate student. Her research interest is computational intelligence.

HU Kai-Feng, engineer. His research interests include computational intelligence and multiobjective optimization.

ZENG Ji-Yu, engineer. His research interests include computational intelligence and multiobjective optimization.

LIANG Zheng-Ping, Ph. D., associate professor. His research interests include computational intelligence and big data analysis.

Background

There are various types of multimodal multiobjective optimization problems in the real world. For example, the map generation problem aims to automatically produce balanced game maps with diverse layouts by optimizing four conflicting objectives: fairness, playability, strategic depth, and interestingness. The feature selection problem aims to identify multiple equivalent feature subsets that simultaneously minimize classification error and feature subset size while maintaining diversity in solutions. The traveling salesman problem aims to minimize multiple conflicting objectives including total travel distance, time and cost, while identifying multiple equivalent optimal solutions in the decision space.

The imbalanced multimodal multiobjective optimization problems are a type of multimodal multiobjective optimization problems with different search difficulty levels for equivalent Pareto optimal (PSs) sets in the decision space. During the optimization process, it is easy to prematurely converge on some easily searchable equivalent PSs, thereby losing other more difficult-to-search equivalent PSs or failing to exploit the regions to which they belong sufficiently. To address the challenges posed by the different search difficulties of equivalent PSs and improve the performance of imbalanced multimodal multiobjective optimization, this paper proposes a

two-stage evolution based imbalanced multimodal multiobjective optimization algorithm (IMMO-TSE) from the perspective of convergence. Where, the first stage proposes an individual convergence calculation strategy based on population average dominance and adaptive weights with a truncation mechanism, which is beneficial for locating the regions where equivalent PSs with different search difficulties belong more comprehensively. The second stage proposes an adaptive environment selection strategy based on the convergence state of subpopulations, which promotes the balanced exploitation of regions containing equivalent PSs. The performance of IMMO-TSE is verified by comparing it with seven representative multimodal multiobjective optimization algorithms on twelve imbalanced multimodal multiobjective benchmark test problems and one practical application problem.

Our research team has been working in the field of intelligent optimization for more than ten years, and has published a series of algorithms in the top-ranked journals, such as *IEEE TEVC* and *IEEE TCYB*, on multi-objective optimization, large-scale optimization, multi-task optimization, etc. This paper is partly supported by the National Natural Science Foundation of China (62572327), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2025A1515010260).