

基于存档和权值扩展的大规模多目标优化算法

梁正平 刘程 王志强 明仲 朱泽轩

(深圳大学计算机与软件学院 广东 深圳 518060)

摘要 由于不同目标之间相互冲突且搜索空间巨大,现有大规模多目标优化算法的综合性能尚存在较大改进空间。为合理均衡算法的搜索效率与搜索质量,提升算法的综合性能,本文提出一种基于存档和权值扩展的大规模多目标优化算法(LSMOE-AWE)。该算法总体采用进化计算框架,基于大规模决策变量与小规模权值变量之间的问题转换进行求解。其核心是在进化过程中选取高质量代表性解及其对立点构建存档高效引导种群的进化方向,并引入权值扩展策略逐步扩大算法的搜索空间,在确保算法搜索效率的同时,提升搜索质量。为验证LSMOEA-AWE的有效性,将其与6个先进的大规模多目标优化算法在最新的大规模多目标基准测试问题集LSMOP上进行对比,实验结果表明LSMOEA-AWE对于大规模多目标优化问题的求解具有明显的竞争优势。

关键词 大规模多目标优化;进化计算;问题转换;存档;权值扩展

中图法分类号 TP18 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2022.00951

Large-Scale Multi-Objective Optimization Algorithm Based on Archive and Weight Extension

LIANG Zheng-Ping LIU Cheng WANG Zhi-Qiang MING Zhong ZHU Ze-Xuan

(School of Computer Science and Software Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060)

Abstract Due to the conflict between different objectives and the huge search space, the comprehensive performance of existing large-scale multi-objective optimization algorithms still has large room for improvement. In order to balance the search efficiency and search quality reasonably, and improve the comprehensive performance of the algorithm, this paper proposes a large-scale multi-objective optimization algorithm based on archive and weight extension (LSMOEA-AWE). LSMOE-AWE adopts the framework of evolutionary computation, and the problem transformation scheme between the large-scale decision variables and the small-scale weight variables. LSMOE-AWE consists of two essential components. One is the archive strategy based on the high-quality representative solutions and their opposite points in each iteration, which can effectively guide the rational evolutionary direction of the population. The other is the weight extension strategy, which can gradually expand the search space of the algorithm. In order to verify its effectiveness, LSMOE-AWE is compared with six state-of-the-art algorithms in large-scale multi-objective optimization on the latest test suite LSMOP. The experimental results show that LSMOE-AWE has obvious competitive advantages in solving large-scale multi-objective optimization problems.

Keywords large-scale multi-objective optimization; evolutionary computation; problem transformation; archive; weight extension

收稿日期:2021-03-06;在线发布日期:2021-09-12.本课题得到国家重点研发计划(2021YFB2900800)、国家自然科学基金(61871272)、广东省自然科学基金(2020A1515010479,2021A1515011911)、深圳市科技计划(GGFW2018020518310863,20200811181752003)资助。梁正平,博士,副教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究方向为计算智能、大数据分析。E-mail: liangzp@szu.edu.cn。刘程,硕士研究生,主要研究方向为智能优化。王志强,教授,主要研究领域为计算智能、多媒体技术。明仲,博士,教授,主要研究领域为人工智能、大数据分析。朱泽轩,博士,教授,主要研究领域为计算智能、生物信息学。

1 引言

现实生活和生产中存在许多涉及多个目标的优化问题^[1-5]. 由于不同的目标之间可能相互冲突, 通常不存在某个单独的解可以使得所有目标函数同时达到最优, 而需要获取多个不同的解以实现各个目标之间的权衡. 基于种群的进化算法可同时获得多个满足帕累托支配关系的最优解, 对于多目标优化问题的求解具有天然的优势, 现已成为解决多目标优化问题的最常用方法^[6-11].

然而, 对于包含成百上千个决策变量的大规模多目标优化问题 (Large-Scale Multi-Objective Optimization Problems, LSMOPs), 如大规模公共交通网设计问题^[12]、大规模投资组合优化问题^[13]、大规模资源分配问题^[14]等, 随着决策变量数目的线性增加, 搜索空间的体积和复杂性将呈指数级增大, 导致维度诅咒^[15], 使得常规多目标进化算法的优化性能在求解 LSMOPs 时快速下降. 为解决这一问题, 学者们提出了一系列专门针对 LSMOPs 的进化算法, 称之为大规模多目标进化算法 (Large-Scale Multi-Objective Evolutionary Algorithms, LSMOEAs).

现有 LSMOEAs 主要包括基于分而治之思想的决策变量分析类算法^[16-17] 和协同演化类算法^[18-19]、基于降维思想的问题转换类算法^[20-21] 等. 其中, 基于决策变量分析的 LSMOEAs 根据决策变量的特性将决策变量划分为不同的类别组并分别进行优化, 通过问题规模的降低来提升搜索效率. 基于协同进化的 LSMOEAs 通过特定的分组策略, 将决策变量分为若干小组, 对应多个子种群分别进化, 再通过子种群间的协同实现对整个问题的优化, 有利于减缓决策变量的迅速增加带来的挑战, 并可采用并行方式提升搜索效率. 基于问题转换的 LSMOEAs 将 LSMOPs 从大规模困难问题转换为小规模简单问题, 基于对小规模问题的优化来实现对大规模问题的优化, 同样有利于应对决策变量的迅速增加并具有较好的搜索效率. 此外, 也有不对决策变量进行划分或降维, 而通过对子代生成相关算子的改进来提升算法在 LSMOPs 上竞争力的 LSMOEAs^[22-23]. 总体而言, 现有 LSMOEAs 在解决 LSMOPs 时已取得一定的效果, 但仍存在较大的改进空间. 例如, 基于决策变量分析的 LSMOEAs 虽然通过决策变量分类一定程度上减小了问题的规模, 但所产生的类别较少, 分解出的子问题仍可能是大规模问题. 基于协同

演化的 LSMOEAs 在子问题间存在关联关系时, 需要依次反复优化, 所需计算资源庞大. 基于问题转换的 LSMOEAs 用单个权值对应多个决策变量, 限制了原始决策空间的搜索范围, 导致最终解的质量难以保证. 改进子代生成算子的 LSMOEAs 虽然相较于传统进化算法可增强在决策空间中的搜索效率, 但总体提升有限, 难以应对决策变量快速增加的情形.

针对现有 LSMOEAs 中存在的不足, 本文提出一种基于存档和权值扩展的大规模多目标优化算法 (LSMOEA based on Archive and Weight Extension, LSMOE-AWE), 在确保整体搜索效率的同时, 提升算法的搜索质量, 实现算法综合性能的改进. LSMOE-AWE 总体采用进化计算框架和问题转换思想, 通过单个权值与多个决策变量的对应, 将大规模决策变量多目标优化问题转换为小规模权值变量多目标优化问题, 再基于问题转换函数将对小规模权值变量多目标问题的优化映射回对大规模决策变量多目标问题的优化. LSMOE-AWE 在每轮迭代过程中, 基于拥挤距离选择多个非支配解及其对立点构建存档, 并以此为种群持续提供有效的进化方向, 实现对决策空间的高效搜索. 与此同时, 为避免问题转换对决策空间搜索范围的限制, LSMOE-AWE 在进化过程中对种群中的个体进行动态判断, 若某个体所生成后代的质量累计不够理想, 则将该个体所对应权值向量的维度进行扩展, 逐步扩大算法搜索空间, 以较好地均衡算法的搜索效率与搜索质量.

本文的主要贡献和工作如下:

(1) 提出一种基于非支配解及其对立点的存档策略, 持续引导种群的有效进化方向, 实现对决策空间的高效搜索.

(2) 提出一种基于权值扩展策略的问题转换方法, 通过动态提升权值向量的维度, 逐步扩大算法的搜索空间, 对算法的搜索效率与搜索质量进行合理均衡.

(3) 在最新大规模多目标优化基准测试问题集 LSMOP 的 108 个测试用例上, 与 6 个先进的大规模多目标优化算法进行对比, 证明 LSMOE-AWE 在解决 LSMOPs 时具有明显的竞争优势.

本文第 2 节介绍背景知识; 第 3 节介绍所提算法的主要内容; 第 4 节介绍实验方案和实验结果, 并进行相关分析; 最后总结全文并对未来工作进行探讨.

2 背景知识

本节介绍 LSMOPs 的定义、LSMOEAs 的研究现状和问题转换方法的基本思想。

2.1 LSMOPs 定义

不失一般性,一个具有 n 维决策变量和 m 个目标的多目标优化问题,可以用以下数学形式表示^[6]:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top \\ \text{subject to } \mathbf{x} &\in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是决策空间 Ω 中的 n 维决策变量, $F(\mathbf{x})$ 是待求解的 m 个目标函数。当决策变量的数目 n 大于 100 时,通常称为 LSMOPs。若 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 是一个多目标优化问题的两个不同解,所对应目标函数值均满足 $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y}), i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 并且至少存在一个目标函数满足 $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{y}), j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 则称 \mathbf{x} 支配 \mathbf{y} 。不被决策空间中其他任何解支配的解称为帕累托最优解。所有帕累托最优解的集合称为帕累托最优解集(Pareto optimal Set, PS), 所有帕累托最优解对应目标向量的集合称为帕累托最优前沿(Pareto optimal Front, PF)。

2.2 LSMOEAs 研究现状

近年来,随着各类 LSMOPs 的不断涌现,学者们提出了一系列针对 LSMOPs 的 LSMOEAs。根据决策变量处理方式的不同,现有 LSMOEAs 大致可分为以下几类:

(1) 基于决策变量分析的 LSMOEAs

该类 LSMOEAs 主要基于分而治之思想,根据决策变量的特性将决策变量划分为不同类别分别进行优化,且将得到的结果直接组合作为最终的优化结果,不考虑分组之间可能存在的关联关系。MOEA/DVA^[16]通过判断多次扰动决策变量后所产生的各个解是否相互非支配,将决策变量分为收敛变量,多样变量和混合变量,并采用 DE 算子分别对三类决策变量组进行优化。LMEA^[17]则基于多次扰动决策变量后所产生解集与超平面法线的角度,将决策变量聚类为收敛性变量组和多样性变量组,并分别采用收敛性策略和多样性策略进行处理。S3-CMA-ES^[24]同样将决策变量分为多样性相关变量和收敛性相关变量,并基于变量间的相互关系,进一步将收敛性相关变量分成多个子组。S3-CMA-ES 中每个子种群只收敛到一个解,最终通过多个子种群的同时进化得到一组近似帕累托最优解。SMOEA-D^[25]基于参考向量对变量进行分析,在每个搜索方向上

均基于多次扰动决策变量后所产生解集的投影来测量决策变量的收敛相关度,据此对决策变量进行分组,并使用自适应尺度化策略对每个分组进行优化。基于决策变量分析的 LSMOEAs 存在的不足是由于所产生的决策变量类别较少,对应每类决策变量的子问题仍可能是大规模问题,算法的总体搜索效率尚待提升。

(2) 基于协同进化的 LSMOEAs

该类 LSMOEAs 同样基于分而治之思想,通过特定的分组策略,如随机分组^[26]、线性分组^[27]、有序分组^[28]、差异分组^[29-32]等,将决策变量分成若干小组分别进行优化,并通过子种群间的协同实现对整个问题的优化。CCGDE3^[18]采用随机分组策略,将决策变量随机划分成等长的多组形成多个子种群,然后采用 GDE3^[33]对各子种群分别进行优化,并利用快速非支配排序获得每个子种群的最优非支配解,在此基础上再获得整个问题的最优解集。MOEA/D^[19]将协同进化框架与基于分解的多目标优化算法 MOEA/D^[7]相结合,使得算法能够同时对 LSMOPs 的决策空间和目标空间进行分解,可有效提升算法的性能。CCLSM^[34]则通过决策变量间的依赖关系,将相互依赖的变量分在同一小组,并通过交互分组方式提升协同进化框架对 LSMOPs 的优化能力。基于协同进化的 LSMOEAs 存在的不足是当子问题之间存在关联关系时,对一个子问题的优化会导致其余子问题的最优值发生变化,需要耗费大量评估次数来平衡各组之间的影响,所需计算资源庞大。

(3) 基于问题转换的 LSMOEAs

该类 LMOEAs 基于降维思想,通过问题转换方式,将原始大规模决策变量优化问题映射到一个小规模权值优化问题,再基于问题转换函数将对小规模问题的优化映射回对原始大规模问题的优化。WOF^[20]提出了一种加权优化框架,将决策变量划分为等长的多组,每组对应一个权值变量,对权值变量的优化即为对原决策空间中某子空间的搜索。在此基础上,WOF-MMOPSO-RDG^[35]引入一个组长度池,在进化过程中通过分组长度的自适应变化来扩大在决策空间中的搜索范围,并采用 MMOPSO^[36]对权重向量进行优化。LSMOF^[21]在决策变量空间中将一组参考解与一组权值向量关联,利用权值变量重构决策空间,并通过 HV 指标函数简化目标空间,从而加快搜索效率。TASE^[37]通过张量分解将高维决策空间的异构变量优化问题转换为几个互不相

关的低维子分量优化问题，并设计了一种跨种群匹配方案，根据子种群中个体的匹配程度将多个子种群准确地重构为整个种群。基于问题转换的 LSMOEAs 存在的不足是由于一个权值对应一组决策变量，导致对决策空间的搜索不彻底，所获得最终解的质量有待改进。

除上述类型的 LSMOEAs，学者们也提出了一些其它的 LSMOEAs。例如，LMOCOSO^[22] 不对决策变量进行特别处理，而通过一种新的粒子更新策略来提升粒子群算法对 LSMOPs 的优化性能。DGEA^[23] 通过一种可平衡多样与收敛的预选策略来选择父代种群，并根据种群中支配解的数目自适应决定构造收敛方向向量还是多样方向向量，通过方向向量引导子代的生成，以有效平衡种群的多样性和收敛性。SparseEA^[38] 则通过对每维决策变量的打分生成二进制掩码，并基于决策变量与二进制掩码的乘积来生成具有稀疏特性的子代，以满足稀疏型 LSMOPs 的优化需要。LMOEA-DS^[39] 在每个参考向量中选取最接近原点的个体进行有向采样并引导子代的生成，侧重提高种群的收敛性，同时互补地使用非支配排序与参考向量进行环境选择，侧重保持种群的多样性。这些算法虽然相较于传统进化算法在一定程度上能增强在决策空间中的搜索效率，但对于高维决策空间仍难以进行有效搜索。

2.3 问题转换

基于问题转换的优化方法最初由 Zille 等人在文献[20]中提出，其优化过程如下：

首先，将待优化 LSMOPs 的决策变量分为若干组，并给每组赋予一个权值，种群中的每个个体对应一个权值向量。如图 1 所示， \mathbf{x} 为原始决策空间中含 n 个决策变量的个体，假设将其线性均分为 k 组， \mathbf{w} 即为与 \mathbf{x} 对应的 k 维权值向量。

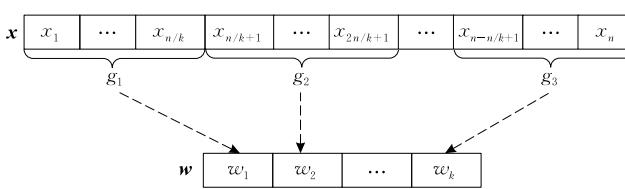


图 1 决策变量与权值对应关系示意图

在每轮迭代过程中，先采用子代生成算子对权值向量集进行操作，生成权值向量的子代。再基于问题转换函数，将所生成的权值向量子代转换为原决策空间中的子代。最后，在原决策空间进行环境选择，生成新的下一代种群。问题转换函数 T 的一般形式如下：

$$\mathbf{x}^{\text{new}} = T(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \quad (2)$$

其中， \mathbf{w} 为权值向量， \mathbf{x} 为原决策空间中的个体， \mathbf{x}^{new} 为转换后在原决策空间中新生成的个体。

3 LSMOEA-AWE 算法

本节介绍 LSMOEA-AWE 算法的主要框架和核心策略，并对算法的时间复杂性进行分析。

3.1 LSMOEA-AWE 的整体框架

LSMOEA-AWE 的整体框架如算法 1 所示。首先，初始化种群 \mathbf{P} 并建立存档 \mathbf{A} ，同时将 \mathbf{P} 中个体与 \mathbf{A} 中个体关联。然后，基于决策变量分组，生成与种群 \mathbf{P} 对应的低维权值向量集 \mathbf{W} 。 \mathbf{P} 中每个个体包含 4 个属性，其中个体的 id 属性为其在种群中的序号， fid 属性表示其父代的 id 属性， aid 属性表示其所对应存档个体在 \mathbf{A} 中的序号， bn 属性用于判断个体是否处于进化瓶颈， fid 和 bn 的初始值为 0。 \mathbf{A} 中每个个体包含 2 个属性，分别为表示其序号的 id 属性和记录与其关联的 \mathbf{P} 中个体数的 $count$ 属性， $count$ 的初始值为 0。 $\mathbf{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ 中的元素为与 \mathbf{P} 中个体逐一对应的权值向量， n 为 \mathbf{P} 中个体的数量。每个权值向量 $w_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,k})$ 中元素个数及取值的初始化和动态变化分别如 3.3 节和 3.5 节所示。

算法 1. LSMOEA-AWE 算法的整体框架。

输入：N(种群大小)

输出： \mathbf{P} (优质解)

1. 初始化种群 \mathbf{P} ;
2. 建立存档 \mathbf{A} ; //算法 2
3. 生成权值向量集合 \mathbf{W} ;
4. while 不满足结束条件 do
5. 基于问题转换生成子代 \mathbf{O} ; //算法 3
6. 通过环境选择得到下一代种群 \mathbf{P} 和对应的 \mathbf{W} ;
7. 更新存档 \mathbf{A} ; //算法 2
8. 对 \mathbf{W} 进行权值扩展; //算法 4
9. end while
10. return \mathbf{P}

在每轮迭代中，先采用子代生成算子对权值向量集 \mathbf{W} 进行操作，生成 \mathbf{W} 的子代集 \mathbf{W}' ，再基于存档 \mathbf{A} 将 \mathbf{W}' 转换为原决策空间中的子代 \mathbf{O} 。随后，对 \mathbf{P} 和 \mathbf{O} 的并集进行环境选择，生成新的下一代种群及其对应的权值向量集。接着，对存档 \mathbf{A} 进行更新操作，并重新建立 \mathbf{P} 中个体与 \mathbf{A} 中个体的关联关系。最后，基于新种群中个体的 bn 属性值，对处于进化瓶颈的个体所对应权值向量进行扩展。当达到结束

条件时,输出优质解.

3.2 建立/更新存档

LSMOEA-AWE 在种群初始化后建立存档,并在每轮迭代的环境选择之后对存档进行更新,基于种群中的高质量解为后续进化持续提供有效的方向,实现对决策空间的高效搜索. LSMOEAE-AWE 在更新存档时不保留之前存档中的个体,而仅基于当前种群的状态,其建立和更新存档的方式完全一致,如算法 2 所示.

算法 2. 建立/更新存档.

输入: \mathbf{P} (种群), N (种群大小)
输出: \mathbf{P} (更新属性后的种群), \mathbf{A} (存档)

1. $\mathbf{A} = \emptyset$;
2. 基于拥挤距离从 \mathbf{P} 中选取 λ 个非支配个体放入 \mathbf{A} 中;
 $/\lambda$ 为存档大小的一半
3. 计算 \mathbf{A} 中所有个体的对立点,并把它们放入 \mathbf{A} 中;
4. $\mathbf{R} = \{1, 2, \dots, 2\lambda\}$;
5. for $i = 1$ to N do
6. if $\mathbf{R} = \emptyset$ then
7. 从 $\{1, 2, \dots, 2\lambda\}$ 中随机选取一个数 r , $p_i.aid = r$;
8. end if
9. break;
10. 从 \mathbf{R} 中随机选一个数 r ;
11. if $+ a_r.count \leq N/2\lambda$ then
12. $p_i.aid = r$;
13. else
14. $\mathbf{R} = \mathbf{R} - \{r\}$;
15. end if
16. end for
17. return \mathbf{P}, \mathbf{A}

首先,将存档 \mathbf{A} 清空. 然后,基于拥挤距离从当前种群 \mathbf{P} 的非支配解中选取 λ 个作为一半存档个体. 若 \mathbf{P} 中非支配层上的个体数目不足 λ ,则继续基于拥挤距离从 \mathbf{P} 的第二非支配层选取,依此类推,直到选够为止. 其中, \mathbf{P} 中非支配解的层序为基于帕累托支配关系进行划分. 接着,为进一步提升种群在后续进化过程中的多样性能,同时尽量避免陷入局部最优的情形,基于对立点的概念,将前述 λ 个个体的对立点也作为存档个体放入 \mathbf{A} 中. 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i 的上限为 x_i^{\max} ,下限为 x_i^{\min} ,则 \mathbf{x} 的对立点 \mathbf{x}' 中每个元素 x'_i 的定义如下:

$$x'_i = x_i^{\max} + x_i^{\min} - x_i \quad (3)$$

在存档操作的最后环节(算法 2, 第 4~16 行),采用随机方式,将当前种群中的个体与存档中的个体均匀关联,为后续在问题转换过程中使用存档引导种群的进化方向,并生成子代个体做好准备.

图 2 为二维空间中基于当前种群构建存档的示意图. 其中,黑色加粗曲线表示 PS,圆点和三角形为当前种群中的个体,且三角形为非支配解. p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 为基于拥挤距离选取的非支配解,作为存档中的一半个体. 五角形分别为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 的对立点 $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$,作为存档中的另一半个体. 从图 2 中可见,将基于拥挤距离选取的非支配解及其对立点作为存档,有利于提升后续进化过程中种群的多样性,同时也有利于快速搜索决策空间中其它尚未搜索的区域.

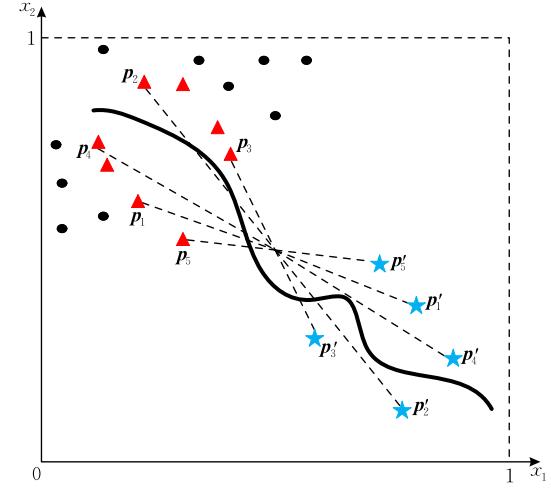


图 2 基于拥挤距离和对立点的存档示意图

3.3 权值向量初始化与问题转换函数

根据文献[16-17]等,在进化过程中对多样性变量和收敛性变量分开处理,可促进种群多样性和收敛性的平衡,有利于提升算法的综合性能. 同时,权值向量的维度越小,对应的搜索空间越小,完成整个搜索所需的评价次数越少.

为此,LSMOEA-AWE 首先通过聚类方式^[17],将待优化问题的决策变量仅分为多样性变量和收敛性变量两类. 然后,采用随机方式,为种群中每个个体的每类决策变量分别对应一个初始值,完成权值向量的初始化.

具体而言,对包含 n 个决策变量的个体 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,首先将其决策变量聚类为多样性决策变量集 $\mathbf{D}: \{x_1^d, \dots, x_{\|\mathbf{D}\|}^d\}$ 和收敛性决策变量集 $\mathbf{C}: \{x_1^c, \dots, x_{\|\mathbf{C}\|}^c\}$,其中 $\|\mathbf{D}\|$ 和 $\|\mathbf{C}\|$ 分别表示 \mathbf{D} 和 \mathbf{C} 中元素的个数. 然后为 \mathbf{D} 和 \mathbf{C} 分别随机对应一个 $[0, 1]$ 区间的权值 w_d 和 w_c . 此时,二元组 (w_d, w_c) 即为个体 \mathbf{x} 所对应的初始权值向量 \mathbf{w} .

对于问题转换函数的设计,为尽可能扩大通过转换生成的新个体在原决策空间的分布范围,提升

算法的搜索能力,LSMOEA-AWE 采用了如下线性变换方程^[20]作为权值向量到原决策空间个体的转换函数:

$$x_i^{\text{new}} = \begin{cases} x_i - 2w_j(x_i - x_i^{\min}), & w_j \in [0, 0.5] \\ x_i + (2w_j - 1)(x_i^{\max} - x_i), & w_j \in (0.5, 1] \end{cases} \quad (4)$$

其中, w_j 为权值向量 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ 中的某个权值, x_i 为原决策空间中个体 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的某个决策变量, 且 \mathbf{x} 与 \mathbf{w} 关联, 同时决策变量 x_i 与权值变量 w_j 对应。 $\mathbf{x}^{\text{new}} = (x_1^{\text{new}}, \dots, x_n^{\text{new}})$ 即为基于 \mathbf{x} 和 \mathbf{w} 生成的新个体。在 LSMOEAE-AWE 中, 由于最初只将决策变量分为收敛和多样两类, 故每个权值向量的长度 k 的初始值为 2, 后续则通过 3.5 节所示方式, 不断进行扩展。

式(4), 当 $w_j \in [0, 0.5]$ 时, 新生成决策变量 x_i^{new} 的取值范围为 $[x_i^{\min}, x_i]$; 当 $w_j \in (0.5, 1]$ 时, x_i^{new} 的取值范围为 $(x_i, x_i^{\max}]$, 故通过式(4)可实现对原问题整个决策空间的探索。

3.4 基于问题转换的子代生成

基于问题转换的子代生成伪代码如算法 3 所示。在每个子代个体的生成过程中, 首先采用轮盘赌方式, 从权值向量集 \mathbf{W} 选取两个权值向量 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 作为父代个体。由于进化过程中 LSMOEAE-AWE 会采用 3.5 节所示方式, 对种群中所生成子代质量累计较差个体所对应的权值向量进行动态扩展, 导致进化过程中各权值向量的维度可能存在差异。在进一步操作前, 需先对所选取权值向量 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 的维度进行对齐。具体而言, 若 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 的维度不一致, 则选取两者中维度大的作为基准, 对维度小的权值向量进行扩展。然后, 对对齐后的 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 进行 DE 操作, 生成子代权值向量 \mathbf{w}'_i 。本文采用的 DE 算子为文献[40]中提出的 DE/rand/1。

算法 3. 基于问题转换生成子代。

输入: \mathbf{P} (种群), \mathbf{W} (权值向量集), \mathbf{A} (存档), N (种群大小)

输出: \mathbf{O} (子代)

1. for $i=1$ to N do;
2. 采用轮盘赌的方式从 \mathbf{W} 中选择 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b , 并对齐 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 的维度;
3. 对对齐后的 \mathbf{w}_a 和 \mathbf{w}_b 进行 DE 操作, 生成 \mathbf{w}'_i ;
4. 根据 \mathbf{w}_a 还原 \mathbf{w}'_i 的维度;
5. 基于还原后的 \mathbf{w}'_i 和 $a_{p_a, aid}$, 使用式(4)生成 \mathbf{o}_i ;
6. $\mathbf{o}_i.fid = p_a.fid$;
7. end for
8. return \mathbf{O}

接着, 基于 \mathbf{w}_a 的维度对 \mathbf{w}'_i 进行还原。之后, 再根

据 \mathbf{w}_a 所关联个体 p_a 的 aid 属性值, 从存档 \mathbf{A} 中选出个体 $a_{p_a, aid}$, 并基于还原后的 \mathbf{w}'_i 和 $a_{p_a, aid}$, 使用式(4)生成原决策空间中的子代个体 \mathbf{o}_i 。最后, 将 p_a 的 id 值作为 \mathbf{o}_i 的 fid 值。

图 3 展示了对两个权值向量的维度进行对齐和还原的过程。在对齐时, 首先基于两个权值向量的维度值, 将维度大的权值向量中的权值进行线性均匀分组, 然后采用逐一插入相同权值形式, 对维度小的权值向量进行扩展, 从而使两者具有相同的维度。图 3(a)和图 3(c)分别为将一个 3 维权值向量对齐到一个 6 维和一个 7 维权值向量的示意图。还原过程与对齐过程刚好相反, 通过均匀间隔抽取权值的方式来形成新的权值向量。图 3(b)和图 3(d)分别为将一个 6 维和一个 5 维权值向量还原到一个 3 维权值向量的示意图。

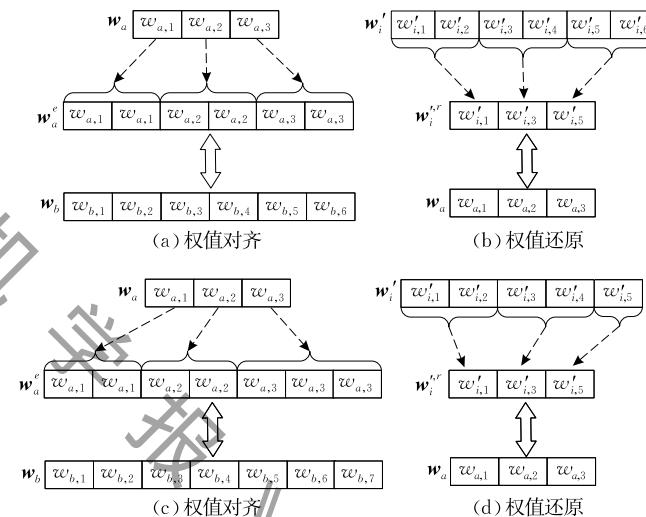


图 3 权值对齐和权值还原示意

在算法 3 中, 值得注意的是, 第 5 行基于权值向量 \mathbf{w}'_i 生成子代个体 \mathbf{o}_i 时, 并不使用 \mathbf{w}'_i 直接关联的 p_a , 而是使用 p_a 所对应的存档个体 $a_{p_a, aid}$, 目的是基于存档更好地提高 \mathbf{o}_i 的质量, 进而提高算法的整体搜索效率。

3.5 权值扩展

基于问题转换的优化方法通过对低维权值向量的优化来提升高维决策变量优化的效率, 可极大降低大规模优化问题的求解难度。但由于一个权值变量对应一组决策变量, 导致同组内的决策变量不能独立变化, 限制了决策空间的搜索范围。为合理均衡算法的搜索效率与搜索质量, LSMOEAE-AWE 采用了对权值向量进行自适应动态扩展的策略。

具体而言, 在初始化时, 由于采用纯随机形式, 种群中的个体通常距离 PS 较远, 故如 3.3 节所示,

仅采用二维形式的权值向量,以利于种群的快速进化。在进化过程中,则基于所生成子代个体的质量,对每个个体的状态进行动态判断。若某个体所生成子代的质量累计较差,则可认为该个体所对应的权值向量已在优化过程中到达瓶颈,需要对该权值向量的维度进行扩展,以扩大后续进化过程中在决策空间中的搜索范围,进而有机会找到更高质量的解。

图 4 为通过权值扩展扩大搜索区域的示意图。其中,左边坐标中边长为 1 的正方形为二维权值向量(w_1, w_2)的搜索区域,右边坐标中边长为 1 的正方体为三维权值向量(w_1, w_2, w_3)的搜索区域。显然,当权值向量的维度从二维扩展至三维时,其对应的搜索区域显著扩大。由于基于问题转换的优化框架是通过对权值向量的优化来间接实现对原问题的优化,且权值向量与原问题种群中的个体一一关联,因此对权值向量搜索区域的扩展即对应扩展了在原问题决策空间中的搜索区域,从而有利于在原问题决策空间中找到更高质量的解。

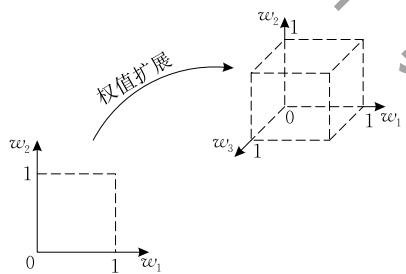


图 4 通过权值扩展扩大搜索区域示意

权值扩展的伪代码如算法 4 所示。首先,将 \mathbf{P} 中非支配且 fid 值不为 0 的个体组成的集合定义为高质量子代个体集 \mathbf{Q} 。 \mathbf{P} 中 fid 值为 0 的个体为直接源自上一代种群的个体,此类个体组成的集合用 \mathbf{U} 表示。对于 \mathbf{U} 中每个个体,若在前一次参与了子代生成,且所生成子代个体在环境选择后不在 \mathbf{Q} 中,说明该个体未能生成高质量子代,将该个体的 bn 属性值加 1。若某个体的 bn 属性值累计达到了阈值 β ,则对其对应的权值向量进行扩展,并重置其 bn 属性为 0。

算法 4. 权值扩展。

输入: \mathbf{P} (种群), \mathbf{O} (子代), \mathbf{W} (权值向量集)

输出: \mathbf{P} (更新属性后的种群), \mathbf{W} (扩展后的权值向量集)

1. \mathbf{P} 中非支配且 $fid \neq 0$ 的个体构成集合 \mathbf{Q} ;
2. \mathbf{P} 中 $fid = 0$ 的个体构成集合 \mathbf{U} ;
3. for $i=1$ to $\|\mathbf{U}\|$ do
4. $\mathbf{R} = \emptyset$;
5. for $i=1$ to N do
6. if $\mathbf{o}_j.fid = \mathbf{u}_i.fid$ then

7. $\mathbf{R} = \mathbf{R} \cup \{\mathbf{u}_i\}$;
8. end if
9. end for
10. if $\mathbf{R} \neq \emptyset$ 且 $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ then
11. 将 \mathbf{P} 中与 \mathbf{u}_i 对应个体的 bn 值加 1;
12. end if
13. end for
14. 将 \mathbf{P} 中所有个体的 fid 置为 0;
15. for $i=1$ to N do
16. if $\mathbf{p}_i.bn = \beta$ then // β 为权值扩展的阈值
17. if \mathbf{w}_i 中关联 \mathbf{D} 的元素个数 $\leq \|\mathbf{D}\|/2$ then
18. 将 \mathbf{w}_i 中的多样性权值个数扩展一倍;
19. else if $\|\mathbf{D}\|/2 < \mathbf{w}_i$ 中关联 \mathbf{D} 的元素个数 $< \|\mathbf{D}\|$
20. 将 \mathbf{w}_i 中的多样性权值个数扩展至 $\|\mathbf{D}\|$;
21. end if
22. if \mathbf{w}_i 中关联 \mathbf{C} 的元素个数 $\leq \|\mathbf{C}\|/2$ then
23. 将 \mathbf{w}_i 中的收敛性权值个数扩展一倍;
24. else if $\|\mathbf{C}\|/2 < \mathbf{w}_i$ 中关联 \mathbf{C} 的元素个数 $< \|\mathbf{C}\|$
25. 将 \mathbf{w}_i 中的收敛性权值个数扩展至 $\|\mathbf{C}\|$;
26. end if
27. 将 $\mathbf{p}_i.bn$ 置为 0;
28. end if
29. end for
30. return \mathbf{P}, \mathbf{W}

值得注意的是,在算法 4 的第 17~25 行,LSMOEA-AWE 对权值向量中关联多样性决策变量集 \mathbf{D} 和收敛性决策变量集 \mathbf{C} 的元素分别进行扩展,以充分发挥分别处理多样性决策变量和收敛性决策变量所具有的优势。以权值向量 \mathbf{w}_i 中与 \mathbf{D} 关联的某一元素 $\mathbf{w}_{i,j}$ 为例,权值向量的具体扩展方式如下:设 \mathbf{w}_i 中关联 \mathbf{D} 的元素个数为 d ,若 $d \leq \|\mathbf{D}\|/2$,则在每个 $\mathbf{w}_{i,j}$ 后插入一个与 $\mathbf{w}_{i,j}$ 具有相同取值的元素,以形成新的权值向量;若 $\|\mathbf{D}\|/2 < d < \|\mathbf{D}\|$,则在 \mathbf{w}_i 中前面 $\|\mathbf{D}\|-d$ 个与 \mathbf{D} 关联的元素 $\mathbf{w}_{i,j}$ 后插入一个与 $\mathbf{w}_{i,j}$ 具有相同取值的元素,形成新的权值向量;若 $d = \|\mathbf{D}\|$,则不再对权值向量 \mathbf{w}_i 进行扩展。

总体而言,LSMOEA-AWE 采用自适应方式对权值向量逐步进行动态扩展,虽然会因为搜索空间的逐步扩大而导致搜索效率的降低,但同时也有利于逐步提高种群中解的质量,可在搜索效率和搜索质量方面达到较好的均衡,有利于算法综合性能的提升。

3.6 时间复杂性分析

LSMOEA-AWE 的每一轮迭代包括基于问题转换的子代生成、环境选择、存档更新和权值扩展。其中,基于问题转换的子代生成首先采用 DE 算子产生权值向量的子代,再使用问题转换公式生成原

决策空间中的子代,其时间复杂度为 $O(knN)$,其中 k 为当前权值向量的维度, n 为原决策空间的维度, N 为种群中个体的数目. LSMOEAs-AWE 采用文献 [41] 的环境选择算子, 其时间复杂度为 $O(mN^2)$, 其中 m 为目标函数的数目. 存档更新包括生成新的存档, 以及将种群中的所有个体与存档个体逐一关联, 其时间复杂度为 $O(mN)$. 权值扩展首先判断种群中的每个个体是否处于瓶颈状态, 然后对处于瓶颈的个体所对应权值向量进行扩展, 其时间复杂度为 $\max(O(N^2), O(kN))$. 由于 LSMOPs 中决策变量的维度值通常远大于目标函数的数目和种群中个体的数目, 故在每一轮迭代过程中, LSMOEAs-AWE 总的时间复杂度为 $O(knN)$.

4 实验设计与分析

本节将 LSMOEAs-AWE 与 6 个先进的 LSMOEAs 在最新的大规模多目标基准测试问题集 LSMOP^[42] 上进行对比实验, 并对 LSMOEAs-AWE 中存档策略和权值扩展策略的有效性进行单独验证, 同时对 LSMOEAs-AWE 中独有参数的敏感性进行分析.

4.1 测试问题集

所采用的基准测试问题集 LSMOP 包括 9 个大规模多目标问题 LSMOP1~LSMOP9. 这 9 个问题分别包含了多种具有挑战性的特性: 不规则 PF、多模、决策变量之间不可分离、决策变量与目标函数完全相关等. 各问题的详细属性如表 1 所示.

表 1 LSMOP 各测试问题的特性

问题	PF 形状	模态	可分离性	相关性
LSMOP1	线性	单模	完全可分离	可分离相关性
LSMOP2	线性	混合	部分可分离	可分离相关性
LSMOP3	线性	多模	混合	可分离相关性
LSMOP4	线性	混合	混合	可分离相关性
LSMOP5	凹	单模	完全可分离	重叠相关性
LSMOP6	凹	混合	部分可分离	重叠相关性
LSMOP7	凹	多模	混合	重叠相关性
LSMOP8	凹	混合	混合	重叠相关性
LSMOP9	凹	混合	完全可分离	完全相关

LSMOP 中各问题的目标数和决策变量数均可扩展, 为全面测试 LSMOEAs-AWE 的整体表现, 分别在目标数为 2 和 3, 决策变量数为 200、500、1000、2000、3000、5000, 共 108 个 LSMOP1~LSMOP9 的测试实例上进行实验.

4.2 对比算法与参数设置

(1) 对比算法

所选择的 6 种对比算法分别为 MOEA/DVA^[16]、

CCGDE3^[18]、WOFSMPSO^[20]、WOF-MMOPSO-RDG^[35]、LSMOF^[21] 和 LMOEA-DS^[39]. 其中, MOEA/DVA 为决策变量分析类算法, CCGDE3 为协同进化类算法, WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG 和 LSMOF 为问题转换类算法, LMOEA-DS 为对子代生成进行改进的算法.

(2) 参数设置

为公平地比较各个算法, 为各算法设置相同的种群大小和评估次数, 分别为 100 和 100 000. 各算法子代生成过程中所用到算子 SBX、PM 和 DE 的参数设置如表 2 所示. LSMOEAs-AWE 中用于控制存档大小的参数 λ 设为 5, 权值扩展阈值 β 设为 10. 各对比算法的其它独有参数, 分别按照各自原始文献中的数值进行设置.

表 2 子代生成算子参数设置

参数名	参数值
SBX 交叉概率 (P_c)	1.0
变异概率 (P_m)	$1/D$
交叉分布指标 (η_c)	20
变异分布指标 (η_m)	20
DE 交叉概率 (CR)	1
缩放因子 (F)	0.5

4.3 性能指标

为客观测试 LSMOEAs-AWE 的综合性能, 采用多目标优化领域广泛使用的反转世代距离 (Inverted Generational Distance, IGD)^[43-44] 和超体积 (Hyper-volume, HV)^[45-46] 作为评价指标. IGD 和 HV 均能同时评价算法的收敛性和多样性.

(1) IGD

IGD 的定义如下:

$$IGD(P^*, \Omega) = \frac{\sum_{x \in P^*} dis(x, \Omega)}{|P^*|} \quad (5)$$

其中, P^* 是 PF 上一组均匀分布的参考点, 而 Ω 是种群中非支配解的集合, $dis(x, \Omega)$ 是 x 与 Ω 中的点之间的最小欧几里得距离. IGD 通过计算真实 PF 与算法所获得解集之间的接近程度来评价算法的综合性能. IGD 的值越小, 表示算法的性能越好.

(2) HV

HV 的定义如下:

$$HV(Q) = \Lambda(\bigcup_{p \in Q} \{x \mid p < x < x_{ref}\}) \quad (6)$$

其中, Q 是算法求得的帕累托前沿面上近似解集, x_{ref} 表示参考点. HV 通过计算目标空间参考点与算法所获得解集之间的体积来对算法进行评估, HV 越大表明算法的性能越好.

4.4 实验结果与分析

分别基于所有测试实例上获得的 IGD 值和 HV 值及对应的标准差,采用置信水平为 95% 的 Wilcoxon 秩和检验^[47],对 LSMOEAE-AWE 和其它 6 个对比算法的性能进行衡量. 符号一、+和=分别代表比较算法的 IGD 值或 HV 值明显差于、优于和类似于 LSMOEAE-AWE.

(1) 2 目标上各算法的实验结果与分析

表 3 和表 4 分别列出了 LSMOP 上 54 个 2 目标测试实例的 IGD 值和 HV 值统计结果. 可以看出, LSMOEAE-AWE 在绝大部分测试实例上取得了最

表 3 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFMSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOF、LMOEA-DS 和 LSMOEAE-AWE 在测试问题为 LSMOP1~LSMOP9 的 2 目标问题上获得的 IGD 值统计结果(均值和标准差)(每个实例算法中的最好结果加粗突出显示)

测试问题	目标维度	MOEA/DVA	CCGDE3	WOFMSMPSO	WOF-MMOPSO-RDG	LSMOF	LMOEA-DS	LSMOEAE-AWE
LSMOP1	200	2.3443e+0(3.63e-1)(-)	1.4912e+0(7.59e-2)(-)	4.6886e-2(2.46e-3)(-)	3.9281e-1(4.17e-2)(-)	5.6591e-1(3.75e-2)(-)	3.3774e-1(2.63e-3)(-)	1.2236e-2(7.34e-8)
	500	7.4792e+0(2.12e-1)(-)	1.5743e+0(2.41e-1)(-)	7.4231e-2(2.94e-3)(-)	4.0625e-1(1.07e-2)(-)	5.6907e-1(2.82e-2)(-)	3.5536e-1(5.74e-2)(-)	1.1656e-2(2.02e-8)
	1000	9.7697e+0(1.38e-1)(-)	1.4724e+0(1.92e-2)(-)	7.3773e-2(1.83e-3)(-)	4.1302e-1(1.75e-2)(-)	6.1532e-1(2.06e-2)(-)	3.7736e-1(3.84e-3)(-)	1.2254e-2(8.81e-6)
	2000	1.0701e+1(1.51e-1)(-)	1.4792e+0(1.24e-2)(-)	7.4356e-2(9.99e-4)(-)	5.7294e-1(5.82e-4)(-)	6.2176e-1(1.72e-2)(-)	3.6737e-1(7.74e-3)(-)	4.5051e-2(4.67e-3)
	3000	1.1026e+1(9.46e-2)(-)	1.5655e+0(1.15e-1)(-)	7.5877e-2(4.06e-4)(-)	6.4627e-1(7.16e-3)(-)	6.4941e-1(2.49e-2)(-)	3.9984e-1(5.74e-2)(-)	4.5667e-2(4.64e-4)
LSMOP2	5000	1.1502e+1(3.26e-2)(-)	1.7035e+0(5.67e-2)(-)	7.4679e-2(3.22e-3)(-)	9.2564e-1(6.46e-3)(-)	6.5188e-1(1.19e-2)(-)	3.5637e-1(4.83e-3)(-)	3.1314e-2(2.63e-4)
	200	1.4918e-1(1.33e-3)(-)	8.4165e-2(6.00e-5)(-)	1.3289e-2(5.79e-4)(-)	7.0132e-2(3.15e-3)(-)	3.9234e-2(1.73e-4)(-)	7.7738e-2(5.95e-3)(-)	7.5582e-3(6.18e-7)
	500	7.3464e-2(2.27e-4)(-)	6.5313e-2(4.86e-6)(-)	9.3797e-3(2.53e-4)(-)	4.1627e-2(5.17e-2)(-)	2.3394e-2(5.79e-4)(-)	5.4748e-2(6.75e-4)(-)	6.2602e-3(4.45e-6)
	1000	4.0421e-2(6.51e-4)(-)	3.8757e-2(2.25e-5)(-)	7.4628e-3(4.40e-4)(-)	4.2646e-2(3.25e-5)(-)	1.8118e-2(7.13e-4)(-)	3.5637e-2(7.84e-4)(-)	6.3256e-3(8.45e-7)
	2000	2.2978e-2(9.27e-4)(-)	2.2785e-2(8.41e-5)(-)	6.5519e-3(6.38e-5)(-)	2.2370e-2(5.05e-5)(-)	1.3146e-2(5.68e-5)(-)	3.4846e-2(3.84e-5)(-)	5.1541e-3(3.35e-8)
LSMOP3	3000	1.7380e-2(6.74e-4)(-)	1.8673e-2(7.85e-5)(-)	5.5025e-3(1.16e-4)(-)	1.7357e-2(6.26e-6)(-)	1.1359e-2(2.30e-4)(-)	3.4637e-2(8.73e-5)(-)	5.1541e-3(3.35e-8)
	5000	1.3842e-2(1.16e-3)(-)	1.0132e-2(1.76e-4)(-)	5.1693e-3(8.87e-5)(-)	1.2048e-2(3.26e-6)(-)	1.0357e-2(1.34e-3)(-)	3.3738e-2(2.57e-4)(-)	4.1414e-3(1.85e-9)
	200	2.6740e+2(2.47e-2)(-)	3.9547e+1(8.24e-1)(-)	1.4447e+0(1.07e-1)(-)	1.4409e+0(1.17e-1)(-)	1.5320e+0(9.46e-4)(-)	1.5684e+0(7.74e-7)(-)	1.2526e-0(5.13e-2)
	500	1.3000e+3(1.58e-3)(-)	3.4246e+1(1.47e-1)(-)	8.4793e-1(2.25e-3)(-)	1.5658e+0(3.61e-4)(-)	1.5656e+0(2.67e-4)(-)	1.5478e+0(8.75e-8)(-)	1.0415e+0(7.63e-2)
	1000	1.2466e+3(6.81e-2)(-)	3.1730e+1(3.90e-1)(-)	8.4842e-1(2.42e-3) (+)	2.5740e+0(7.17e-2)(-)	1.5736e+0(1.65e-4)(-)	1.5403e+0(5.74e-7)(-)	9.0189e+0(8.42e-2)
LSMOP4	2000	1.1904e+3(4.93e-2)(-)	2.5749e+1(5.14e-1)(-)	8.4997e-1(2.25e-3) (+)	2.7705e+0(5.15e-2)(-)	1.5772e+0(7.31e-5)(-)	1.5309e+0(7.78e-7)(-)	1.1173e+0(9.06e-2)
	3000	7.8318e+2(1.03e-3)(-)	2.7014e+1(1.18e-1)(-)	8.5212e-1(2.79e-3) (+)	6.6279e+0(3.15e-2)(-)	1.5785e+0(1.20e-4)(-)	1.5252e+0(8.86e-8)(-)	1.1435e+0(8.36e-2)
	5000	1.9884e+3(5.98e-2)(-)	2.8781e+1(7.40e-2)(-)	8.5132e-1(5.51e-3) (+)	8.0236e+0(4.17e-2)(-)	1.5795e+0(1.52e-5)(-)	1.5306e+0(1.74e-8)(-)	1.0189e+0(8.02e-2)
	200	1.7266e-1(7.64e-4)(-)	7.0307e-2(6.63e-4)(-)	6.0288e-2(2.77e-3)(-)	1.3288e-4(3.07e-4)(-)	9.6776e-2(1.95e-3)(-)	2.5637e-2(3.37e-2)(-)	2.3488e-2(3.90e-7)
	500	1.2207e-16(6.95e-4)(-)	1.1478e-1(1.31e-4)(-)	3.5542e-2(1.10e-3)(-)	7.0242e-2(3.10e-3)(-)	5.1435e-2(3.01e-4)(-)	2.0635e-2(8.73e-4)(-)	1.5106e-3(1.97e-6)
LSMOP5	1000	7.4012e-2(2.95e-4)(-)	5.4379e-2(4.15e-5)(-)	2.0222e-2(4.53e-4)(-)	5.0726e-2(6.82e-3)(-)	3.4493e-2(1.41e-3)(-)	2.3678e-2(8.47e-4)(-)	1.1749e-3(3.43e-8)
	2000	4.4035e-2(1.80e-4)(-)	3.2847e-2(3.43e-4)(-)	1.2565e-2(3.38e-4)(-)	3.3016e-2(5.08e-6)(-)	2.4082e-2(1.85e-3)(-)	2.4747e-2(4.74e-4)(-)	9.7124e-3(6.95e-7)
	3000	3.2408e-2(25.62e-4)(-)	2.4851e-2(4.80e-4)(-)	9.6741e-3(3.68e-4)(-)	2.2573e-2(3.57e-8)(-)	2.3909e-2(2.08e-3)(-)	2.1784e-2(1.14e-5)(-)	7.5166e-3(6.97e-7)
	5000	2.3025e-2(1.83e-4)(-)	1.8352e-2(5.61e-5)(-)	7.5975e-3(2.50e-1)(-)	2.0258e-2(7.04e-4)(-)	1.7019e-2(1.50e-1)(-)	2.0747e-2(7.03e-2)(-)	6.3769e-3(4.43e-8)
	200	8.5248e+0(6.70e-2)(-)	8.2223e-1(3.73e-1)(-)	8.4167e-2(5.75e-3)(-)	6.5712e-2(1.75e-1)(-)	7.4209e-2(1.36e-9)(-)	7.3846e-2(1.74e-3)(-)	6.4893e-2(1.18e-3)
LSMOP6	500	1.6694e+1(1.43e-1)(-)	9.3986e+0(7.92e-1)(-)	1.6436e-1(1.20e-2)(-)	7.0163e-2(8.05e-1)(-)	7.4209e-1(1.36e-9)(-)	7.3748e-1(7.84e-3)(-)	4.2518e-2(1.63e-3)
	1000	2.0106e+1(4.82e-1)(-)	8.7830e+0(5.03e-2)(-)	1.6129e-1(5.73e-3)(-)	8.6785e-1(9.45e-1)(-)	7.4209e-1(1.36e-9)(-)	7.3477e-1(4.74e-4)(-)	5.4029e-2(5.17e-4)
	2000	2.2737e+1(5.85e-1)(-)	3.6516e+0(1.60e-1)(-)	1.7973e-1(8.65e-3)(-)	9.8967e-1(15.05e+0)(-)	7.4209e-1(1.36e-9)(-)	7.3747e-1(7.48e-3)(-)	7.1093e-2(1.08e-3)
	3000	2.3930e+1(2.01e-1)(-)	3.4480e+0(6.47e-2)(-)	1.7100e-1(3.34e-3)(-)	2.4276e+0(3.63e-5)(-)	7.4209e-1(1.65e-1)(-)	7.3548e-1(5.74e-2)(-)	7.2578e-2(1.03e-3)
	5000	2.4379e+1(6.02e+1)(-)	4.6014e+0(6.70e-3)(-)	1.5912e-1(1.04e-3)(-)	2.6526e+0(2.64e-5)(-)	7.4209e-1(2.04e-1)(-)	7.3467e-1(7.74e-3)(-)	7.3339e-2(8.97e-4)
LSMOP7	200	4.2208e+12(6.26e+1)(-)	6.4428e-1(1.64e-1)(-)	1.1976e-1(2.76e-2)(-)	3.7072e-1(2.55e-2)(-)	3.5744e-1(1.31e-3)(-)	3.5637e-1(2.63e-3)(-)	9.1063e-2(3.93e-4)
	500	3.2006e+3(4.68e+3)(-)	7.1186e-1(6.32e-7)(-)	1.3830e-1(1.35e-2)(-)	5.7289e-1(5.05e-2)(-)	3.2008e-1(4.13e-4)(-)	3.6636e-1(8.27e-3)(-)	8.6065e-2(3.15e-3)
	1000	2.0106e+1(4.82e-1)(-)	8.7830e+0(5.03e-2)(-)	1.6129e-1(5.73e-3)(-)	8.6785e-1(9.45e-1)(-)	7.4209e-1(1.36e-9)(-)	7.3477e-1(4.74e-4)(-)	5.4029e-2(5.17e-4)
	2000	2.2737e+1(5.85e-1)(-)	3.6516e+0(1.60e-1)(-)	1.7973e-1(8.65e-3)(-)	9.8967e-1(15.05e+0)(-)	7.4209e-1(1.36e-9)(-)	7.3747e-1(7.48e-3)(-)	7.1093e-2(1.08e-3)
	3000	2.3930e+1(2.01e-1)(-)	3.4480e+0(6.47e-2)(-)	1.7100e-1(3.34e-3)(-)	2.4276e+0(3.63e-5)(-)	7.4209e-1(1.65e-1)(-)	7.3548e-1(5.74e-2)(-)	7.2578e-2(1.03e-3)
LSMOP8	5000	2.4379e+1(6.02e+1)(-)	4.6014e+0(6.70e-3)(-)	1.5912e-1(1.04e-3)(-)	2.6526e+0(2.64e-5)(-)	7.4209e-1(2.04e-1)(-)	7.3467e-1(7.74e-3)(-)	7.3339e-2(8.97e-4)
	200	4.2208e+12(6.26e+1)(-)	6.4428e-1(1.64e-1)(-)	1.1976e-1(2.76e-2)(-)	3.7072e-1(2.55e-2)(-)	3.5744e-1(1.31e-3)(-)	3.5637e-1(2.63e-3)(-)	9.1063e-2(3.93e-4)
	500	3.2006e+3(4.68e+3)(-)	7.1186e-1(6.32e-7)(-)	1.3830e-1(1.35e-2)(-)	5.7289e-1(5.05e-2)(-)	3.2008e-1(4.13e-4)(-)	3.6636e-1(8.27e-3)(-)	8.6065e-2(3.15e-3)
	1000	8.3110e+2(21.46e-2)(-)	7.6189e-1(7.62e-4)(-)	1.6129e-1(5.73e-3)(-)	7.8204e-1(1.247e-2)(-)	7.4209e-1(1.36e-16)(-)	3.6363e-1(8.03e-4)(-)	5.9357e-2(1.87e-4)
	2000	1.9130e+3(8.70e+2)(-)	7.4162e-1(2.16e-3)(-)	1.5667e-1(3.34e-2)(-)	5.5704e-1(4.43e-1)(-)	3.0882e-1(4.91e-6)(-)	3.6363e-1(9.59e-4)(-)	5.2824e-2(2.90e-4)
LSMOP9	3000	1.8616e+3(35.01e+2)(-)	7.4796e-1(1.45e-3)(-)	3.1417e-1(2.55e-2)(-)	7.5604e-1(7.84e-4)(-)	3.0777e-1(1.98e-6)(-)	3.5337e-1(5.62e-4)(-)	5.9346e-2(4.14e-4)
	5000	1.5958e+4(3.22e-1)(-)	7.4622e-1(1.03e-2)(-)	2.9356e-1(3.07e-3)(-)	6.2685e-1(4.126e-1)(-)	3.0700e-1(2.54e+0)(-)	3.5745e-1(5.83e-3)(-)	7.8784e-2(2.62e-4)
	200	1.6294e+4(2.14e+3)(-)	2.4266e+1(1.90e+1)(-)	1.4843e+0(7.61e-4)(-)	2.4503e+0(5.63e+0)(-)	1.4726e+0(2.49e-3)(-)	1.5209e+0(4.68e-5)(-)	1.3066e+0(9.69e-3)
	500	5.5960e+4(1.48e+3)(-)	5.5331e+2(3.49e+1)(-)	1.1419e+0(9.92e-2) (+)	1.7408e+0(7.93e-4)(-)	1.5008e+0(6.32e-4)(-)	1.5203e+0(6.06e-6)(-)	1.3488e+0(9.99e-3)
	1000	7.1235e+4(2.50e+3)(-)	1.1855e+3(7.30e+1)(-)	1.0639e+0(5.00e-2) (+)	1.5407e+0(5.03e-2)(-)	1.5102e+0(6.93e-4)(-)	1.5382e+0(4.76e-5)(-)	1.1652e+0(2.55e-2)
LSMOP7	2000	8.3765e+4(7.60e+2)(-)	1.7160e+3(1.66e+1)(-)	1.0597e+0(5.30e-2) (-)	1.5132e+0(7.64e-4)(-)	1.5142e+0(2.20e-4)(-)	1.5308e+0(2.24e-4)(-)	1.0600e+0(1.72e-2)
	3000	8.7635e+4(2.24e-3)(-)	2.0160e+3(1.66e-1)(-)	1.0285e+0(6.59e-4) (+)	1.5151e+0(4.38e-4)(-)	1.5151e+0(3.48e-4)(-)	1.5204e+0(1.92e-6)(-)	1.1600e+0(1.72e-3)
	5000	9.1553e+4(6.35e-2)(-)	1.6299e+3(4.70e-1)(-)	1.0406e+0(9.05e-5) (+)	1.5136e+0(6.07e-3)(-)	1.5156e+0(1.07e-3)(-)	1.5113e+0(4.07e-4)(-)	1.2288e+0(5.66e-2)
	200	7.3035e+0(5.29e-1)(-)	3.2989e-1(3.26e-1)(-)	9.7291e-2(2.23e-3)(-)	4.2282e-1(3.23e-2)(-)	7.4209e-1(1.36e-16)(-)	7.7367e-1(4.69e-3)(-)	4.9731e-2(4.47e-4)
	500	1.6694e+1(1.43e-1)(-)	1.9385e+0(1.83e-1)(-)	1.6436e-1(1.20e-2)(-)	9.7231e-1(2.03e-3)(-)	7.4209e-1(1.36e-16)(-)	7.9474e-1(7.88e-3)(-)	1.8537e-2(4.15e-5)
LSMOP8	1000	1.7685e+1(2.07e-1)(-)	2.6577e+0(9.98e-2)(-)	1.5509e-1(8.16e-3)(-)	7.5892e-1(2.27e-3)(-)	7.4209e-1(1.36e-16)(-)	7.7747e-1(9.30e-2)(-)	3.5434e-2(4.33e-5)
	2000	1.9679e+1(1.85e-2)(-)	2.8935e+0(1.76e-1)(-)	1.5373e-1(3.51e-3)(-)	1.0397e+0(3.07e-1)(-)	7.4209e-1(1.36e-16)(-)	7.2855e-1(6.67e-3)(-)	3.8570e-2(1.01e-4)
	3000	2.0177e+1(1.94e-1)(-)	3.0160e+0(6.14e-2)(-)	1.5713e-1(6.50e-4)(-)	1.5336e+0(7.07e-1)(-)	7.4209e-1(7.86e-2)(-)	7.3588e-1(6.08e-2)(-)	4.1650e-2(9.11e-5)
	5000	2.0869e+1(3.70e-2)(-)	3.3489e+0(7.44e-2)(-)	1.5182e-1(7.04e-1)(-)	1.6268e+0(8.26e-1)(-)	7.4209e-1(6.60e-1)(-)	7.1950e-1(8.90e-3)(-)	4.1638e-2(6.36e-5)
	200	6.8502e+0(1.55e-1)(-)	8.7797e-1(5.52e-1)(-)	8.1004e+0(1.00e+0)(-)	8.1004e+0(1.00e+0)(-)	8.1004e+0(1.00e+0)(-)	5.8747e-1(8.58e-3)(-)	4.3019e-2(1.17e-7)
LSMOP9	500	3.6320e+1(1.38e+0)(-)	2.9265e+0(1.06e-1)(-)	7.4206e-1(1.18e-1)(-)	8.1004e+0(1.00e+0)(-)	8.0954e+0(1.647e-4)(-)	5.8367e-1(6.11e-2)(-)	3.9053e-2(3.07e-7)
	1000	4.8357e+1(2.65e+0)(-)	3.6050e+0(4.31e-1)(-)	6.2138e-1(2.05e-2)(-)	6.0924e-1(1.05e-8)(-)	8.0738e-1(1.80e-3)(-)	5.8276e-1(5.03e-3)(-)	3.7702e-2(5.05e-7)
	2000	5.6380e+1(2.77e+0)(-)	4.4080e+0(9.83e-1)(-)	6.0085e-1(9.49e-2)(-)	8.0627e-1(4.75e-4)(-)	8.0652e-1(3.07e-3)(-)	5.8474e-1(3.64e-4)(-)	2.7059e-2(4.87e-7)
	3000	6.0442e+1(1.69e-4)(-)	3.6998e+0(5.29e-3)(-)	5.5901e-1(7.80e-3)(-)	6.0524e-1(3.55e-6)(-)	8.0402e-1(6.06e-5)(-)	5.8136e-1(5.66e-3)(-)	2.7059e-2(4.87e-7)

表 4 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOF、LMOEA-DS 和 LSMOEAEWE 在测试问题为 LSMOP1~LSMOP9 的 2 目标问题上获得的 HV 值统计结果(均值和标准差)(每个实例算法中的最好结果加粗突出显示)

测试问题	目标维度	MOEA/DVA	CCGDE3	WOFSMPSO	WOF-MMOPSO-RDG	LSMOF	LMOEA-DS	LSMOEA-AWE
LSMOP1	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.8838e-1(7.93e-2)(-)	5.2333e-1(3.15e-3)(-)	1.7934e-1(4.30e-3)(-)	1.0884e-1(7.30e-3)(-)	1.9652e-1(4.48e-4)(-)	5.6923e-1(9.38e-7)
	500	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	4.9057e-1(3.46e-3)(-)	2.1103e-1(5.34e-3)(-)	1.1089e-1(8.04e-3)(-)	2.1961e-1(3.58e-4)(-)	5.6936e-1(7.78e-7)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	4.9123e-1(1.92e-3)(-)	3.2104e-1(7.33e-3)(-)	1.1140e-1(8.58e-3)(-)	2.1965e-1(4.47e-4)(-)	5.6814e-1(1.80e-6)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	4.9079e-1(1.23e-3)(-)	3.2184e-1(4.30e-3)(-)	1.1658e-1(6.40e-4)(-)	2.1964e-1(3.83e-4)(-)	5.6824e-1(6.80e-6)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	4.8893e-1(8.14e-4)(-)	4.2152e-1(3.55e-4)(-)	1.0841e-1(1.19e-2)(-)	2.3964e-1(4.47e-3)(-)	5.6682e-1(7.50e-6)
LSMOP2	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	4.9044e-1(3.52e-3)(-)	4.2163e-1(3.23e-3)(-)	1.0785e-1(1.05e-2)(-)	2.5963e-1(6.36e-4)(-)	5.2658e-1(6.88e-3)
	200	3.9915e-1(3.31e-3)(-)	4.6341e-1(1.72e-3)(-)	5.6732e-1(6.84e-4)(-)	5.0462e-1(1.34e-3)(-)	5.3372e-1(6.49e-5)(-)	5.6535e-1(4.83e-4)(-)	5.7267e-1(1.87e-7)
	500	4.8650e-1(2.74e-4)(-)	5.2239e-1(4.48e-4)(-)	5.7264e-1(4.90e-4)(-)	5.1426e-1(1.92e-3)(-)	5.5376e-1(7.06e-4)(-)	5.6354e-1(7.62e-4)(-)	5.7534e-1(1.24e-6)
	1000	5.2881e-1(1.91e-3)(-)	5.4777e-1(1.12e-3)(-)	5.7539e-1(7.09e-4)(-)	5.3762e-1(3.94e-3)(-)	5.6098e-1(8.09e-4)(-)	5.5637e-1(4.36e-2)(-)	5.7713e-1(5.23e-8)
	2000	5.5190e-1(1.80e-3)(-)	5.5626e-1(7.69e-5)(-)	5.7676e-1(1.11e-4)(-)	5.6774e-1(2.12e-3)(-)	5.6741e-1(9.22e-4)(-)	5.5747e-1(4.63e-4)(-)	5.7803e-1(8.23e-8)
LSMOP3	3000	5.5897e-1(2.28e-3)(-)	5.6427e-1(6.65e-5)(-)	5.7861e-1(7.65e-5)(-)	5.6267e-1(5.32e-4)(-)	5.6979e-1(2.99e-4)(-)	5.6536e-1(3.57e-3)(-)	5.7923e-1(4.78e-8)
	5000	5.6426e-1(1.48e-3)(-)	5.7073e-1(1.68e-4)(-)	5.7934e-1(1.80e-4)(-)	5.7152e-1(6.92e-3)(-)	5.7132e-1(1.82e-3)(-)	5.7136e-1(4.57e-4)(-)	5.7987e-1(8.67e-9)
	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
	500	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
LSMOP4	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)						
	200	3.7082e-1(4.41e-4)(-)	4.8860e-1(1.71e-2)(-)	5.0687e-1(3.31e-3)(-)	4.4813e-1(4.48e-4)(-)	4.5846e-1(1.73e-3)(-)	4.3326e-1(4.48e-4)(-)	5.5307e-1(8.58e-6)
	500	4.3017e-1(1.14e-3)(-)	4.7252e-1(8.06e-4)(-)	5.3787e-1(1.19e-3)(-)	5.1614e-1(3.45e-4)(-)	5.1585e-1(3.76e-4)(-)	4.7637e-1(5.87e-4)(-)	5.6285e-1(1.12e-6)
LSMOP5	1000	4.8717e-1(7.35e-3)(-)	5.1352e-1(1.01e-4)(-)	5.5887e-1(7.59e-3)(-)	5.0597e-1(5.38e-4)(-)	5.3929e-1(1.78e-3)(-)	4.9836e-1(4.26e-5)(-)	5.6675e-1(1.73e-5)
	2000	5.2437e-1(6.29e-4)(-)	5.4105e-1(4.65e-4)(-)	5.6841e-1(4.18e-4)(-)	5.5641e-1(4.43e-4)(-)	5.5266e-1(2.28e-3)(-)	5.3248e-1(4.84e-4)(-)	5.7093e-1(1.33e-5)
	3000	5.3989e-1(1.27e-3)(-)	5.5202e-1(6.04e-4)(-)	5.7239e-1(5.24e-4)(-)	5.5546e-1(7.35e-3)(-)	5.5344e-1(2.58e-3)(-)	5.4826e-1(6.26e-3)(-)	5.7393e-1(2.28e-7)
	5000	5.5215e-1(8.13e-4)(-)	5.6072e-1(6.32e-5)(-)	5.7520e-1(0.00e+0)(-)	5.6535e-1(7.05e-3)(-)	5.6249e-1(0.00e+0)(-)	5.4826e-1(6.26e-3)(-)	5.7663e-1(1.53e-7)
	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.5260e-1(4.24e-3)(-)	1.0962e-1(6.34e-3)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	9.6515e-2(4.48e-4)(-)	2.6372e-1(2.84e-4)
LSMOP6	500	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.9942e-1(8.70e-3)(-)	1.5962e-1(3.35e-3)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	1.0431e-1(2.26e-6)(-)	2.8246e-1(1.56e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.0321e-1(5.33e-3)(-)	1.7952e-1(3.65e-3)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	1.1430e-1(4.63e-4)(-)	2.7571e-1(4.15e-4)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.9139e-1(3.64e-3)(-)	1.7926e-1(6.45e-3)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	1.3531e-1(4.61e-4)(-)	2.5571e-1(1.10e-3)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.9561e-1(2.00e-3)(-)	1.7726e-1(3.33e-3)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	1.0395e-1(2.72e-3)(-)	2.6600e-1(1.30e-3)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.0577e-1(0.00e+0)(-)	9.0925e-2(0.00e+0)(-)	9.0909e-2(0.00e+0)(-)	1.1093e-1(4.83e-4)(-)	2.6857e-1(9.04e-3)
LSMOP7	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.0091e-1(0.00e+0)(-)	2.7936e-2(2.27e-3)(-)	1.9851e-2(2.42e-3)(-)	1.0083e-1(5.62e-4)(-)	1.8012e-1(2.11e-3)
	500	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.8901e-1(1.97e-2)(-)	4.4615e-2(3.15e-3)(-)	3.4577e-2(1.96e-4)(-)	1.0211e-1(4.34e-6)(-)	2.2590e-1(1.69e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	5.0677e-2(1.38e-3)(-)	1.9761e-1(1.87e-2)(-)	6.9735e-2(3.51e-3)(-)	6.9603e-2(1.36e-5)(-)	5.1469e-1(6.85e-4)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	7.0226e-2(4.31e-3)(-)	1.9081e-1(2.55e-2)(-)	9.9125e-2(4.41e-3)(-)	8.9100e-2(3.15e-5)(-)	1.5928e-1(4.95e-3) (-)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	7.5626e-2(3.02e-3)(-)	1.4000e-1(1.55e-2)(-)	9.8616e-2(3.13e-3)(-)	9.5556e-2(1.13e-5)(-)	1.6974e-1(3.37e-5) (-)
LSMOP8	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	8.1442e-2(0.00e+0)(-)	1.3437e-1(0.00e+0)(-)	1.2115e-1(3.57e-3)(-)	1.0078e-1(0.00e+0)(-)	1.7824e-1(4.39e-4) (-)
	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.0091e-1(0.00e+0)(-)	2.7936e-2(2.27e-3)(-)	1.9851e-2(2.42e-3)(-)	1.0083e-1(5.62e-4)(-)	1.8012e-1(2.11e-3)
	500	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.8371e-2(3.51e-3)(-)	1.8901e-1(1.97e-2)(-)	4.4615e-2(3.15e-3)(-)	3.4577e-2(1.96e-4)(-)	1.2590e-1(1.69e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	5.0677e-2(1.38e-3)(-)	1.9761e-1(1.87e-2)(-)	6.9735e-2(3.51e-3)(-)	6.9603e-2(1.36e-5)(-)	1.3531e-1(5.26e-6)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	7.0226e-2(4.31e-3)(-)	1.9081e-1(2.55e-2)(-)	9.9125e-2(4.41e-3)(-)	8.9100e-2(3.15e-5)(-)	1.5928e-1(4.95e-3)
LSMOP9	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	7.5626e-2(3.02e-3)(-)	1.4000e-1(1.55e-2)(-)	9.8616e-2(3.13e-3)(-)	9.5556e-2(1.13e-5)(-)	1.6974e-1(3.37e-5)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	8.1442e-2(0.00e+0)(-)	1.3437e-1(0.00e+0)(-)	1.2115e-1(3.57e-3)(-)	1.0078e-1(0.00e+0)(-)	1.7824e-1(4.39e-4)
	200	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	2.6461e-4(4.58e-4)(-)	1.0331e-1(2.15e-2)(-)	6.9615e-2(3.51e-3)(-)	9.0949e-2(4.83e-5)(-)	1.3563e-1(3.38e-5)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.2499e-1(5.21e-3)(-)	9.0235e-2(4.52e-3)(-)	9.1208e-2(2.24e-4)(-)	1.3574e-1(4.34e-6)(-)	2.2544e-1(5.04e-7)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.3183e-1(2.41e-2)(-)	9.8426e-2(1.31e-3)(-)	9.1361e-2(3.93e-4)(-)	1.4313e-1(7.36e-6)(-)	2.3044e-1(1.04e-7)
LSMOP9	3000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	1.4121e-1(0.00e+0)(-)	9.9735e-2(2.24e-3)(-)	9.1739e-2(3.22e-5)(-)	1.1534e-1(4.84e-6)(-)	2.3256e-1(1.32e-7)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	0.0000e+0(0.00e+0)(-)	9.7144e-2(0.00e+0)(-)	9.9862e-2(3.41e-3)(-)	9.1808e-2(0.00e+0)(-)	1.3572e-1(8.39e-7)(-)	2.3447e-1(8.65e-8)
	+/-=	0/42/12	0/42/12	0/42/12	0/42/12	0/42/12	0/42/12	0/42/12

性能。LMOEA-DS 在绝大多数测试实例上取得了仅次于 WOFSMPSO 和 LSMOEAEWE 性能，原因在于其通过对理想点的采样引导子代生成，并互补地使用非支配排序与参考向量进行环境选择的方式发挥了较好的作用。此外，WOFSMPSO 在 1000 至 5000 维 LSMOP3，以及 500 至 5000 维 LSMOP7 上的 IGD 表现优于 LSMOEAEWE，原因在于 WOFSMPSO 采用 SMPSO 作为优化器，通过多种变异算子增强了个体的突变概率，并通过压缩因子对粒子的速度进行限制，一定程度上有利于解决高维度的重叠相关多模问题。需要注意的是，各算法在

LSMOP3 和 LSMOP7 问题上的 HV 值均为 0，表明所有算法对于多模的 LSMOP3 和 LSMOP7 都很难收敛到参考点空间之内。

为更直观展示 LSMOEAEWE 与各对比算法在处理 2 目标 LSMOP 问题时的性能表现，图 5 根据表 1 各测试问题的特性，列出了代表性问题 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 在 2 目标 1000 维测试实例上的 IGD 值变化曲线。从图中可以看出，LSMOEAEWE 在 LSMOP1、LSMOP8 和 LSMOP9 的测试实例上具有明显的性能优势，在 LSMOP3 的测试实例上则与 WOFSMPSO 具有基本相当的最佳

性能。值得注意的是,在进化早期,需要进行分类操作的 MOEA/DVA 和 LSMOEA-AWE 没有对应的 IGD 值,原因是此时对个体的评估仅用于决策变量分类,尚未启动种群的进化。紧接之后,由于 LSMOEA-AWE 初期仅对应低维的权值向量且采用了存档策略,从而在各个测试实例上均具有较快的收敛速度。此后,对于 LSMOP1 和 LSMOP8 的测试实例,存档

策略和权值扩展策略在后续进化过程中所起作用比较明显。对于 LSMOP9 的测试实例,由于 LSMOEA-AWE 在初期即已获得接近 PS 的解集,后续进化过程中性能提升不明显。对于 LSMOP3 的测试实例,由于其为多模问题,所有算法最终获得的 IGD 值均不是非常理想,但总体而言,LSMOEA-AWE 在收敛速度和最终性能上仍具有较强的竞争力。

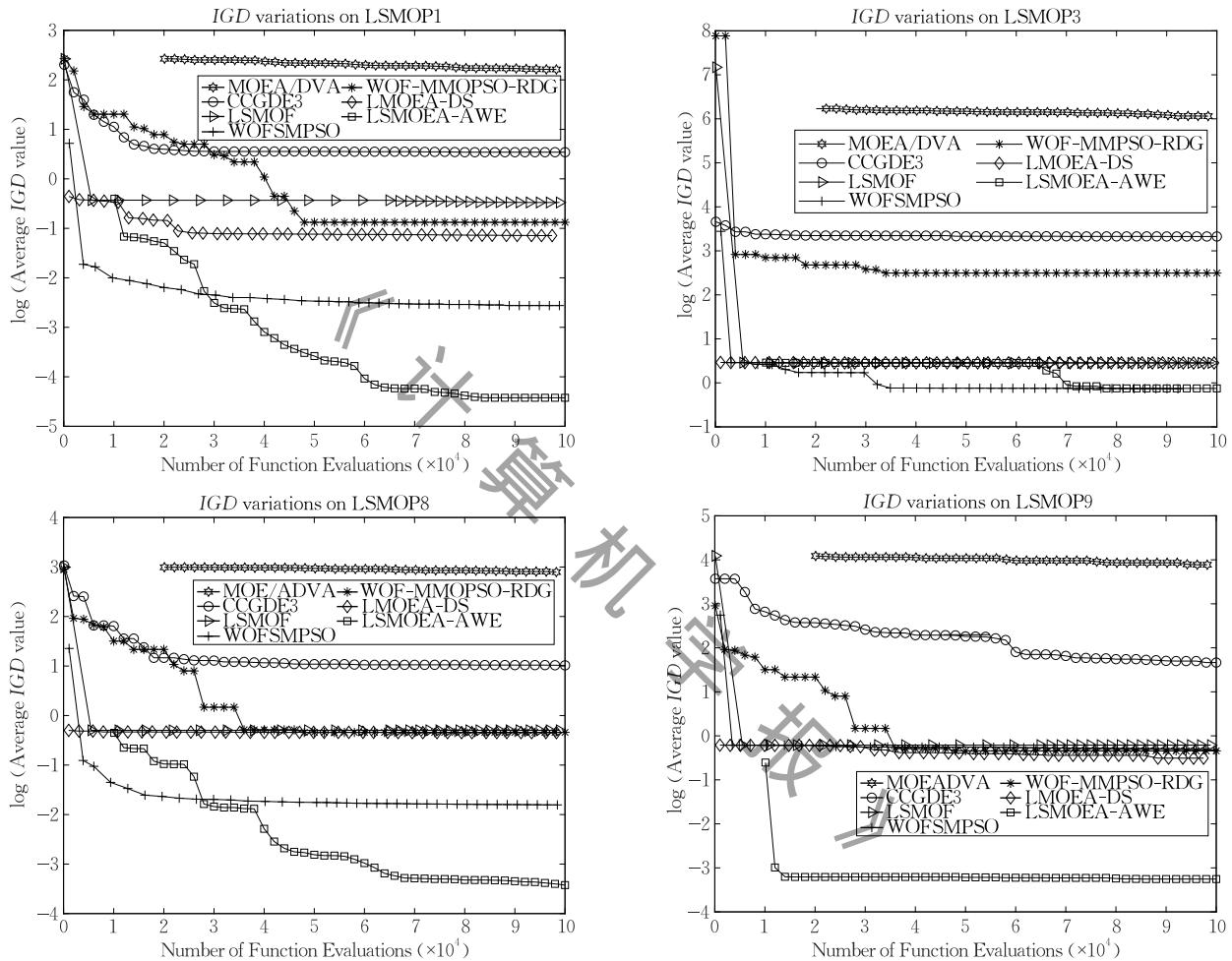


图 5 在 2 目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 测试实例上进行 30 次独立运行, MOEA/DVA、CCGDE3、WOFMSPSO、WOF-MMPSO-RDG、LSMOF、LMOEA-DS 和 LSMOEA-AWE 的平均 IGD 值曲线

为进一步展示 LSMOEA-AWE 与各对比算法在处理 2 目标 LSMOP 问题时在目标空间的表现,图 6 列出了代表性问题 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 在 2 目标 1000 维测试实例上各算法运行结果与真实 PF 的对比图,并通过局部放大对细节进行展示。需特别注意的是,由于个别算法在 LSMOP3 测试实例上的运行结果非常差,导致 LSMOP3 测试实例对比图的纵坐标需乘上 10^5 才可进行整体展示。从图中可以看出,LSMOEA-AWE 在 LSMOP1、LSMOP8、LSMOP9 的测试实例上的

运行结果与真实 PF 的距离最近且分布均匀。在 LSMOP3 的测试实例上,虽然 LSMOEA-AWE 运行结果的分布较其它算法均匀,但与 PF 的距离属于次优。MOEA/DVA 和 CCGDE3 在各测试实例上的运行结果与真实 PF 有明显较大的距离,说明这两个算法在搜索空间中的搜索效率较低,难以快速向 PF 方向收敛。LMOEA-DS 在 LSMOP1、LSMOP8、LSMOP9 的测试实例上取得了仅次于 WOFMSPSO 和 LSMOEA-AWE 的性能,说明其所采用的子代生成和环境选择策略可以较有效地确保种群的多样性。

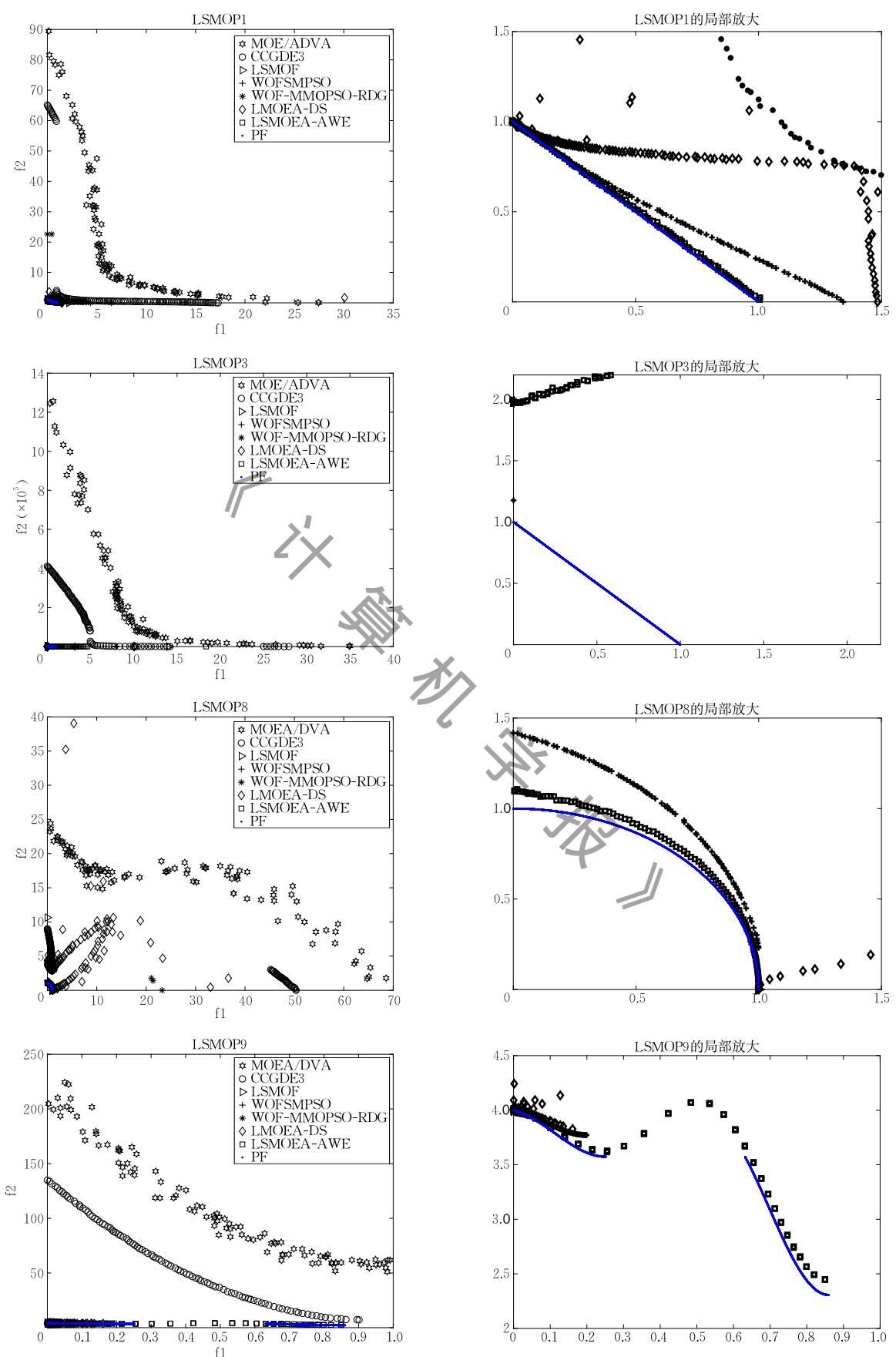


图 6 在 2 目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 测试实例上 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFMSPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOPF、LMOEA-DS 和 LMOEA-AWE 的帕累托前沿对比图

和收敛性。总体而言,LSMOEA-AWE 通过在问题转换框架中进一步引入存档策略和权值扩展策略,可更好地均衡问题转换过程中的搜索效率和搜索质量,从而取得最佳的整体性能。

(2) 3 目标上各算法的实验结果与分析

表 5 和表 6 分别列出了 LSMOP 上 54 个 3 目标测试实例的 IGD 值和 HV 值的统计结果。可以看出,LSMOEA-AWE 在绝大多数测试实例上取得了最佳的 IGD 值和 HV 值,进一步验证了 LSMOP-AWE 所

采用存档策略和权值扩展策略的有效性。LMOEA-DS 在 3 目标的 1000、2000、3000 和 5000 维 LSMOP9 上取得了较好的 IGD 值和 HV 值,原因在于 LMOEA-DS 的环境选择策略互补地使用非支配排序和参考向量的方式有利于解决 PF 断开的问题。而 WOFSMPSO 在 3 目标的 1000、2000、3000 和 5000 维 LSMOP7 上取得较好的 HV 值,原因在于 WOFSMPSO 通过多种变异算子增强了个体的突变概率,一定程度上有利 于维持高维度的重叠相关多模问题上种群的多样性。

表 5 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOP、LSMOEA-DS 和 LSMOEAE-AWE 在测试问题为 LSMOP1~LSMOP9 的 3 目标问题上获得的 IGD 值统计结果(均值和标准差)(每个实例算法中的最好结果加粗突出显示)

测试问题	目标维度	MOEA/DVA	CCGDE3	WOFSMPSO	WOF-MMOPSO-RDG	LSMOP	LSMOEA-DS	LSMOEA-AWE
LSMOP1	200	1.9938e+0(4.90e-1)(-)	1.7021e+0(2.27e-1)(-)	1.7454e-1(2.06e-2)(-)	6.6267e-1(7.15e-1)(-)	4.1605e-1(1.47e-2)(-)	4.3467e-1(7.47e-3)(-)	1.5692e-1(3.28e-4)
	500	7.0318e+0(8.95e-2)(-)	3.0928e+0(4.90e-2)(-)	1.7385e-1(3.21e-2)(-)	1.6051e+0(5.27e-1)(-)	5.7043e-1(4.53e-3)(-)	4.5636e-1(5.74e-2)(-)	1.2663e-1(1.46e-4)
	1000	9.7416e+0(1.26e-1)(-)	3.2163e+0(2.69e-1)(-)	1.7839e-1(1.63e-2)(-)	2.5534e+0(4.69e-1)(-)	6.0980e-1(1.02e-2)(-)	4.5668e-1(4.73e-3)(-)	1.1304e-1(3.04e-5)
	2000	1.0867e+1(4.17e-1)(-)	3.0479e+0(4.42e-1)(-)	1.8640e-1(9.23e-3)(-)	3.0728e+0(4.64e-2)(-)	6.4105e-1(4.68e-3)(-)	4.5437e-1(5.52e-3)(-)	1.7449e-1(6.28e-4)
	3000	1.1556e+1(6.01e-2)(-)	2.5677e+0(2.15e-3)(-)	1.8955e-1(1.27e-2)(-)	3.2465e+0(6.69e-1)(-)	6.8720e-1(2.83e-2)(-)	4.5984e-1(7.58e-4)(-)	1.5217e-1(2.46e-4)
LSMOP2	5000	1.1739e+1(1.20e-3)(-)	2.7638e+0(1.51e-5)(-)	2.0497e-1(4.83e-2)(-)	3.0948e+0(6.90e-2)(-)	6.9158e-1(2.40e-2)(-)	4.5078e-1(3.63e-4)(-)	2.0297e-1(3.89e-5)
	200	1.2434e-1(1.59e-3)(-)	1.3636e-1(1.91e-3)(-)	1.0284e-1(1.52e-3)(-)	1.4715e-1(6.65e-2)(-)	1.5063e-1(1.93e-3)(-)	6.7436e-2(6.75e-4)(-)	5.8589e-2(6.03e-4)
	500	8.1016e-2(1.30e-3)(-)	7.8233e-2(1.85e-3)(-)	6.4525e-2(3.13e-3)(-)	7.5433e-2(3.84e-3)(-)	8.5396e-2(1.78e-4)(-)	5.7673e-2(5.86e-4)(-)	4.7275e-2(5.66e-4)
	1000	6.8742e-2(4.67e-3)(-)	6.1147e-2(8.79e-4)(-)	6.0697e-2(4.36e-3)(-)	6.1344e-2(8.09e-4)(-)	7.2327e-2(5.30e-3)(-)	4.4646e-2(5.85e-4)(-)	3.4807e-2(6.95e-5)
	2000	6.2615e-2(3.94e-3)(-)	5.4298e-2(4.32e-4)(-)	5.4295e-2(3.08e-3)(-)	5.4254e-2(7.32e-4)(-)	7.1244e-2(5.18e-3)(-)	4.4537e-2(6.85e-4)(-)	4.4447e-2(8.83e-8)
LSMOP3	3000	6.2032e-2(7.95e-3)(-)	5.2536e-2(6.27e-4)(-)	5.4826e-2(2.74e-3)(-)	5.2356e-2(2.27e-4)(-)	6.5251e-2(5.99e-3)(-)	4.3757e-2(6.85e-4)(-)	4.3613e-2(4.16e-8)
	5000	6.1453e-2(4.73e-3)(-)	5.1691e-2(1.91e-3)(-)	5.2374e-2(2.86e-3)(-)	5.3651e-2(1.93e-3)(-)	6.2978e-2(4.38e-3)(-)	4.2878e-2(7.18e-5)(=)	4.2803e-2(4.94e-8)
	200	1.0307e+2(3.95e+1)(-)	9.8510e+0(6.91e-1)(-)	8.6072e-1(1.38e-2)(-)	8.6060e-1(1.06e-6)(-)	7.6898e-1(2.04e-2)(-)	8.6377e-1(6.86e-3)(-)	7.1743e-1(7.74e-4)
	500	5.2839e+2(2.61e+2)(-)	1.0503e+1(1.88e-1)(-)	8.6072e-1(2.07e-3)(-)	2.6076e+0(2.04e+1)(-)	8.4252e-1(1.25e-2)(-)	8.6747e-1(6.46e-2)(-)	6.3672e-1(1.26e-3)
	1000	3.3217e+2(1.28e+2)(-)	1.2412e+1(1.89e+0)(-)	8.6072e-1(1.36e-16)(-)	1.5412e+1(1.89e+0)(-)	8.6050e-1(3.49e-4)(-)	8.6636e-1(8.64e-2)(-)	6.7237e-1(5.16e-3)
LSMOP4	2000	2.4407e+2(1.73e+2)(-)	1.3848e+1(2.73e+0)(-)	8.6072e-1(1.36e-16)(-)	1.3798e+1(2.44e-3)(-)	8.6068e-1(3.94e-5)(-)	8.6536e-1(5.67e-4)(-)	7.9542e-1(8.72e-4)
	3000	4.5316e+2(3.10e+2)(-)	1.3698e+1(2.40e-3)(-)	8.6072e-1(1.36e-16)(-)	1.4848e+1(2.63e+0)(-)	8.6067e-1(4.01e-5)(-)	8.6052e-1(3.83e-3)(-)	7.7353e-1(1.57e-3)
	5000	5.9545e+2(4.91e+2)(-)	1.1151e+1(4.79e-1)(-)	8.6072e-1(2.03e-6)(-)	1.1074e+1(4.78e-1)(-)	8.6063e-1(2.97e-5)(-)	8.6054e-1(3.64e-3)(-)	8.1500e-1(2.01e-4)
	200	2.8966e-1(8.48e-3)(-)	3.6766e-1(1.19e-2)(-)	2.4910e-1(1.38e-2)(-)	3.99637e-1(2.19e-2)(-)	3.0313e-1(2.87e-4)(-)	1.4647e-1(7.57e-3)(-)	1.3574e-1(7.36e-6)
	500	1.9908e-1(3.69e-4)(-)	2.1579e-1(2.27e-3)(-)	1.3568e-1(1.36e-2)(-)	2.0569e-1(3.27e-3)(-)	2.1613e-1(1.12e-3)(-)	1.0561e-1(2.14e-3)(-)	8.9445e-2(4.25e-5)
LSMOP5	1000	1.2911e-1(1.48e-3)(-)	1.3394e-1(2.36e-3)(-)	9.0941e-2(1.73e-3)(-)	1.3693e-1(7.36e-3)(-)	1.4019e-1(1.19e-3)(-)	8.6578e-2(5.35e-3)(-)	6.1580e-2(3.36e-7)
	2000	8.9226e-2(1.86e-3)(-)	8.7254e-2(1.02e-3)(-)	6.7896e-2(3.56e-3)(-)	8.8264e-2(4.32e-3)(-)	9.7128e-2(2.18e-3)(-)	4.5758e-2(3.78e-5)(-)	5.9392e-2(6.54e-6)
	3000	7.3693e-2(1.10e-3)(-)	7.0473e-2(1.37e-3)(-)	6.1205e-2(2.49e-3)(-)	7.7453e-2(1.37e-3)(-)	8.4253e-2(9.52e-3)(-)	5.6584e-2(5.75e-5)(-)	5.2725e-2(1.22e-6)
	5000	6.6722e-2(2.15e-4)(-)	5.9490e-2(2.46e-3)(-)	5.79490e-2(1.30e-3)(-)	6.7496e-2(4.46e-3)(-)	6.9032e-2(2.56e-3)(-)	5.3575e-2(4.55e-6)(-)	4.7783e-2(4.64e-7)
	200	6.3279e+0(3.58e-1)(-)	5.6282e+0(3.45e-1)(-)	3.3617e-1(8.91e-2)(-)	1.1282e+0(4.45e-1)(-)	4.3463e-1(2.73e-2)(-)	5.3146e-1(4.47e-1)(-)	1.3464e-1(1.16e-3)
LSMOP5	500	1.3107e+1(7.46e-1)(-)	7.3187e+0(1.11e-1)(-)	3.8175e-1(4.25e-2)(-)	7.0263e+1(6.26e-1)(-)	5.4081e-1(2.18e-4)(-)	5.3454e-1(6.74e-2)(-)	2.0183e-1(1.26e-3)
	1000	1.6771e+1(3.66e-1)(-)	6.2411e+0(3.22e-1)(-)	2.9963e-1(4.48e-2)(-)	5.7152e-1(7.53e-3)(-)	5.4178e-1(1.43e-3)(-)	5.3747e-1(4.54e-3)(-)	2.1461e-1(5.54e-3)
	2000	2.0156e+1(8.54e-1)(-)	5.6348e+0(3.17e-1)(-)	4.1463e-1(5.96e-2)(-)	5.6075e-1(5.46e-4)(-)	5.4095e-1(2.48e-5)(-)	5.3431e-1(3.35e-3)(-)	3.3554e-1(1.92e-3)
	3000	2.0269e+1(3.61e-1)(-)	6.2253e+0(4.84e-1)(-)	3.9741e-1(7.85e-2)(-)	5.4598e-1(5.40e-6)(-)	5.4094e-1(1.74e-6)(-)	5.3366e-1(3.46e-4)(-)	2.1370e-1(1.79e-3)
	5000	2.0537e+1(3.86e-1)(-)	6.1975e+0(9.72e-1)(-)	4.2758e-1(5.11e-2)(-)	5.6362e-1(5.47e-6)(-)	5.4098e-1(1.34e-5)(-)	5.3052e-1(3.02e-3)(-)	2.2419e-1(2.50e-3)
LSMOP6	200	4.9645e+3(9.24e+2)(-)	1.8083e+2(5.92e+1)(-)	7.5697e-1(1.22e-1)(-)	4.1083e+2(3.92e+1)(-)	6.7821e-1(2.54e-2)(-)	7.6536e-1(4.36e-2)(-)	5.6882e-1(1.91e-4)
	500	2.6064e+4(1.08e+4)(-)	3.5778e+3(1.37e+2)(-)	1.2868e+0(4.13e-6)(-)	1.5474e+3(3.37e+2)(-)	7.5929e-1(5.96e-2)(-)	7.6367e-1(5.55e-2)(-)	5.3027e-1(6.33e-4)
	1000	3.2366e+4(6.69e+3)(-)	3.6501e+3(2.15e+2)(-)	1.1099e+0(3.46e-1)(-)	3.7632e+3(4.15e-2)(-)	7.4979e-1(1.78e-2)(-)	7.6578e-1(3.74e-2)(-)	5.2405e-1(1.79e-4)
	2000	3.7070e+4(9.30e+3)(-)	4.6777e+3(1.49e+2)(-)	1.1958e+0(2.13e-1)(-)	3.9736e+3(4.44e-2)(-)	7.6239e-1(2.04e-2)(-)	7.4046e-1(3.16e-2)(-)	5.3010e-1(7.91e-4)
	3000	3.8600e+4(3.73e+3)(-)	4.2771e+3(1.50e+3)(-)	8.6556e-1(3.95e-1)(-)	4.5785e+3(6.54e+3)(-)	7.8187e-1(3.37e-2)(-)	7.2743e-1(4.03e-2)(-)	5.2323e-1(1.32e-4)
LSMOP7	5000	4.4924e+4(5.31e+3)(-)	3.4828e+3(2.48e+3)(-)	6.6268e-1(2.68e-2)(-)	5.4328e+3(3.45e+3)(-)	8.0943e-1(1.85e-2)(-)	7.2446e-1(4.43e-2)(-)	5.3708e-1(1.09e-4)
	200	1.9409e+2(2.03e+2)(-)	1.8786e+0(4.01e-2)(-)	9.2367e-1(5.31e-3)(-)	1.0686e+0(4.07e-2)(-)	9.9104e-1(3.19e-2)(-)	8.4637e-1(4.40e-5)(-)	3.7268e-1(2.88e-3)
	500	3.2840e+3(2.36e+3)(-)	1.2638e+0(5.42e-3)(-)	8.6541e-1(2.74e-3)(-)	1.0463e+0(7.75e-3)(-)	8.9081e-1(4.55e-3)(-)	8.4646e-1(3.14e-5)(-)	4.7704e-1(3.70e-3)
	1000	1.5506e+3(2.36e+3)(-)	1.0837e+0(5.12e-4)(-)	5.5667e-1(1.02e-2)(-)	1.0084e+0(5.64e-3)(-)	8.6254e-1(3.78e-3)(-)	8.3345e-1(3.51e-2)(-)	4.2091e-1(2.21e-3)
	2000	2.2750e+3(3.16e+3)(-)	1.0085e+0(4.51e-4)(-)	5.0332e-1(1.71e-3)(-)	9.8722e-1(2.15e-4)(-)	8.5085e-1(3.36e-4)(-)	8.4436e-1(6.13e-4)(-)	3.5722e-1(2.84e-3)
LSMOP8	3000	2.9709e+3(4.69e+2)(-)	9.8542e-1(3.33e-4)(-)	4.9293e-1(1.89e-3)(-)	9.9442e-1(5.38e-4)(-)	8.4503e-1(1.00e-3)(-)	8.3246e-1(4.64e-3)(-)	3.9734e-1(9.78e-3)
	5000	2.9718e+3(3.08e+3)(-)	9.6894e-1(8.48e-5)(-)	4.7763e-1(1.73e-3)(-)	9.4793e-1(7.75e-5)(-)	8.4215e-1(2.69e-5)(-)	8.2646e-1(5.05e-4)(-)	4.2100e-1(6.23e-3)
	200	7.5904e-1(1.66e-2)(-)	4.0709e-1(1.91e-1)(-)	1.7520e-1(7.89e-2)(-)	3.6376e-1(3.66e-2)(-)	3.6375e-1(7.09e-5)(-)	2.8464e-1(4.64e-3)(-)	3.5378e-2(7.73e-5)
	500	6.6325e-1(1.92e-4)(-)	9.6688e-1(4.96e-4)(-)	2.1050e-1(1.54e-1)(-)	3.5944e-1(1.74e-4)(-)	2.5631e-1(3.72e-3)(-)	2.8073e-2(7.05e-5)	
	1000	7.2147e-1(1.05e-1)(-)	9.5724e-1(1.77e-4)(-)	2.2689e-1(1.12e-1)(-)	3.6765e-1(4.91e-1)(-)	3.3458e-1(7.39e-3)(-)	2.5261e-1(5.16e-4)(-)	5.2603e-2(4.17e-7)
LSMOP9	2000	6.6002e-1(1.68e-2)(-)	9.5283e-1(2.66e-4)(-)	1.0372e-1(6.47e-3)(-)	3.6375e-1(7.09e-5)(-)	3.4000e-1(1.94e-2)(-)	2.3845e-1(3.15e-4)(-)	7.7657e-2(5.72e-5)
	3000	7.2424e-1(5.28e-2)(-)	9.5152e-1(5.95e-5)(-)	1.0391e-1(1.30e-2)(-)	4.0867e-1(1.99e-1)(-)	3.4491e-1(1.15e-2)(-)	2.4561e-1(1.70e-4)(-)	7.8076e-2(2.95e-5)
	5000	7.7775e-1(1.06e-1)(-)	9.5018e-1(8.71e-5)(-)	1.1100e-1(1.12e-2)(-)	4.4745e-1(9.26e-1)(-)	3.3655e-1(1.96e-3)(-)	2.3486e-1(4.15e-4)(-)	7.7604e-2(5.19e-7)
	200	2.2553e+1(1.26e+0)(-)	2.6763e+0(1.25e-1)(-)	1.5379e+0(5.03e-9)(-)	2.1435e+0(4.25e-1)(-)	1.5379e+0(0.00e+0)(-)	6.3463e-1(4.16e-2)(-)	6.2187e-1(1.43e-1)
	500	9.0692e+1(2.74e+0)(-)	2.6394e+1(6.64e-1)(-)	1.5379e+0(0.00e+0)(-)	3.13745e+0(5.19e-1)(-)	1.5379e+0(0.00e+0)(-)	6.0575e-1(5.67e-3)(-)	6.0167e-1(5.17e-2)
LSMOP9	1000	1.1890e+2(3.81e+0)(-)	2.7186e+1(6.45e-1)(-)	1.1449e+0(9.96e-4)(-)	4.6534e-1(1.49e-1)(-)	1.2759e+0(2.27e-1)(-)	5.8363e-1(8.85e-3)(+)	6.1849e-1(1.49e-1)
	2000	1.4068e+2(1.62e+0)(-)	3.2043e+1(3.54e-1)(-)	1.1440e+0(9.02e-4)(-)	7.4364e-1(7.84e-2)(-)	1.4068e+0(2.27e-1)(-)	5.8235e-1(4.64e-5)(+)	8.3167e-1(1.49e-1)
	3000	1.4791e+2(1.50e+0)(-)	3.2115e+1(1.61e+0)(-)	9.5715e-1(3.25e-1)(-)	1.0344e+0(4.15e+1)(-)	1.1446e+0(2.37e-4)(-)	5.8367e-1(8.75e-4)(+)	6.7169e-1(3.02e-2)
	5000	1.5186e+2(1.48e+0)(-)	3.1787e+1(5.92e-1)(-)	1.1468e+0(3.93e-3)(-)	1.1766e+0(7.18e-1)(-)	1.1815e+0(5.26e-2)(-)	5.8236e-1(3.46e-4)(+)	7.4183e-1(1.08e-1)

表 6 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFMSMPO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOF、LSMOEA-DS 和 LSMOEAEWE 在测试问题为 LSMOP1~LSMOP9 的 3 目标问题上获得的 HV 值统计结果(均值和标准差)(每个实例算法中的最好结果加粗突出显示)

测试问题	目标维度	MOEA/DVA	CCGDE3	WOFMSMPO	WOF-MMOPSO-RDG	LSMOF	LSMOEA-DS	LSMOEA-AWE
LSMOP1	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.1917e-1(3.39e-2) (-)	3.1953e-1(2.96e-3) (-)	4.1907e-1(2.15e-2) (-)	2.1916e-1(4.65e-3) (-)	9.9814e-2(3.96e-5)
	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.1496e-1(6.23e-2) (-)	3.9446e-1(2.46e-4) (-)	1.9395e-1(7.68e-3) (-)	2.3026e-1(8.25e-4) (-)	9.5330e-2(9.77e-5)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.1634e-1(2.25e-2) (-)	2.3363e-1(5.57e-3) (-)	1.3311e-1(1.39e-2) (-)	2.8663e-1(6.63e-3) (-)	6.5167e-1(2.43e-4)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.1524e-1(8.82e-3) (-)	3.0336e-1(2.78e-3) (-)	1.0278e-1(2.55e-3) (-)	2.7955e-1(4.09e-3) (-)	7.4725e-1(4.24e-5)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	5.8361e-1(7.93e-3) (-)	2.3793e-1(5.46e-4) (-)	9.9999e-2(3.41e-3) (-)	2.3215e-1(7.26e-4) (-)	8.2618e-1(5.33e-5)
LSMOP2	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	5.6042e-1(5.46e-2) (-)	2.0147e-1(2.47e-3) (-)	1.0060e-1(2.74e-3) (-)	2.5376e-1(3.83e-3) (-)	8.3685e-1(3.13e-5)
	200	7.0375e-1(9.08e-3) (-)	7.0476e-1(2.96e-3) (-)	7.4456e-1(3.25e-3) (-)	4.6135e-1(4.36e-4) (-)	6.9108e-1(3.94e-3) (-)	7.2557e-1(4.27e-3) (-)	8.1895e-1(4.13e-6)
	500	7.5983e-1(4.65e-3) (-)	7.8092e-1(2.58e-3) (-)	7.9712e-1(3.46e-3) (-)	5.7535e-1(2.36e-4) (-)	7.7483e-1(5.42e-3) (-)	7.9536e-1(4.83e-3) (-)	8.2662e-1(2.70e-6)
	1000	7.8010e-1(1.24e-2) (-)	8.0382e-1(1.41e-3) (-)	8.0283e-1(4.10e-3) (-)	7.4646e-1(8.76e-3) (-)	7.9556e-1(3.37e-3) (-)	8.1847e-1(4.83e-4) (-)	8.3825e-1(1.97e-4)
	2000	7.8872e-1(1.10e-2) (-)	8.1375e-1(2.21e-3) (-)	8.1464e-1(5.12e-3) (-)	8.0574e-1(7.84e-4) (-)	8.0502e-1(2.92e-3) (-)	8.2947e-1(3.83e-3) (-)	3.6169e-1(8.62e-5)
LSMOP3	3000	7.9086e-1(1.21e-2) (-)	8.2068e-1(1.56e-3) (-)	8.1259e-1(4.92e-3) (-)	8.1468e-1(3.06e-3) (-)	8.0954e-1(5.55e-3) (-)	8.3268e-1(4.73e-3) (-)	3.4475e-1(1.35e-6)
	5000	7.9684e-1(9.25e-3) (-)	8.2259e-1(8.84e-4) (-)	8.1607e-1(2.51e-3) (-)	7.9135e-1(7.33e-4) (-)	8.1117e-1(4.26e-3) (-)	8.3547e-1(4.79e-3) (-)	3.5475e-1(3.15e-6)
	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	3.5693e-1(4.45e-5)
	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0929e-2(2.75e-5) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	3.5433e-1(6.47e-5)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0921e-2(1.03e-5) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	6.9987e-2(5.75e-5)
LSMOP4	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0924e-2(1.36e-5) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.1985e-2(2.11e-4)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0928e-2(1.69e-5) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	1.0614e-1(4.66e-6)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0940e-2(2.31e-5) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	1.0817e-1(1.61e-6)
	200	4.5517e-1(1.20e-2) (-)	4.0409e-1(1.34e-2) (-)	5.5379e-1(1.76e-2) (-)	4.7657e-1(2.58e-3) (-)	4.8586e-1(4.58e-3) (-)	4.5479e-1(7.33e-4) (-)	1.0497e-1(7.61e-5)
	500	5.5983e-1(6.50e-3) (-)	6.0061e-1(1.01e-2) (-)	6.9302e-1(2.69e-2) (-)	6.5557e-1(2.68e-3) (-)	6.0460e-1(3.63e-3) (-)	6.3169e-1(6.26e-4) (-)	1.1759e-1(4.60e-4)
LSMOP5	1000	6.9079e-1(7.79e-3) (-)	7.0574e-1(2.88e-3) (-)	7.5984e-1(6.78e-3) (-)	7.2637e-1(15.68e-3) (-)	7.0557e-1(2.173e-3) (-)	7.3494e-1(5.37e-5) (-)	3.4793e-3(4.67e-4)
	2000	7.5360e-1(5.60e-3) (-)	7.6819e-1(2.13e-3) (-)	7.8633e-1(6.80e-3) (-)	6.6137e-1(6.47e-3) (-)	7.6092e-1(2.15e-3) (-)	7.8973e-1(4.95e-4) (-)	3.0161e-3(1.07e-4)
	3000	7.6337e-1(1.18e-2) (-)	7.8859e-1(5.62e-3) (-)	7.9859e-1(3.61e-3) (-)	7.8126e-1(2.08e-1) (-)	7.8107e-1(6.54e-3) (-)	8.0776e-1(7.47e-4) (-)	2.9971e-2(4.35e-4)
	5000	7.7674e-1(6.23e-3) (-)	8.0576e-1(3.54e-3) (-)	8.0750e-1(4.44e-3) (-)	8.0373e-1(15.54e-3) (-)	8.0000e-1(2.78e-3) (-)	8.2183e-1(4.33e-5) (-)	7.9167e-2(4.39e-5)
	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	2.9633e-1(5.60e-2) (-)	3.4635e-1(4.84e-7) (-)	3.4630e-1(1.76e-4) (-)	3.4684e-1(4.74e-8) (-)	8.8176e-2(6.79e-4)
LSMOP6	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	3.3212e-1(6.45e-3) (-)	3.4637e-1(3.34e-4) (-)	3.4624e-1(4.05e-4) (-)	3.4668e-1(3.43e-8) (-)	8.6877e-2(1.24e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	3.2718e-1(7.32e-3) (-)	3.4367e-1(4.74e-8) (-)	3.4020e-1(1.07e-2) (-)	3.4083e-1(4.54e-7) (-)	4.4965e-1(3.51e-4)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	2.8587e-1(9.26e-2) (-)	3.4669e-1(2.73e-8) (-)	3.4622e-1(7.87e-5) (-)	3.4664e-1(4.74e-8) (-)	4.8575e-1(2.68e-4)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	2.6393e-1(1.18e-1) (-)	3.4657e-1(2.62e-7) (-)	3.4633e-1(2.40e-4) (-)	3.4657e-1(4.04e-8) (-)	5.3375e-1(6.77e-4)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	3.3707e-1(1.15e-2) (-)	3.4647e-1(8.84e-8) (-)	3.4632e-1(9.16e-6) (-)	3.4653e-1(6.47e-8) (-)	5.1277e-1(3.14e-3)
LSMOP7	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.6852e-2(3.82e-2) (-)	1.3835e-2(2.52e-4) (-)	1.3797e-2(1.11e-2) (-)	1.3864e-2(5.60e-2) (-)	5.0197e-2(1.10e-4)
	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	5.6352e-3(3.43e-4) (-)	5.6264e-3(7.96e-3) (-)	5.6356e-3(7.37e-3) (-)	4.9198e-3(4.93e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	4.1393e-2(7.17e-2) (-)	1.1635e-2(3.04e-5) (-)	1.1574e-2(1.67e-3) (-)	1.1657e-2(5.26e-2) (-)	1.6143e-1(1.04e-3)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	2.7986e-2(4.85e-2) (-)	1.0246e-2(6.74e-4) (-)	1.0152e-2(1.16e-3) (-)	1.0246e-2(5.73e-2) (-)	1.7046e-1(3.08e-3)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	4.4175e-2(3.86e-2) (-)	1.0746e-2(6.54e-4) (-)	1.0682e-2(5.20e-4) (-)	1.0774e-2(5.66e-3) (-)	1.6453e-1(7.74e-3)
LSMOP8	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	5.6716e-2(2.16e-2) (-)	5.3846e-3(3.43e-4) (-)	5.3817e-3(7.35e-3) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.7433e-1(3.71e-3)
	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.7091e-1(2.77e-4)
	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.6119e-1(1.49e-3)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	3.0180e-2(4.07e-3) (+)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.9814e-2(3.96e-5)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.2254e-2(5.32e-4) (+)	2.7457e-2(2.65e-3) (-)	2.7436e-2(2.97e-4) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.5330e-2(9.77e-5)
LSMOP9	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	2.2056e-2(5.36e-4) (-)	1.0885e-1(1.26e-3) (+)	5.1425e-2(4.66e-4) (-)	5.1410e-2(3.95e-3) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	6.5167e-1(2.43e-4)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	4.2056e-2(1.45e-4) (-)	1.2855e-1(1.85e-3) (+)	6.5163e-2(5.36e-2) (-)	6.5058e-2(2.00e-4) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	7.4725e-1(4.24e-5)
	200	1.1113e-2(1.64e-3) (-)	1.2497e-1(9.79e-2) (-)	4.0595e-1(2.16e-2) (-)	3.6668e-1(2.36e-3) (-)	3.6621e-1(3.89e-4) (-)	2.6536e-1(5.37e-3) (-)	8.2618e-1(5.33e-5)
	500	4.7304e-2(3.95e-3) (-)	5.2901e-2(8.54e-4) (-)	4.2081e-1(3.72e-2) (-)	3.9052e-1(15.73e-3) (-)	3.8938e-1(1.26e-3) (-)	4.3027e-1(5.73e-3) (-)	8.3685e-1(3.13e-5)
	1000	3.3992e-2(2.81e-2) (-)	6.9880e-2(3.19e-4) (-)	4.1702e-1(3.43e-2) (-)	3.3863e-1(15.66e-3) (-)	3.2786e-1(1.81e-3) (-)	4.6464e-1(6.26e-4) (-)	8.1895e-1(4.13e-6)
LSMOP8	2000	6.6525e-2(28.33e-3) (-)	7.7923e-2(4.90e-4) (-)	4.4725e-1(9.68e-3) (-)	3.9862e-1(14.65e-4) (-)	2.9760e-1(8.88e-2) (-)	4.7516e-1(4.83e-3) (-)	8.2662e-1(2.70e-6)
	3000	4.4917e-2(2.62e-2) (-)	8.0339e-2(1.11e-4) (-)	4.4898e-1(1.92e-2) (-)	3.9773e-1(5.60e-3) (-)	2.9664e-1(9.07e-3) (-)	4.7762e-1(5.73e-3) (-)	3.8252e-1(1.97e-4)
	5000	1.5313e-2(28.06e-3) (-)	8.2840e-2(1.63e-4) (-)	4.3786e-1(1.75e-2) (-)	2.2646e-1(6.63e-3) (-)	2.4560e-1(2.81e-4) (-)	4.3985e-1(5.85e-3) (-)	3.6619e-1(8.62e-5)
	200	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(6.27e-9) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	1.9064e-1(6.37e-9) (+)
	500	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	9.0909e-2(0.00e+0) (-)	1.9065e-1(4.54e-9) (+)
LSMOP9	1000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.4756e-1(7.26e-5) (-)	1.3947e-1(3.16e-3) (-)	1.2870e-1(3.27e-2) (-)	1.9063e-1(3.66e-8) (+)	3.5693e-1(4.45e-5)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.4763e-1(3.28e-5) (-)	1.4648e-1(5.96e-3) (-)	1.0981e-1(3.27e-2) (-)	1.9064e-1(8.58e-9) (+)	3.5433e-1(6.47e-5)
	3000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.6218e-1(2.53e-2) (-)	1.5847e-1(7.26e-3) (-)	1.4763e-1(5.45e-6) (-)	1.9064e-1(6.94e-9) (+)	6.9987e-2(5.75e-5)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	0.0000e+0(0.00e+0) (-)	1.4634e-1(1.67e-3) (-)	1.4357e-1(7.69e-3) (-)	1.4249e-1(7.27e-3) (-)	1.9066e-1(8.94e-9) (+)	9.1985e-2(2.11e-4)
	+/-=	0/54/0	0/54/0	4/50/0	0/54/0	0/54/0	6/48/0	

为更直观展示 LSMOEAEWE 与各对比算法在处理 3 目标 LSMOP 问题时的性能表现, 图 7 列出了代表性问题 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 在 3 目标 1000 维测试实例上的 IGD 值变化曲线。从图中可以看出, 各算法的对比效果大致与 2 目标测试实例上所得结论相同。存在较大差异的是 LSMOEAEWE 在 3 目标 LSMOP9 测试实例上的性能, 相较于 2 目标时有所衰减。原因是该测试实例的 PF 不规则, 中间存在很多断裂带, 当目标数为 3 时 PF 断裂带的数目相较于目标数为 2 时会大大增加, 导致 LSMOEAEWE 基于均匀参考向量的环

境选择会遗漏掉一些有效的解, 从而在性能上有所下降。

为进一步展示 LSMOEAEWE 与各对比算法在处理 3 目标 LSMOP 问题时在目标空间的表现, 图 8 列出了代表性问题 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 在 3 目标 1000 维测试实例上各算法运行结果与真实 PF 的对比图, 并通过局部放大对细节进行展示。从图中可以看出, 各算法的对比效果同样大致与 2 目标测试实例上所得结论相同。存在较大差异的依然是 LSMOEAEWE 在 3 目标 LSMOP9 测试实例上的性能相较于 2 目标时有所衰减, 原因

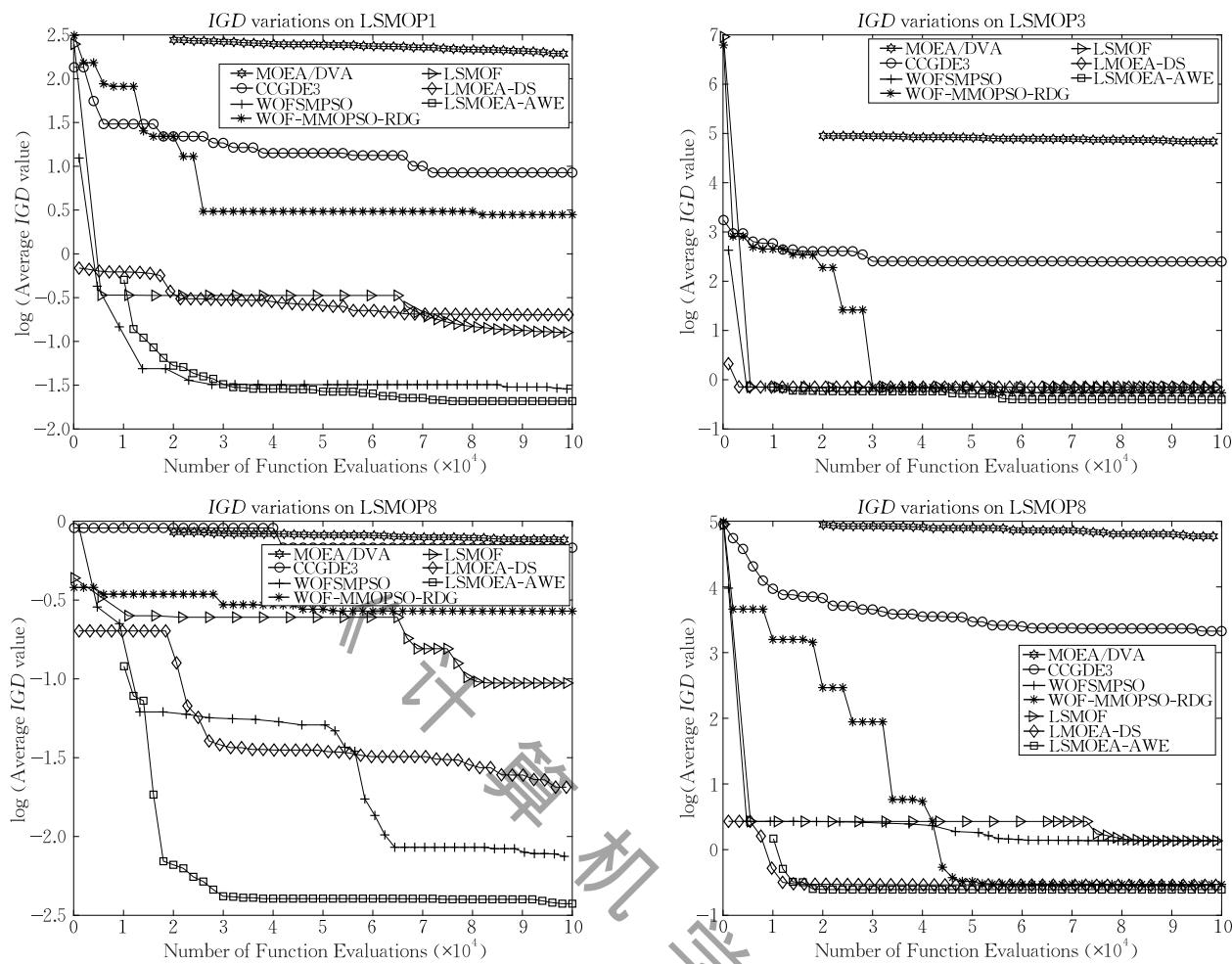


图 7 在 3 目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 测试实例上进行 30 次独立运行, MOEA/DVA、CCGDE3、WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOPF、LMOEA-DS 和 LSMOEAE-AWE 的平均 IGD 值曲线

亦同样在于该测试实例的 PF 不规则, 中间存在很多断裂带。

(3) 全部测试实例上各算法整体性能的对比

为直观展示各算法在全部 108 个 2 目标和 3 目标 LSMOP 测试实例上的整体性能, 采用 θ -DEA^[48] 中提出的平均得分计算方法, 依次在 LSMOP1 ~ LSMOP9 上对所有算法进行打分, 分数越小表示算法的性能越好。图 9 给出了各算法在 LSMOP1 ~ LSMOP9 上的得分, 可以看出 LSMOEAE-AWE 在整体性能上具有明显的竞争优势。

(4) 各算法时间复杂度与运行时间对比

LSMOEAE-AWE 在每轮迭代的时间复杂度由基于问题转换的子代生成环节决定, 为 $O(knN)$, 其 k 为当前权值向量的维度, n 为原决策空间的维度, N 为种群中个体的数目。对比算法 WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG 和 LSMOPF 亦为基于问题转换类的方法, 由于子代生成方式总体类似, 它们的时间复杂度与 LSMOEAE-AWE 处于同一量级, 前两者

为 $O(knN)$, 后者为 $O(rnN)$, 其中 r 表示参考点的数目。MOEA/DVA 的时间复杂度由决策变量关联度分析环节决定, 为 $O(n^2)$ 。CCGDE3 和 LMOEA-DS 的时间复杂度由基于非支配排序的环境选择决定, 为 $O(mN^2)$ 。对于 LSMOPs, n 通常大于 kN 但小于 mN^2 , 故可认为各基于问题转换类算法的时间复杂度介于 CCGDE3/LMOEA-DS 与 MOEA/DVA 之间。

为直观展示各算法在全部 108 个 2 目标和 3 目标 LSMOP 测试实例上的运行时间, 采用 θ -DEA^[48] 中提出的平均得分计算方法, 依次在 LSMOP1 ~ LSMOP9 上对所有算法进行打分, 分数越小表示算法的运行时间越短。由图 10 可以看出, 各问题转换类算法的平均运行时间得分介于 MOEA/DVA 和 CCGDE3/LMOEA-DS 之间, 与上述时间复杂度的理论分析印证。同时, 虽然 LSMOEAE-AWE 的初始权值向量维度仅为 2, 但在运行过程中会自适应扩展权值向量的维度, 故其在各测试实例上的运行时间得分与其它问题转换类算法相比有大有小。

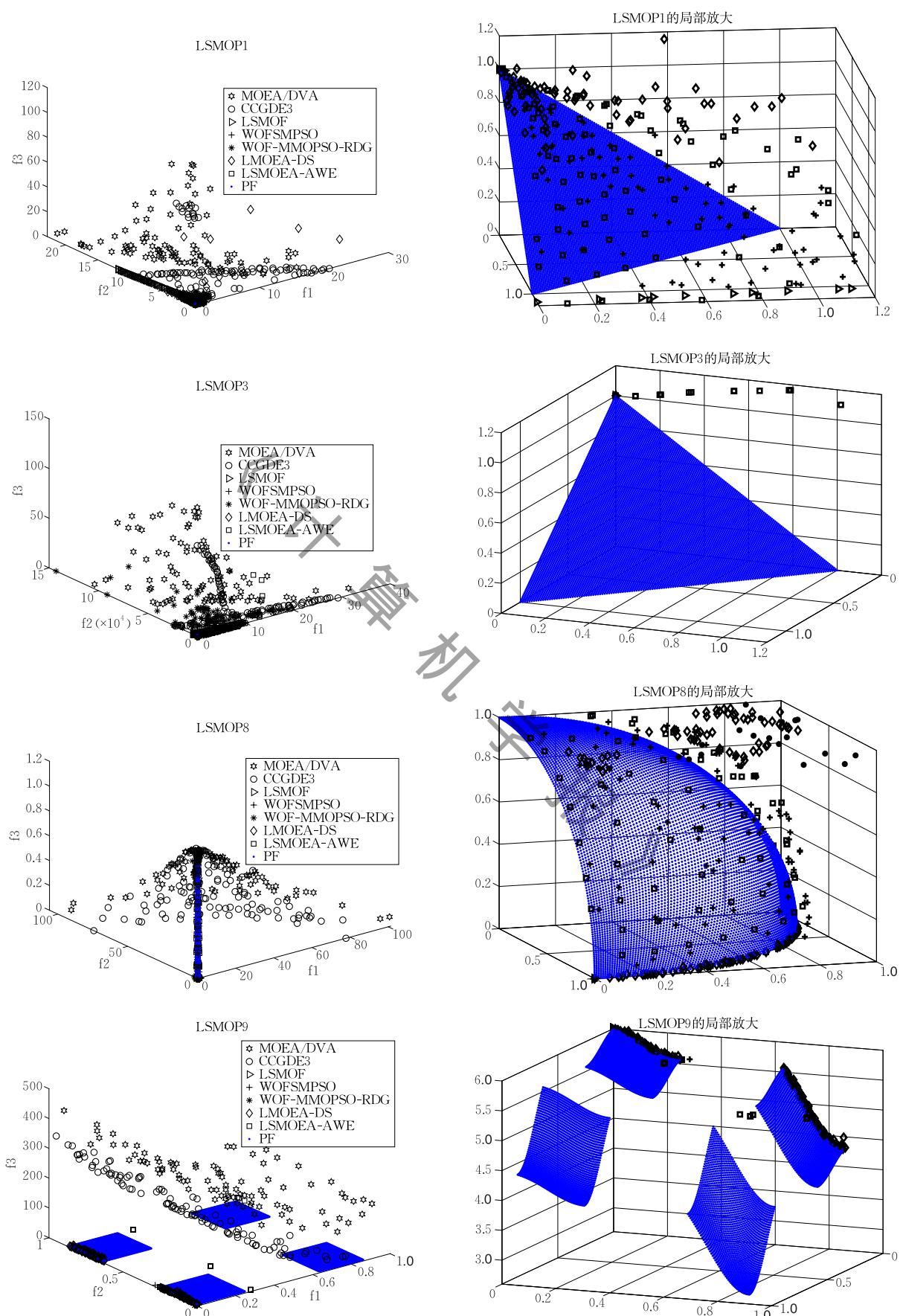


图 8 在 3 目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP3、LSMOP8 和 LSMOP9 测试实例上 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LMOEA-DS 和 LMOEA-AWE 的帕累托前沿对比图

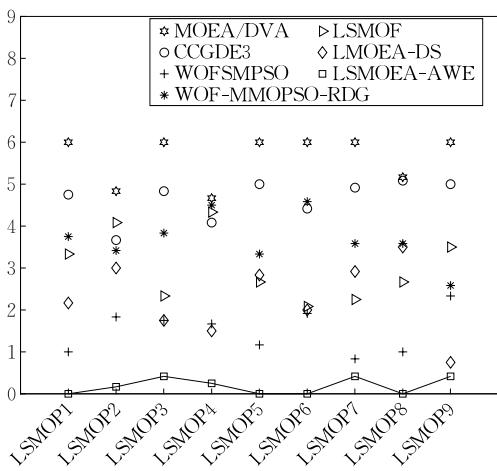


图 9 MOEA/DVA、CCGDE3、WOFMSMPSO、WOF-MMOPSO-RDG、LSMOF、LMOEA-DS 和 LSMOEAE-AWE 在 LSMOP1~LSMOP9 上的平均 IGD 得分, 得分越小表现越好

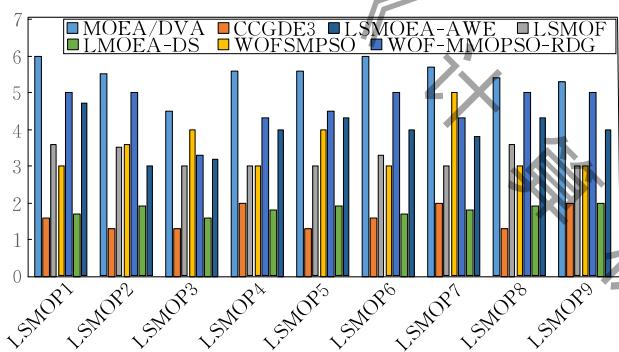


图 10 各算法在 LSMOP1~LSMOP9 上的平均运行时间得分

4.5 对 LSMOEAE-AWE 的深入分析

本部分通过策略独立性分析和参数敏感度实验对 LSMOEAE-AWE 进行深入分析。本小节从策略独立性和参数敏感性两个方面,进一步深入分析 LSMOEAE-AWE。

(1) 策略独立性实验

LSMOEAE-AWE 包括存档和权值扩展两个核心策略,为独立验证这两个策略对算法性能的影响,设计 3 个不同的对比算法,分别命名为 LSMOEAE、LSMOEAE-A 和 LSMOEAE-WE,在目标数为 2、决策变量数为 1000 的 9 个 LSMOP 测试实例上进行实验。其中,LSMOEAE 中不采用本文提出的存档策略和权值扩展策略,仅使用最基础的问题转换框架,LSMOEAE-A 为使用问题转框架和存档策略的算法,LSMOEAE-WE 为使用问题转框架和权值扩展策略的算法。此外,LSMOEAE 和 LSMOEAE-A 采用线性分组策略将决策变量分为固定的 4 组,每个个体对应一个 4 维权值向量。在 2 目标 1000 维 LSMOP 测试实例上进行 30 次独立运行,LSMOEAE、LSMOEAE-A、

LSMOEAE-WE 和 LSMOEAE-WE 的平均 IGD 值曲线如图 11 所示。

从图 11 可以看出,LSMOEAE-A 和 LSMOEAE-WE 在 9 个测试实例上的表现均优于 LMOEA,说明存档策略和权值扩展策略对算法的性能均具有提升作用。与此同时,LSMOEAE-A 相对 LSMOEAE-WE 表现更好,原因是 LSMOEAE-WE 虽然可通过权值扩展扩大在决策空间中的搜索范围,但由于前期的搜索可能会陷入局部最优,导致其性能在部分问题上与 LSMOEAE 接近。而 LSMOEAE-A 在每轮迭代过程中对存档进行及时更新,可为种群的进化持续提供有效的指导方向,有利于种群质量的不断提升,从而在大部分测试实例上的性能相较 LSMOEAE-WE 更优。LSMOEAE-AWE 的表现明显优于 3 个对比算法,说明存档策略与权值扩展策略具有很强的互补性。

(2) 参数敏感性实验

LSMOEAE-AWE 包括两个独有的参数,分别为用于控制存档种群大小的 λ 和用于控制权值扩展的阈值 β 。同样在目标数为 2、决策变量数为 1000 的 9 个 LSMOP 测试实例上,就这两个参数的取值对 LSMOEAE-AWE 性能的影响程度进行实验。

首先,在 LSMOEAE-AWE 中将 λ 的取值分别设置为 2、3、4、5、7、10、15。在 2 目标 1000 维 LSMOP 测试实例上进行 30 次独立运行的平均 IGD 值曲线如图 12 所示,可以看出 λ 总体上为非敏感参数。由于存档种群的大小对算法运行时间有一定影响,综合考虑不同 λ 取值对各测试实例 IGD 值的影响,4.4 节的实验中将 λ 的值设为 5。

其次,在 LSMOEAE-AWE 中将 β 的取值分别设置为 1、3、5、8、10、12、15、20。同样在 2 目标 1000 维 LSMOP 测试实例上进行 30 次独立运行,它们的平均 IGD 值曲线如图 13 所示。可以看出, β 的取值在除 LSMOP6 以外的其它测试实例上基本不敏感,但当 β 的取值小于 8 时,在 LSMOP1、LSMOP5、LSMOP8 问题上明显较敏感。原因在于 LSMOP1 和 LSMOP5 均为 Sphere 函数组成的单模问题且变量之间不存在关联关系,当权值扩展阈值较低时,容易导致问题的搜索空间快速增大。LSMOP8 尽管是混合问题,然而组成问题的函数仍然包括 Sphere 函数,同样对于 β 的取值较敏感。为确保算法在各类测试问题上均具有较好的综合性能,4.4 节的实验中将 β 的值设为 10。

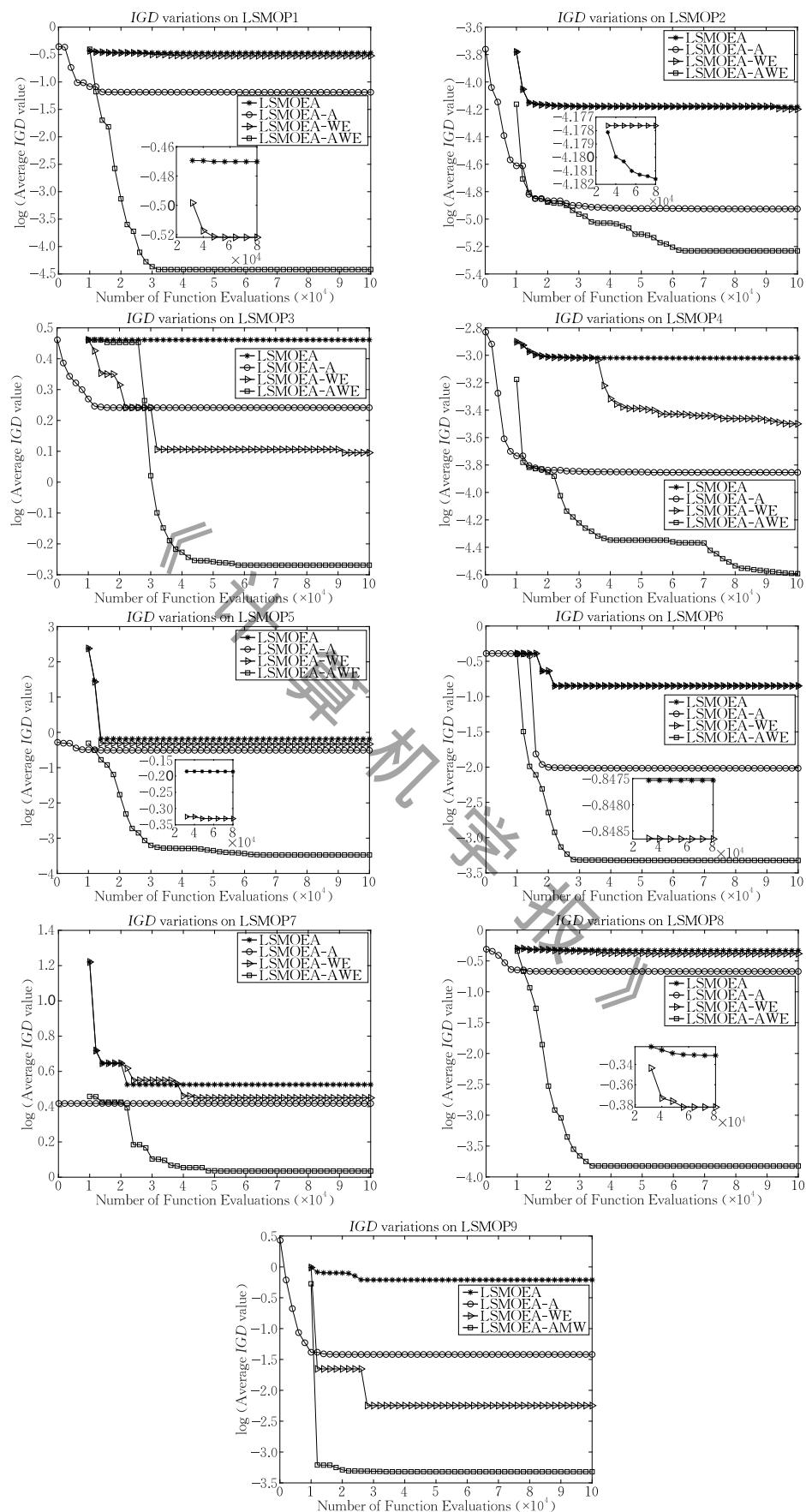
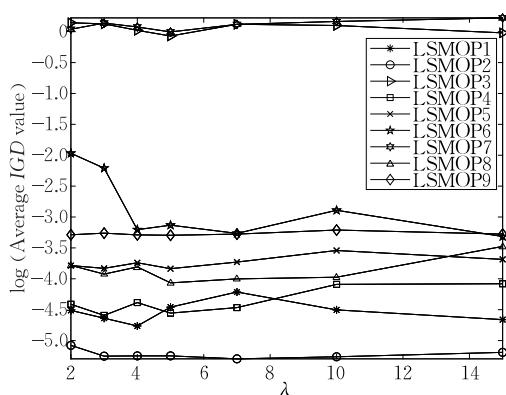
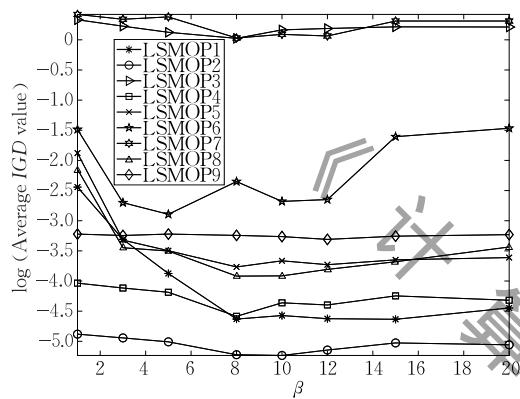


图 11 在 2 目标 1000 维 LSMOP 测试实例上进行 30 次独立运行, LSMOEAs, LSMOEAs-A, LSMOEAs-WE 和 LSMOEAs-AWE 的平均 IGD 值曲线

图 12 参数 λ 的敏感性实验结果图 13 参数 β 的敏感性实验结果

5 结论和未来工作

针对现有大规模多目标优化算法的不足,本文提出了一个基于存档与权值扩展策略的算法 LSMOEA-AWE。其中,存档策略通过选取代表性的高质量解及其对立点构建存档,可有效引导种群向靠近 PS 的方向移动,提高算法的搜索效率。权值扩展策略则通过对处于进化瓶颈的个体所对应权值向量进行动态自适应扩展,不断扩大决策空间的搜索范围,从根本上解决了现有问题转换方法存在的搜索空间受限问题,有利于提高最终的搜索质量。在最新大规模多目标基准测试问题集 LSMOP 上的实验表明,相比同类算法,LSMOEA-AWE 在综合性能上具有明显的竞争优势。

未来工作中,如何在各类带约束 LSMOPs 和各类实际应用 LSMOPs 上进一步验证和改进 LSMOEA-AWE 的性能,具有重要的研究价值。此外,基于任务间的知识迁移,多任务优化在优化速度和优化性能方面均具有较大的优势^[49-50],如何将多任务优化与大规模多目标优化有机融合,是未来非常值得探索的工作。

本文所提算法的源代码已在 <https://github.com/CIA-SZU/LC> 公开。

参 考 文 献

- [1] Wu P P, Campbell D, Merz T. Multi-objective four-dimensional vehicle motion planning in large dynamic environments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2011, 41(3): 621-634
- [2] Kong Wei-Jian, Chai Tian-You, Ding Jin-Liang, Wu Zhi-Wei. A real-time multiobjective electric energy allocation optimization approach for the smelting process of magnesia. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(1): 51-61(in Chinese)
(孔维健, 柴天佑, 丁进良, 吴志伟. 镁砂熔炼过程全厂电能分配实时多目标优化方法研究. 自动化学报, 2014, 40(1): 51-61)
- [3] Lin Chuang, Chen Ying, Huang Ji-Wei, Xiang Xu-Dong. A survey on models and solutions of multi-objective optimization for QoS in services computing. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(10): 1907-1923(in Chinese)
(林闯, 陈莹, 黄霁崴, 向旭东. 服务计算中服务质量的多目标优化模型与求解研究. 计算机学报, 2015, 38(10): 1907-1923)
- [4] Yuan You-Wei, Bao Ze-Qian, Yu Dong-Jin, Li Wan-Qing. Multi-scientific workflow scheduling algorithm based on multi-objective in cloud environment. *Journal of Software*, 2018, 29(11): 3326-3339(in Chinese)
(袁友伟, 鲍泽前, 俞东进, 李万清. 云环境下基于多目标的多科学工作流调度算法. 软件学报, 2018, 29(11): 3326-3339)
- [5] Lu Z, Whalen I, Dhebar Y, et al. Multi-objective evolutionary design of deep convolutional neural networks for image classification. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, doi: 10.1109/TEVC.2020.3024708
- [6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197
- [7] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731
- [8] Zhou A, Qu B, Li H, et al. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, 1(1): 32-49
- [9] Ponsich A, Jaimes A L, Coello C A C. A survey on multi-objective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 17(3): 321-344
- [10] Wang Li-Ping, Feng Mei-Ling, Qiu Qi-Cang, et al. Survey on preference-based multi-objective evolutionary algorithms. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(6): 1289-1315(in Chinese)

- (王丽萍, 丰美玲, 邱启仓等. 偏好多目标进化算法研究综述. *计算机学报*, 2019, 42(6): 1289-1315)
- [11] Fan Tian-Tian, Xu Lei, Chen Lin. Recommending similar bug reports based on multi-targets optimization algorithm NSGA-II. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(10): 2175-2189(in Chinese)
- (樊田田, 许蕾, 陈林. 基于多目标优化算法 NSGA-II 推荐相似缺陷报告. *计算机学报*, 2019, 42(10): 2175-2189)
- [12] Cooper I M, John M P, Lewis R, et al. Optimising large scale public transport network design problems using mixed-mode parallel multi-objective evolutionary algorithms// Proceedings of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Beijing, China, 2014: 2841-2848
- [13] Qu B Y, Zhou Q, Xiao J M, et al. Large-scale portfolio optimization using multiobjective evolutionary algorithms and preselection methods. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 1: 1-14
- [14] Deb K, Myburgh C. A population-based fast algorithm for a billion-dimensional resource allocation problem with integer variables. *European Journal of Operational Research*, 2017, 261(2): 460-474
- [15] Parsons L. Subspace clustering for high dimensional data: A review. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2004, 6(1): 90-105
- [16] Ma X, Liu F, Qi Y, et al. A multiobjective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multiobjective optimization problems with large-scale variables. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 275-298
- [17] Zhang X, Tian Y, Cheng R, Jin Y. A decision variable clustering-based evolutionary algorithm for large-scale many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(99): 97-112
- [18] Antonio L M, Coello C A C. Use of cooperative coevolution for solving large scale multiobjective optimization problems// Proceedings of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun, Mexico, 2013: 2758-2765
- [19] Antonio L M, Coello C A C. Decomposition-based approach for solving large scale multi-objective problems//Proceedings of the 14th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Edinburgh, UK, 2016; 525-534
- [20] Zille H, Ishibuchi H, Mostaghim S, Nojima Y. A framework for large-scale multiobjective optimization based on problem transformation. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(2): 260-275
- [21] He C, Li L, Tian Y, et al. Accelerating large-scale multi-objective optimization via problem reformulation. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(6): 949-961
- [22] Tian Y, Zheng X, Zhang X, Jin Y. Efficient large-scale multiobjective optimization based on a competitive swarm optimizer. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(8): 3696-3708
- [23] He C, Cheng R, Yazdani D. Adaptive offspring generation for evolutionary large-scale multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020: 1-13
- [24] Chen H, Cheng R, Wen J, et al. Solving large-scale many-objective optimization problems by covariance matrix adaptation evolution strategy with scalable small subpopulations. *Information Sciences*, 2020, 509: 457-469
- [25] Ma L, Huang M, Yang S, et al. An adaptive localized decision variable analysis approach to large-scale multiobjective and many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, doi: 10.1109/TCYB.2020.3041212
- [26] Omidvar M N, Li X, Yang Z, Yao X. Cooperative co-evolution for large scale optimization through more frequent random grouping//Proceedings of the 2010 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Barcelona, Spain, 2010: 1-8
- [27] Aelst S V, Wang X, Zamar R H, Zhu R. Linear grouping using orthogonal regression. *Computational Statistics Data Analysis*, 2006, 50(5): 1287-1312
- [28] Chen W, Weise T, Yang Z, Tang K. Large-scale global optimization using cooperative coevolution with variable interaction learning//Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Kraków, Poland, 2010: 300-309
- [29] Omidvar M N, Li X, Mei Y, Yao X. Cooperative co-evolution with differential grouping for large scale optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(3): 378-393
- [30] Omidvar M N, Yang M, Mei Y, et al. DG2: A faster and more accurate differential grouping for large-scale black-box optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 21(6): 929-942
- [31] Sun Y, Kirley M, Halgamuge S K. A recursive decomposition method for large scale continuous optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(6): 647-661
- [32] Sun Y, Li X, Ernst A T, Omidvar M N. Decomposition for large-scale optimization problems with overlapping components //Proceedings of the 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Wellington, New Zealand, 2019: 326-333
- [33] Kukkonen S, Lampinen J. GDE3: The third evolution step of generalized differential evolution//Proceedings of the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Edinburgh, UK, 2005: 443-450

- [34] Li M, Wei J. A cooperative co-evolutionary algorithm for large-scale multi-objective optimization problems//Proceedings of the 2018 Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. Kyoto, Japan, 2018: 1716-1721
- [35] Liu R, Liu J, Li Y, Liu J. A random dynamic grouping based weight optimization framework for large-scale multi-objective optimization problems. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 55: 1-10
- [36] Lin Q, Li J, Du Z, et al. A novel multi-objective particle swarm optimization with multiple search strategies. *European Journal of Operational Research*, 2015, 247(3): 732-744
- [37] Wang Q, Zhang L, Wei S, Li B. Tensor decomposition-based alternate sub-population evolution for large-scale many-objective optimization. *Information Sciences*, 2021: 376-399
- [38] Tian Y, Zhang X, Wang C, Jin Y. An evolutionary algorithm for large-scale sparse multiobjective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(2): 380-393
- [39] Qin S, Sun C, Jin Y, et al. Large-scale evolutionary multi-objective optimization assisted by directed sampling. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, doi: 10.1109/TEVC.2021.3063606
- [40] Storn R, Price K. Differential evolution—A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4): 341-359
- [41] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601
- [42] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, Sendhoff B. Test problems for large-scale multi-objective and many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4108-4121
- [43] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. Balancing convergence and diversity in decomposition-based many-objective optimizers. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 180-198
- [44] Tian Y, Cheng R, Zhang X, Jin Y. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87
- [45] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271
- [46] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117-132
- [47] Wilcoxon F. Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1945, 1(6): 80-83
- [48] Yuan Y, Xu H, Wang B, Yao X. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(1): 16-37
- [49] Gupta A, Ong Y S, Feng L. Multifactorial evolution: Towards evolutionary multitasking. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(3): 343-357
- [50] Liang Z, Dong H, Liu C, et al. Evolutionary multitasking for multiobjective optimization with subspace alignment and adaptive differential evolution. *IEEE Transactions on Cybernetics*, doi: 10.1109/TCYB.2020.2980888



LIANG Zheng-Ping, Ph. D., associate professor. His research interests include computational intelligence and big data analysis.

LIU Cheng, graduate student. His research interest is intelligent optimization.

WANG Zhi-Qiang, professor. His research interests include computational intelligence and multimedia technology.

MING Zhong, Ph. D., professor. His research interests include artificial intelligence and big data analysis.

ZHU Ze-Xuan, Ph. D., professor. His research interests include computational intelligence and bioinformatics.

Background

Large-scale multi-objective optimization problems (LSMOPs) with thousands of decision variables are ubiquitous in real-world applications. Due to the conflict between different objectives and the huge search space, the performance of the

existing large-scale multi-objective optimization algorithms still has a large room for improvement. Population based large-scale multi-objective evolutionary algorithms (LSMOEAs) are the most widely used methods to solve LSMOPs. The

existing LSMOEAs can be roughly divided into three categories, i.e., divide-and-conquer methods, cooperative coevolution methods, and problem transformation methods. The first group of methods is implemented through decision variable classification, which can reduce the scale of the problem to a certain extent. Nevertheless, the sub-problems decomposed may still be large-scale as the number of classified variable groups usually is not big enough. The cooperative coevolution methods tend to be computationally expensive due to their iterative optimization nature especially on correlation sub-problems. The problem transformation methods assign a single weight to multiple decision variables, which limits the corresponding search scope in the original decision space and makes it difficult to guarantee the quality of the final solution. To improve the performance of LSMOEAs, this paper proposes a new LSMOEA based on archive and weight extension

(LSMOEA-AWE) to balance the search efficiency and quality. The comparison study of LSMOEA-AWE and other six state-of-the-art algorithms on the latest benchmark LSMOPs shows that LSMOEA-AWE is very competitive in solving LSMOPs.

Our research team has been working in the field of intelligent optimization for more than ten years, and has published a series of algorithms in the top-ranked journals, such as IEEE TEVC and IEEE TCYB, on multi-objective optimization, dynamic optimization, multi-task optimization, etc. The paper is partly supported by the National Key Research and Development Program of China (2021YFB2900800), the National Natural Science Foundation of China (61871272), and the National Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (2020A1515010479, 2021A1515011911), and the Science and Technology Program of Shenzhen, China (GGFW2018020518310863, 20200811181752003).

