

# 开放量子行走: 概率分布与中心极限定理

林运国<sup>1,2)</sup> 李永明<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(陕西师范大学计算机科学学院 西安 710119)

<sup>2)</sup>(福建农林大学计算机与信息学院 福州 350002)

**摘 要** 作为量子算法研究的一个基本工具,量子行走已经成为一个重要研究课题.在开放量子环境下,同质量子行走已经得到充分研究,包括其概率分布和中心极限定理.然而,对于高维格上且在异质环境下的开放量子行走的演化方程、概率分布和中心极限定理还未得到研究.在此基础上,该文提出高维格上异质开放量子行走以及它的演化方程,重点研究高维格上具有不同类型的量子运算的开放量子行走的概率分布和中心极限定理.首先给出高维格上量子系统的演化表达式,它不但适合于同质开放量子行走,也适合于异质开放量子行走.与已有的演化表达式相比,该结果更具有一般性.其次,利用傅里叶变换和逆变换给出开放量子行走的概率分布的计算公式,研究其对同质开放量子行走和异质开放量子行走的适用性.通过例子说明一维格上、二维格上异质开放量子行走的概率分布计算.最后,运用鞅差分序列中心极限定理,给出并证明高维格上异质开放量子行走的中心极限定理,说明一维格上同质开放量子行走的中心极限定理是它的一种特殊情况,并通过二维格上异质开放量子行走的实例给出求解极限分布的具体过程.

**关键词** 量子行走;开放量子系统;概率分布;中心极限定理;量子计算  
**中图法分类号** TP301 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2016.02446

## Open Quantum Walk: Probability Distribution and Central Limit Theorem

LIN Yun-Guo<sup>1,2)</sup> LI Yong-Ming<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(College of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119)

<sup>2)</sup>(College of Computer and Information Sciences, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002)

**Abstract** As a basic tool for researching quantum algorithms, quantum walk has been an important aspect of the quantum computation. In an open quantum environment, homogenous quantum walk has all been studied, including its limit probability distribution and its central limit theorem. However, the evolution formula, the probability distribution and the central limit theorem have not been studied about open quantum walk with higher dimensional lattices and non-homogenous environment. Based on these works, we propose an open quantum walk on higher dimensional lattices and give its evolution formula, especially for one under non-homogenous environment, focus on its probability distribution and their central limit theorem with a different type of quantum operators. Firstly, we give an evolution formula of open quantum walk on higher dimensional lattices, show that it not only adapts to homogenous quantum walk, but also adapts to non-homogenous quantum walk. Compared with the existing evolution formulas, this result is more general. Secondly, by using the fourier transform and the fourier inverse transform, we give a computational formula for the probability distribution of open quantum walk, study its applicability for homogenous quantum walk and non-homogenous quantum walk. To present by

examples, we show a computational process about their probability distributions of non-homogenous quantum walks on 1-dimensional lattice and 2-dimensional lattice. Finally, according to the central theorem for martingale difference sequence, we prove a central limit theorem for non-homogenous open quantum walk on higher dimensional lattices under certain condition, show that a central limit theorem is its special case about a one-dimensional lattice homogenous open quantum walk, illustrate a specific process of calculating the limit distribution.

**Keywords** quantum walk; open quantum system; probability distribution; central limit theorem; quantum computation

## 1 引言

当前,量子计算得到了极大关注,已经成为科学研究的前沿和热点.1982年,Feynman<sup>[1]</sup>首次提出量子计算这一概念,主要出发点是利用它模拟量子力学;1985年,Deutsch<sup>[2]</sup>提出量子图灵机.这两项研究是量子计算理论的起源工作.为了验证量子计算思想以及揭示物理与计算之间的联系,学者们提出不少量子基本计算工具,比如量子傅里叶变换、量子黑盒加速、量子行走;同时利用这些工具开发出量子算法,比如 Shor 大数质因子分解算法、Grover 量子搜索算法等<sup>[3]</sup>.这些计算工具和算法的提出有力证明了量子计算具有经典计算无法比拟的高效性能<sup>[4]</sup>.

作为一个数学模型,经典随机游走已经成功应用到物理学、经济学、生物学等领域<sup>[5-8]</sup>;特别在计算机科学领域,它已经被广泛应用于算法研究<sup>[9]</sup>.在量子计算中,也有一个类似的数学模型:量子行走,它最早由 Aharonov 等人<sup>[10]</sup>提出并开展这方面研究.由此开始,量子行走逐渐得到了国内外学者广泛而深入的研究,是目前量子计算研究领域中的一个热点<sup>[11-17]</sup><sup>①</sup>.量子行走作为经典随机游走在量子情形下的扩展,同样它在算法设计上也具有广泛的应用<sup>[18]</sup>.例如,基于量子行走的搜索算法、元素区分算法、三角形问题等<sup>[18-20]</sup>.

近年来,学者们重点关注了在开放量子环境下的量子行走,简称开放量子行走<sup>[21-26]</sup><sup>②</sup>.它最早由 Attal 等人<sup>[22]</sup>在 2012 年提出,其核心问题是如何在开放量子环境下将格上的马尔可夫链在量子意义下进行推广,并利用量子轨迹(Quantum trajectory)来模拟开放量子行走的演化过程以及分析与(封闭)量子行走(比如 Hadamard 量子行走)的区别和联系.2013 年,Konno 等人<sup>[27]</sup>针对一维格上开放量子行走,给出它的极限概率分布,并利用双过程(Dual process)

模型提出计算极限概率分布的方法.2014 年,Attal 等人<sup>[28]</sup>研究高维格上最近邻域同质(Homogenous)开放量子行走,并证明了它的中心极限定理.在此基础上,Sadowski 等人<sup>③</sup>在高维格上,分析具有多类型状态点的网络图,针对点可归约以及点服从随机均匀分布的两种开放量子行走,提出并证明它们的中心极限定理.同时,Carbone 等人<sup>[29]</sup>也研究格上同质开放量子行走,给出它们的可归约性、周期性和遍历性,并针对转移状态不变性的一类开放量子行走,提出中心极限定理和位置演化过程的大偏差原理<sup>[30]</sup>.

在前期研究工作中,学者们主要研究同质格上开放量子行走的极限概率分布,而对于高维格上具有不同类型的量子运算(异质,Non-homogenous)的开放量子行走的概率分布和中心极限定理还未得到充分研究.因此,在上述文献基础上,我们想进一步了解:如何刻画高维格上(异质)开放量子行走?是否可以利用双过程模型或者更恰当的计算工具给出高维格上开放量子行走的概率分布的计算公式?是否可以在一定条件下给出高维格上开放量子行走的中心极限定理以及相应的证明.这 3 个问题正是本文所研究的主要内容.我们将在文中给出高维格上的开放量子行走的相关定义、构造方法和演化方程,将得到更一般的概率分布和中心极限定理.

第 2 节,给出文中符号规定和基本定义.

第 3 节,首先引入高维格上(异质)开放量子行走,其次重点给出该类系统的简洁演化方程,最后比较分析相关工作.

第 4 节,在第 3 节演化方程的基础上,运用傅里叶变换和逆变换,给出计算高维格上开放量子行走的概率分布的公式,表明它适合于同质开放量子系

① Sarkar D, Paul N. An effective hamiltonian approach to quantum random walk. arXiv:quant-ph/1505.01435v2, 2015

② Liu Chao-Bin. From open quantum walks to unitary quantum walks. arXiv:quant-ph/1502.01680v1, 2015

③ Sadowski P, Pawela L. Central limit theorem for reducible and irreducible open quantum walks. arXiv:quant-ph/1412.5086, 2014

统也适合于异质开放量子系统,并用实例解释说明.

第 5 节,作为本文的一个主要研究内容,首先利用鞍差序列中心极限定理,给出并证明高维格上开放量子行走的中心极限定理;其次分析说明一维同质开放量子行走是该定理的一种特殊情况;最后通过实例说明求解异质开放量子行走的极限概率分布的具体过程.

## 2 基本概念与符号规定

设  $\mathcal{H}$  是一个由有穷量子比特所构成的有限维 Hilbert 空间;  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  表示  $\mathcal{H}$  上的有界线性算子集合;  $D(\mathcal{H})$  是 Hilbert 空间上所有正定且迹为 1 (称为密度算子) 的集合,即  $\forall \rho \in D(\mathcal{H})$ , 有  $\rho \geq 0$  且  $\text{tr}(\rho) = 1$ ; 如果  $\forall \rho \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ , 有  $\rho \geq 0$ ,  $\text{tr}(\rho) \leq 1$ , 则称  $\rho$  是一个部分密度算子,所有部分密度算子记为  $D^-(\mathcal{H})$ .  $D(\mathcal{H}), D^-(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ .

**定义 1**<sup>[31]</sup>. 给定两个有限维 Hilbert 空间  $\mathcal{H}'$  和  $\mathcal{H}''$ ,  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$  和  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}'')$  是两个有界线性算子集,  $\mathcal{M}$  是从  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$  到  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}'')$  一个超算子:

$$\mathcal{M}: \mathfrak{B}(\mathcal{H}') \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}'').$$

**定义 2**<sup>[31]</sup>. 如果超算子  $\mathcal{M}$  满足保迹和完全正定性,则称  $\mathcal{M}$  是从  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$  到  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}'')$  一个量子运算,也称为量子信道.

一个量子运算  $\mathcal{M}$  具有 Kraus 算子和表示,即  $\forall A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ , 有

$$\mathcal{M}(A) = \sum_i K_i A K_i^\dagger,$$

其中  $\sum_i K_i^\dagger K_i = I$ .

**定义 3**<sup>[31]</sup>. 设  $\mathcal{M}$  和  $\mathcal{M}^\dagger$  是作用在  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  上两个超算子,如果对于任意的  $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$  和  $\rho \in D(\mathcal{H})$ , 有

$$\text{tr}(A \mathcal{M}(\rho)) = \text{tr}(\mathcal{M}^\dagger(A) \rho),$$

则称  $\mathcal{M}$  和  $\mathcal{M}^\dagger$  是 Schrödinger-Heisenberg 对偶.

## 3 开放量子行走的演化方程

在前期学者们的研究工作中,开放量子行走的演化由作用在状态空间上的量子运算来刻画<sup>[22,27-28]</sup>. 然而,对于异质环境下的开放量子行走,系统在演化过程中会采用多种不同类型的量子运算,而这类演化方程却不能很好体现出系统运算的异质性. 因而,本节将针对高维格上(异质)开放量子行走,研究建立一种更为具体简洁演化表达式.

### 3.1 (封闭)离散量子行走

**定义 4**<sup>[15]</sup>. 一个离散量子行走是指:给定一个  $d$  正则图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V$  是顶点集,  $E$  是边集,  $|V| = n$ ; 设  $\mathcal{H}_p = \text{span}\{|v\rangle | v \in V\}$  表示位置空间,  $\mathcal{H}_c = \text{span}\{|i\rangle | i \in \{1, 2, \dots, d\}\}$  表示硬币空间,系统的状态空间表示为  $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$ ; 量子行走的每一步状态演化表示为  $U = S(I \otimes C)$ , 位移算子  $S$  表示为  $S = \sum_{i,v} |n_i(v)\rangle \langle v| \otimes |i\rangle \langle i|$ , 其中  $n_i(v)$  是指顶点  $v$  映射为  $v$  的第  $i$  个邻接点,硬币算子表示为  $I \otimes C$ , 其中  $I$  为  $\mathcal{H}_p$  上恒等算子,  $C$  为  $\mathcal{H}_c$  上一个酉算子.

设  $|\psi\rangle_{\text{init}}$  是  $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$  量子初态,系统经过第  $n$  步行走之后,量子态演化为

$$|\psi\rangle_n = U^n |\psi\rangle_{\text{init}} \quad (1)$$

若硬币算子  $C$  取为 Hadamard 算子,即:

$$C = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则称该量子系统为 Hadamard 量子行走. 它的演化过程可用如下实例说明:

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |0\rangle &\xrightarrow{H} |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{S} \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} |n_1(0)\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |n_2(0)\rangle \otimes |1\rangle, \end{aligned}$$

其中  $n_1(0), n_2(0)$  表示为顶点 0 的两个邻接点.

若给定一组投影测量算子  $\{P_0, P_1\}$ , 将它作用在状态空间  $\mathcal{H}_p$  上,得到该量子行走的位置状态的概率分布为  $p(n_1(0)) = p(n_2(0)) = \frac{1}{2}$ .

### 3.2 高维格上的开放量子行走

一个高维格  $\mathbb{Z}^d$  上的开放量子行走是一个有向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中顶点集  $V$  为有限集或可数集  $\mathbb{Z}^d$ , 边集  $E = \{(i, j) | i, j \in \mathbb{Z}^d\}$ <sup>[21]</sup>. 系统行走方式和过程解释说明如下:

设  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$  为一个量子系统的状态空间,它具有与  $\mathbb{Z}^d$  顶点集个数相同的自由度,记  $\{|i\rangle\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$  为  $\mathcal{K}$  的一组标准基. 设图  $G$  每一个顶点  $i \in \mathbb{Z}^d$  均有  $2d$  个邻接点,对于每一条边  $(i, j)$ , 都指派一个  $\mathcal{H}$  上有界算子  $B_i^j \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ , 表示为顶点  $i$  到顶点  $j$  的效用. 对于每一顶点  $i \in \mathbb{Z}^d$ , 其效用满足:

$$\sum_{j=1}^{2d} B_i^{j\dagger} B_i^j = I \quad (2)$$

该公式表示顶点  $i$  到其他所有邻接点的总效用和为  $I$ . 这一类与经典马尔可夫链是类似的:离开某一个状态并且转移到其他状态的概率总和为 1.

任意给定图  $G$  上的一个顶点  $i \in \mathbb{Z}^d$ , 定义一个  $\mathcal{H}$  上的量子运算  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_{j=1}^{2d} B_i^j \rho B_i^{j\dagger} \quad (3)$$

其中  $\rho \in D(\mathcal{H})$ .

在状态空间  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  上, 量子态记为

$$\rho = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho_i \otimes |i\rangle\langle i| \in D(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \quad (4)$$

其中  $\rho_i$  是一个部分密度算子, 即  $\rho_i \in D^-(\mathcal{H})$ .

若对状态空间  $\mathcal{K}$  进行测量, 得到位置状态的概率分布为

$$(p_i) = (\text{tr}(\rho_i)), \quad i \in \mathbb{Z}^d \quad (5)$$

现将  $\mathcal{H}$  上量子运算  $\mathcal{M}$  扩展到  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  上, 定义为

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} (B_i^j \rho_i B_i^{j\dagger}) \otimes (|j\rangle\langle j|) \quad (6)$$

称  $\mathcal{M}$  为  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  上的行走算子.

$\mathcal{M}(\rho)$  表示量子态  $\rho$  经过一次量子运算  $\mathcal{M}$  后得到新的量子态. 同时, 对状态空间  $\mathcal{K}$  进行测量, 得到位置状态的的概率分布为

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{tr}(B_i^j \rho_i B_i^{j\dagger}), \quad j \in \mathbb{Z}^d \quad (7)$$

类似地, 量子态  $\rho$  经过两次量子运算  $\mathcal{M}$  后得到新的量子态定义为

$$\mathcal{M}^2(\rho) = \mathcal{M}(\mathcal{M}(\rho)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} (B_j^k B_i^j \rho_i B_i^{j\dagger} B_j^{k\dagger}) \otimes (|k\rangle\langle k|) \quad (8)$$

对状态空间  $\mathcal{K}$  进行测量, 得到位置状态的的概率分布为

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} B_j^k B_i^j \rho_i B_i^{j\dagger} B_j^{k\dagger}, \quad k \in \mathbb{Z}^d \quad (9)$$

以此类推, 量子态  $\rho$  经过  $n$  次量子运算  $\mathcal{M}$  后得到新的量子态定义为

$$\mathcal{M}^n(\rho) = \mathcal{M}(\mathcal{M}^{n-1}(\rho)) \quad (10)$$

在开放量子行走的图  $G$  上, 如果每一个状态都采取相同的量子运算来执行状态之间的演化, 则称该系统是同质的 (Homogenous), 否则称为异质的 (Non-homogenous). 在文献 (参见本文第 2 页脚注③) 中, 将所有执行相同量子运算的状态归纳为一类, 称属于同一类的状态为同质的, 否则称为异质的.

从式 (6)~(10) 可以看出, 随着演化运算次数的增加, 新的量子态表达式将非常复杂; 另外, 这些公式也不适合用于表达更高维甚至是异质开放量子行走的演化过程; 同时也不利于概率分布的求解计算和中心极限定理的证明. 为了克服这样的不足, 本文将构造出一种更为简洁的量子行走演化方程. 为了

体现出这种构造性, 我们先研究  $\mathbb{Z}$  上同质开放量子行走演化方程, 然后推广到  $\mathbb{Z}$  上异质开放量子行走, 最后再一般化到高维格  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走.

**定义 5.** 设分块矩阵  $\mathbf{S} = (\mathbf{A}_{ij})_{N \times N}$ , 其中矩阵  $\mathbf{A}_{ij}$  的大小为  $n \times n$ , 定义分块矩阵  $\mathbf{S}$  上一个运算  $Btr$ :

$$Btr(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^N A_{ii},$$

称该运算为分块矩阵的迹.

分块矩阵的迹表示分块矩阵的主对角线的所有矩阵之和. 显然, 当  $n=1$  时,  $Btr(\mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{S})$ .

设  $\mathcal{H}$  是一个量子状态空间,  $\rho^{(0)} = \rho_0$  为量子初态,  $\mathcal{M}$  为其量子运算,  $\{B, C\}$  为它的运算元, 其中  $B$  表示系统向左行走一次,  $C$  表示系统向右行走一次.

$$\text{设 } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} B & \\ & C \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{S}^\dagger = \begin{bmatrix} B^\dagger & \\ & C^\dagger \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$Btr(\mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{S}) = B^\dagger B + C^\dagger C,$$

$$Btr((\mathbf{S}^{\otimes n})^\dagger \cdot (\mathbf{S}^{\otimes n})) = \sum_{j=1}^{2^n} T_j^\dagger \cdot T_j,$$

其中  $T_j = T_{j_n} \cdot T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1} \in \{B, C\}_n^+$ ,  $\{B, C\}_n^+$  表示  $\{B, C\}$  上长度为  $n$  的字符串的全体,  $T_{j_i} \in \{B, C\}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

量子初态  $\rho^{(0)}$  经过  $n$  次运算之后, 演化为新的量子态:

$$\rho^{(n)} = \mathcal{M}^n(\rho^{(0)}) = \sum_{j=1}^{2^n} T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger.$$

其中: (1) 字符串  $T_j$  长度为  $n$ , 代表系统演化的一种可能路径, 共有  $2^n$  种路径; (2)  $Btr((T^{\otimes n})^\dagger \cdot (T^{\otimes n})) =$

$$\sum_{j=1}^{2^n} T_j^\dagger \cdot T_j = I.$$

考虑一个  $\mathbb{Z}$  上同质开放量子行走. 设  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ , 将量子运算  $\mathcal{M}$  从状态空间  $\mathcal{H}$  扩展到状态空间  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ , 其中  $\rho^{(0)} = \rho_0 \otimes |0\rangle\langle 0|$  为量子初态.

定义一个映射  $f$ :

$$f: \{B, C\}_n^+ \rightarrow \{-n, -n+1, \dots, n\},$$

使得对于任意的  $T_j \in \{B, C\}_n^+$  有

$$f(T_j) = f(T_{j_n} T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}) = \sum_{i=1}^n f(T_{j_i}),$$

其中:

$$f(T_{j_i}) = \begin{cases} 1, & T_{j_i} = C \\ -1, & T_{j_i} = B \end{cases}.$$

根据上述定义以及符号规定,  $\mathbb{Z}$  上同质开放量子行走的演化方程可表示为

$$\rho^{(n)} = \mathcal{M}^n(\rho^{(0)}) = \sum_{j=1}^{2^n} (T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger) \otimes (|\alpha_j\rangle\langle \alpha_j|) \quad (11)$$

其中  $\alpha_j = f(T_j) \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ .

式(10)和(11)都给出了  $\mathbb{Z}$  上同质开放量子行走的演化过程, 表达形式不一样但它们本质上是一样的. 区别在于: 式(11)可以表达出系统具体演化路径以及系统所达到的坐标位置. 例如, 考虑一个系统从 0 位置开始, 行走 3 次, 取其中一条路径  $T_j = \text{CCB}$ , 它表示系统先向左行走一次, 再向右行走二次, 最终达到坐标 1 位置,  $T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger$  为该路径对应的部分密度算子.

下面将式(11)推广到  $\mathbb{Z}$  上异质开放量子行走.

给定一个  $\mathbb{Z}$  上异质开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |0\rangle\langle 0|$ , 每一步演化的量子运算取自于集合  $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_m\}$ . 由于考虑的是异质系统, 所以量子态之间的演化不一定要采取相同的量子运算. 假设每一个量子运算  $\mathcal{M}_l$  的运算元记为  $\{K_{-1}^l, K_1^l\}$ ,  $l=1, 2, \dots, m$ , 其中  $K_{-1}^l$  表示向左行走,  $K_1^l$  表示向右行走. 进一步假设系统从量子初态  $\rho^{(0)}$  开始, 按  $\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \dots, \mathcal{M}'_n$  先后顺序执行量子运算, 经过  $n$  次演化运算后得到新的量子态为

$$\rho^{(n)} = \mathcal{M}'_n \cdots \mathcal{M}'_2 \mathcal{M}'_1 (\rho^{(0)}) = \sum_{j=1}^{2^n} (T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger) \otimes (|\alpha_j\rangle\langle \alpha_j|) \quad (12)$$

其中: (1)  $\mathcal{M}'_i \in \bar{\mathcal{M}}$ ,  $\mathcal{M}'_i$  的运算元记为  $\{K_{-1}^i, K_1^i\}$ ; (2)  $T_j = T_{j_n} \cdot T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}$ ,  $T_{j_i} \in \{K_{-1}^i, K_1^i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; (3)  $\alpha_j = f(T_j) \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ .

对比式(11)和(12), 表达形式是一样的, 但区别在于式(12)描述异质开放量子系统的演化, 其中采取的量子运算不一定相同. 如果采取相同的量子运算, 那么式(11)是式(12)的一种特殊情况.

进一步将式(11)和(12)一般化, 给出  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走的演化方程.

给定一个  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00 \cdots 0\rangle\langle 00 \cdots 0|$ , 系统每一步演化的量子运算  $\mathcal{M}$  取自于集合  $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_m\}$ , 量子态之间的演化运算不一定相同. 每一个量子运算  $\mathcal{M}_l$  的运算元为  $\{K_{-1}^{l_{x_1}}, K_1^{l_{x_1}}, K_{-1}^{l_{x_2}}, K_1^{l_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{l_{x_d}}, K_1^{l_{x_d}}\}$ ,  $l=1, 2, \dots, m$ , 其中  $K_{\pm 1}^{l_{x_t}}$  ( $K_{-1}^{l_{x_t}}$ ) 表示系统沿第  $x_t$  轴的正方向(负方向)行走,  $t=1, 2, \dots, d$ . 假定该量子系统按如下顺序(从左到右)进行  $n$  次演化运算:

$$\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \dots, \mathcal{M}'_n,$$

其中  $\mathcal{M}'_i \in \bar{\mathcal{M}}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 记每一个量子运算  $\mathcal{M}'_i$  的运算元为  $\{K_{-1}^{i_{x_1}}, K_1^{i_{x_1}}, K_{-1}^{i_{x_2}}, K_1^{i_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{i_{x_d}}, K_1^{i_{x_d}}\}$ .

经过  $n$  次演化运算后得到新的量子态为

$$\rho^{(n)} = \mathcal{M}'_n \cdots \mathcal{M}'_2 \mathcal{M}'_1 (\rho^{(0)}) = \sum_{j=1}^{(2d)^n} (T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger) \otimes (|\bar{\alpha}_j\rangle\langle \bar{\alpha}_j|) \quad (13)$$

其中:

$$(1) T_j = T_{j_n} \cdot T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}, T_{j_i} \in \{K_{-1}^{i_{x_1}}, K_1^{i_{x_1}}, K_{-1}^{i_{x_2}}, K_1^{i_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{i_{x_d}}, K_1^{i_{x_d}}\}, i=1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \bar{\alpha}_j = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_d}), \alpha_{j_i} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(T_{j_i}) \text{ 以及}$$

$$f_{x_i}(T_{j_i}) = \begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_1^{i_{x_t}} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i_{x_t}}, t=1, 2, \dots, d, i=1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$2, \dots, n$ .

特殊地, 当系统演化采取相同量子运算时, 式(13)为  $\mathbb{Z}^d$  上同质开放量子行走的演化方程. 同时, 当  $d=1$  时, 式(13)退化到一维格上同质开放量子行走(式(11))或一维格上异质开放量子行走(式(12)).

## 4 开放量子行走的概率分布

在文献[27]中, Konno 等人为了计算开放量子行走的概率分布, 提出双过程模型(Dual process), 将开放量子行走的演化过程表述为

$$\rho^{(n)} = \mathcal{M}^n(\rho^{(0)}) = (L_B R_B^\dagger T + L_C R_C^\dagger T^\dagger)^{(n)}(\rho^{(0)}) \quad (14)$$

其中:

$$(1) T, T^\dagger \text{ 分别是左右行走算子};$$

$$(2) L_B(A) := BA, R_B(A) := AB;$$

$$(3) L_B R_C(A) = (BA(x)C)_{x \in \mathbb{Z}}.$$

运用式(14), 能够方便计算出一维格上开放量子行走的概率分布. 然而, 这种左右转移算子却不适合用于描述更高维开放量子行走. 原因在于需要给出更多的转移算子, 计算过程将变得异常复杂, 这不利于计算系统位置状态的概率分布.

本文将在式(13)基础上, 结合傅里叶变换和逆变换, 给出计算高维格上开放量子行走的概率分布的方法.

### 4.1 傅里叶变换和逆变换

考虑一个 Hilbert 空间  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ ,  $\bar{\mathcal{M}}_2$  是  $\mathcal{H}$  上的所有大小为  $2 \times 2$  线性算子的集合, 定义一个内积:

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^\dagger B), A, B \in \bar{\mathcal{M}}_2.$$

设  $K := (-\pi, \pi]$ ,  $l^2(\mathbb{Z})$  和  $L^2\left(K, \frac{1}{2\pi}dk\right)$  中的函数傅里叶变换和傅里叶逆变换定义为

$$\hat{f}(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} f(x), \hat{f} \in L^2\left(K, \frac{1}{2\pi}dk\right);$$

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \hat{f}(k) dk, f := (f(x))_{x \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

对于任意  $k \in K$ , 记  $\bar{\mathcal{M}}_k := \bar{\mathcal{M}}_2$ , 定义一个可积函数空间:

$$\hat{\mathcal{M}} := \int_k^{\oplus} \bar{\mathcal{M}}_k \frac{1}{2\pi} dk$$

和一个直和空间

$$\bar{\mathcal{M}} := \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \bar{\mathcal{M}}_x.$$

将上述傅里叶变换和傅里叶逆变换推广到  $\bar{\mathcal{M}}$  和  $\hat{\mathcal{M}}$  上: 对于  $A = (A(x))_{x \in \mathbb{Z}} \in \bar{\mathcal{M}}$ , 有

$$\hat{A}(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} A(x), \hat{A} := (\hat{A}(k))_{k \in K} \in \hat{\mathcal{M}};$$

$$A(x) := \frac{1}{2\pi} \int_K e^{ikx} \hat{A}(k) dk, A := (A(x))_{x \in \mathbb{Z}} \in \bar{\mathcal{M}}.$$

#### 4.2 高维格上开放量子行走的概率分布

给定一个  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00 \cdots 0\rangle \langle 00 \cdots 0|$ , 系统经过  $n$  次演化运算后得到新的量子态为

$$\begin{aligned} \rho^{(n)} &= \mathcal{M}'_n \mathcal{M}'_{n-1} \cdots \mathcal{M}'_1 (\rho^{(0)}) \\ &= \sum_{j=1}^{(2d)^n} (T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger) \otimes (|\bar{\alpha}_j\rangle \langle \bar{\alpha}_j|). \end{aligned}$$

进一步化简为

$$\rho^{(n)} = \sum_{\bar{x} \in \mathbb{Z}^d} \rho_{\bar{x}}^{(n)} \otimes |\bar{x}\rangle \langle \bar{x}| \quad (15)$$

其中  $\rho_{\bar{x}}^{(n)} = \sum_{\bar{\alpha}_j} T_j \cdot \rho_0 \cdot T_j^\dagger$ ,  $\bar{\alpha}_j, \bar{x} \in \{-n, -n+1, \dots, n\}^d, j=1, 2, \dots, (2d)^n$ .

为了方便, 也记式(15)为

$$\rho^{(n)} = (\rho_{\bar{x}}^{(n)})_{\bar{x} \in \mathbb{Z}^d} \quad (16)$$

其对应系统位置状态的概率分布为

$$P^{(n)} := (p_{\bar{x}}^{(n)})_{\bar{x} \in \mathbb{Z}^d} = (\text{tr}(\rho_{\bar{x}}^{(n)}))_{\bar{x} \in \mathbb{Z}^d} \quad (17)$$

对式(16)进行傅里叶变换和逆变换, 结果如下:

$$\hat{\rho}^{(n)} = (\hat{\rho}^{(n)}(k))_{k \in K},$$

其中:

$$(1) \rho^{(0)}(k) = \rho_0;$$

$$\begin{aligned} (2) \hat{\rho}^{(n)}(k) &= \sum_{t=1}^d e^{ik_t} K'^{n_{x_t}} \hat{\rho}^{(n-1)}(k) (K'^{n_{x_t}})^\dagger + \\ &e^{-ik_t} K'^{n_{x_t}} \hat{\rho}^{(n-1)}(k) (K'^{n_{x_t}})^\dagger \end{aligned} \quad (18)$$

利用定义 3, 对式(18)表达式进行调整, 变形为

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(n)}(k) &= \left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} + \right. \\ &\left. e^{-ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} \right) \hat{\rho}^{(n-1)}(k) \end{aligned} \quad (19)$$

对比式(18)和(19), 表达式不一样, 含义也不一样. 特别地, 式(19)并未给出第  $n$  次演化后的量子态信息. 然而, 它们之间有如下关系:

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} K'^{n_{x_t}} \hat{\rho}^{(n-1)}(k) (K'^{n_{x_t}})^\dagger + \right. \\ &\left. e^{-ik_t} K'^{n_{x_t}} \hat{\rho}^{(n-1)}(k) (K'^{n_{x_t}})^\dagger \right) = \\ &\text{tr} \left( \left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} + \right. \right. \\ &\left. \left. e^{-ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} \right) \hat{\rho}^{(n-1)}(k) \right), \end{aligned}$$

即两个公式的概率计算值是相等的. 由于本文考虑的是系统位置状态的概率分布计算, 为了方便处理, 本文将利用式(19)替代式(18)计算  $\hat{\rho}^{(n)}(k)$ .

在式(19)基础上有

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(n)}(k) &= \left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} + e^{-ik_t} (K'^{n_{x_t}})^\dagger K'^{n_{x_t}} \right) \cdot \\ &\left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} (K'^{n-1_{x_t}})^\dagger K'^{n-1_{x_t}} + e^{-ik_t} (K'^{n-1_{x_t}})^\dagger K'^{n-1_{x_t}} \right) + \cdots + \\ &\left( \sum_{t=1}^d e^{ik_t} (K'^{1_{x_t}})^\dagger K'^{1_{x_t}} + e^{-ik_t} (K'^{1_{x_t}})^\dagger K'^{1_{x_t}} \right) \hat{\rho}^{(0)}(k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{假设 } E_t = \begin{bmatrix} e^{ik_t} I & \\ & e^{-ik_t} I \end{bmatrix} \text{ 和 } S_t^i = \begin{bmatrix} K'^{i_{x_t}} & \\ & K'^{i_{x_t}} \end{bmatrix}, t =$$

$$1, 2, \dots, d, i = 1, 2, \dots, n; \text{ 令 } \bar{E} = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_d \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_i = \begin{bmatrix} S_1^i & & & \\ & S_2^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_d^i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n.$$

设  $R_n = \text{Btr}(\bar{E}^{\otimes n} \cdot (\bar{S}_n \otimes \bar{S}_{n-1} \otimes \cdots \otimes \bar{S}_1)^\dagger \cdot (\bar{S}_n \otimes \bar{S}_{n-1} \otimes \cdots \otimes \bar{S}_1))$ , 计算得

$$R_n = \sum_{j=1}^{(2d)^n} \left( \prod_{t=1}^d e^{-ik_t a_{j_t}} \right) \cdot T_j^\dagger \cdot T_j \quad (21)$$

由式(20)和(21)得

$$\hat{\rho}^{(n)}(k) = R_n \hat{\rho}^{(0)}(k) \quad (22)$$

**定理 1.** 给定  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00 \cdots 0\rangle \langle 00 \cdots 0|$ , 系统按  $\mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \dots, \mathcal{M}'_n$  顺序(从左到右)进行  $n$  次演化运算, 每个  $\mathcal{M}'_i$

的运算元为  $\{K_{-1}^{i_{x_1}}, K_{1}^{i_{x_1}}, K_{-1}^{i_{x_2}}, K_{1}^{i_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{i_{x_d}}, K_{1}^{i_{x_d}}\}$ . 令  $\delta_{\bar{x}=\bar{a}_j} = \prod_{t=1}^d \delta_{x_t=\alpha_{j_t}}$ , 其中  $\bar{a}_j = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_d})$ ,  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \{-n, -n+1, \dots, n\}^d$ , 
$$\alpha_{j_k} = \sum_{i=1}^n f_{x_k}(T_{j_i}), f_{x_k}(T_{j_i}) = \begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_{1}^{i_{x_k}} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i_{x_k}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
  $k=1, 2, \dots, d, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, (2d)^n$ , 则该系统的位置状态的概率分布为

$$p_{\bar{x}}^{(n)} = \text{tr}(\rho_{\bar{x}}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{(2d)^n} \delta_{\bar{x}=\bar{a}_j} \text{tr}(T_j \rho_0 T_j^\dagger) \quad (23)$$

定理 1 给出了高维格上开放量子行走的位置状态的概率分布的计算公式, 它既适合于同质开放量子行走也适合于异质开放量子行走.

### 4.3 实例

例 1. 给定  $\mathbb{Z}$  上异质开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ , 该系统执行 3 种量子运算, 分别如下:

(1) 去极化信道  $\mathcal{M}_1$

$$K_{-1}^1 = \sqrt{0.4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_1^1 = \sqrt{0.6} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix};$$

(2) 相位翻转信道  $\mathcal{M}_2$

$$K_{-1}^2 = \sqrt{0.3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_1^2 = \sqrt{0.7} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

(3) 幅值阻尼  $\mathcal{M}_3$

$$K_{-1}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.5} \end{bmatrix}, K_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{0.5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据定理 1, 经过  $n$  次量子运算后, 该系统的位置状态的概率分布为

$$p_x^{(n)} = \sum_{j=1}^{2^n} \delta_{x=\alpha_j} \text{tr}(T_j \rho_0 T_j^\dagger).$$

该式中  $x \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ , 第  $i$  次演化运用量子运算  $\mathcal{M}'_i \in \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3\}$ , 运算元为  $\{K_{-1}^{i'}, K_1^{i'}\}$ ,  $i=1, 2, \dots, n, T_j = T_{j_n} T_{j_{n-1}} \dots T_{j_1}, T_{j_i} \in \{K_{-1}^{i'}, K_1^{i'}\}$ ,  $\alpha_j = f(T_j) = \sum_{i=1}^n f(T_{j_i})$ , 其中  $f(T_{j_i}) =$

$$\begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_{1}^{i'} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i'}. \end{cases}$$

假设用数字 1, 2, 3 分别表示第  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  量子运算, 该系统分别执行 11 次和 18 次演化, 结果如图 1 和图 2 所示.

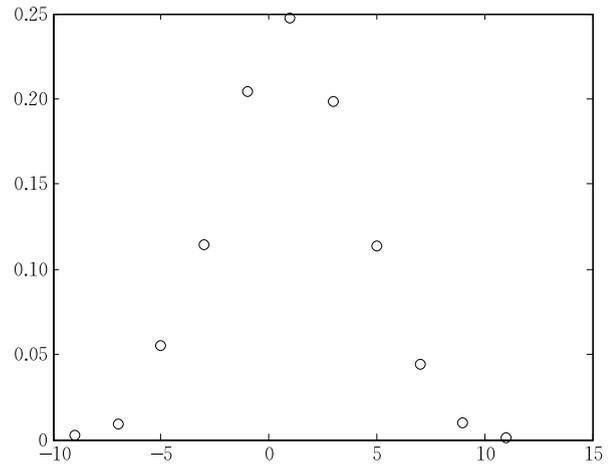


图 1 一维格上异质开放量子行走的位置状态的概率分布, 其中执行了 11 次演化, 具体执行过程如下(从左到右): 1、2、1、3、2、1、1、3、1、2、2

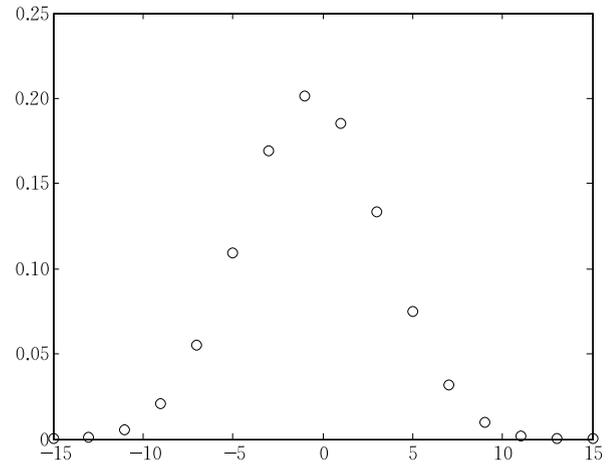


图 2 一维格上异质开放量子行走的位置状态的概率分布, 其中执行了 18 次演化, 具体执行过程如下(从左到右): 1、2、1、3、2、1、1、3、1、2、2、3、3、2、1、2、2、1

例 2. 给定  $\mathbb{Z}^2$  上异质开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := |0\rangle\langle 0| \otimes |00\rangle\langle 00|$ , 该系统执行 3 种量子运算, 分别如下:

第 1 种量子运算  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned} K_1^{1x}(\rho) &= 0.5 |1\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 1| + 0.5 |3\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 3|, \\ K_{-1}^{1x}(\rho) &= 0.5 |3\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 3| + 0.5 |0\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 0|, \\ K_1^{1y}(\rho) &= 0.2 |0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + 0.8 |1\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 1|, \\ K_{-1}^{1y}(\rho) &= 0.2 |3\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 3| + 0.8 |2\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 2|. \end{aligned}$$

第 2 种量子运算  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned} K_1^{2x}(\rho) &= 0.5 |0\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 0| + 0.5 |2\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 2|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{-1}^{2x}(\rho) &= 0.5 |0\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 0| + \\
&\quad 0.5 |2\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 2|, \\
K_1^{2y}(\rho) &= 0.5 |1\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad 0.5 |3\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 3|, \\
K_{-1}^{2y}(\rho) &= 0.5 |1\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 1| + \\
&\quad 0.5 |3\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 3|.
\end{aligned}$$

第 3 种量子运算  $\mathcal{M}_3$

$$\begin{aligned}
K_1^{3x}(\rho) &= 0.5 |3\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 3| + \\
&\quad 0.5 |2\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 2|, \\
K_{-1}^{3x}(\rho) &= 0.5 |1\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 1| + \\
&\quad 0.5 |3\rangle\langle 3| \rho |3\rangle\langle 3|, \\
K_1^{3y}(\rho) &= 0.7 |1\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 1| + \\
&\quad 0.3 |2\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 2|, \\
K_{-1}^{3y}(\rho) &= 0.7 |0\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 0| + \\
&\quad 0.3 |2\rangle\langle 2| \rho |2\rangle\langle 2|.
\end{aligned}$$

根据定理 1, 经过  $n$  次量子运算后, 该系统的位置状态的概率分布为

$$p_{(x,y)}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4^n} \delta_{x=\alpha_j} \delta_{y=\beta_j} \text{tr}(T_j \rho_0 T_j^\dagger).$$

该式中  $x, y \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ , 第  $i$  次演化运用量子运算  $\mathcal{M}'_i \in \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3\}$ , 运算元为  $\{K_{-1}^{i_x}, K_1^{i_x}, K_{-1}^{i_y}, K_1^{i_y}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $T_j = T_{j_n} T_{j_{n-1}} \dots T_{j_1}$ ,  $T_{j_i} \in \{K_{-1}^{i_x}, K_1^{i_x}, K_{-1}^{i_y}, K_1^{i_y}\}$ ,  $\alpha_j = f_x(T_j) = \sum_{i=1}^n f_x(T_{j_i})$ ,  $\beta_j = f_y(T_j) = \sum_{i=1}^n f_y(T_{j_i})$ , 其中  $f_x(T_{j_i}) =$

$$\begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_1^{i_x} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i_x}, f_y(T_{j_i}) = \begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_1^{i_y} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i_y} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

假设用数字 1, 2, 3 分别表示第  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  量子运算, 该系统执行 9 次演化, 结果如图 3 所示.

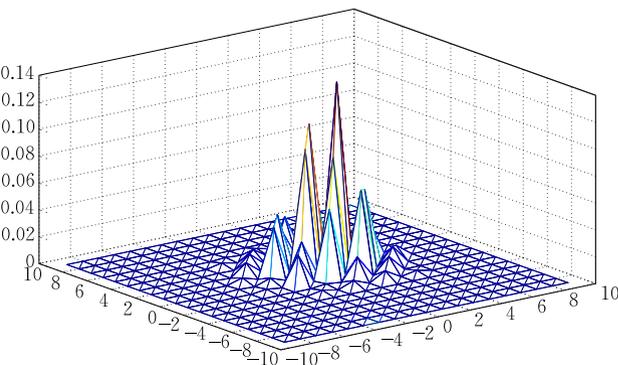


图 3 二维格上异质开放量子行走的位置状态的概率分布, 其中执行了 9 次演化, 具体执行过程如下(从左到右): 1、2、3、3、2、1、3、2、1

## 5 中心极限定理

上一节我们给出了高维格上开放量子行走的概率分布的计算方法, 然而并未给出它们的极限概率分布. 本节运用鞍差分序列理论, 给出并证明高维格上开放量子行走的中心极限定理, 同时与前期几个相关研究成果进行比较分析, 最后通过实例解释说明.

**定义 6**<sup>[32]</sup>. 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个概率空间,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  是非负整数集合. 若  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$  域族  $F = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$  满足:

(1)  $\mathcal{F}_0$  包含一切  $\mathcal{F}$  中的可略集;

(2) 对每一个  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ , 称  $F$  为  $\sigma$  域流,  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$  为带流概率空间.

**定义 7**<sup>[32]</sup>.  $\sigma$  域流  $F = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$  称为  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  的自然流, 如果  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j, j \leq n) \vee N$ , 其中  $N$  表示  $\mathcal{F}$  中的可略集.  $\sigma(X_j, j \leq n) \vee N$  表示生成的  $\sigma$  域.

**定义 8**<sup>[32]</sup>. 设  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$  带流概率空间, 随机变量序列  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  称为  $F$  适应的, 对每个  $n \geq 1$ , 有  $X_n \in \mathcal{F}_n$ .

**定义 9**<sup>[32]</sup>. 设  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  为可积的  $F = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$  适应序列, 且  $\forall n \in \mathbb{N}$  有  $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$ , 则称  $X$  为鞍差分序列.

**定理 2**<sup>[32]</sup> (鞍差分序列的中心极限定理). 设

$$X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$$

是一个鞍差分序列, 令  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 若

(1) 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2 \delta(|X_i| \geq \varepsilon \sqrt{n}) | \mathcal{F}_{i-1}) = 0,$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2,$$

其中示性函数  $\delta(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in (|X_i| \geq \varepsilon \sqrt{n}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则有

$\sqrt{n} \bar{X}$  依分布收敛于  $N(0, \sigma^2)$ .

**定义 10.** 给定  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态  $(\rho_0, X_0) \in D(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d$ , 经过  $n$  次演化之后, 系统处于  $2d$  个位置中的其中一个:  $(\rho, X) \in D(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}^d$ , 定义一个转移概率:

$$P((\rho, x), (\rho'_j, x'_j)) = \begin{cases} \text{tr}(T_j \rho T_j^\dagger), \rho'_j = \frac{T_j \rho T_j^\dagger}{\text{tr}(T_j \rho T_j^\dagger)} & (24) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $\rho'_j = D^-(\mathcal{H})$ ,  $j=1, 2, \dots, (2d)^n$ .

### 5.1 $\mathbb{Z}^d$ 上开放量子行走的中心极限定理

给定一个  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00 \cdots 0\rangle \langle 00 \cdots 0|$ , 系统量子运算集为  $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_m\}$ . 每一个量子运算  $\mathcal{M}_l$  的运算元为  $\{K_{-1}^{l_{x_1}}, K_1^{l_{x_1}}, K_{-1}^{l_{x_2}}, K_1^{l_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{l_{x_d}}, K_1^{l_{x_d}}\}$ ,  $l=1, 2, \dots, m$ , 其中  $x_1, x_2, \dots, x_d$  表示  $d$  个坐标轴,  $K_1^{l_{x_i}}$  ( $K_{-1}^{l_{x_i}}$ ) 表示第  $x_i$  轴向正方向(负方向)行走.

**定义 11**<sup>[33]</sup>. 给定一个开放量子系统,  $\rho_0$  是量子初态,  $\rho_0 \rightarrow \rho_1 \rightarrow \dots \rightarrow \rho_{n-1}$  是开放量子系统的量子态演化过程, 若序列和  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i$  几乎处处收敛于一个固定量子态, 则称该量子态为不变量子态, 记为  $\rho_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i$ .

针对  $\mathbb{Z}^d$  上异质开放量子行走, 本文以不变性和完整性为前提条件, 研究其中心极限定理, 具体内容表述如下:

- (1) 不变性. 开放量子行走具有惟一不变量子态  $\rho_\infty$ ;
- (2) 完整性. 开放量子行走在  $n \geq m$  步内执行完所有  $m$  个量子运算.

令  $\bar{m} \in \mathbb{R}^d$  是  $d$  维实数域上的一个向量, 定义为

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho_\infty T_j^\dagger) f_{x_k}(T_j) |e_k\rangle,$$

式中

- (1)  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_d\rangle\}$  为一组(单位)标准正交基;

$$(2) \rho' = \mathcal{M}'_n \mathcal{M}'_{n-1} \cdots \mathcal{M}'_1(\rho) = \sum_{j_n}^{2d} \sum_{j_{n-1}}^{2d} \cdots \sum_{j_1}^{2d} (T_{j_n} T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}) \rho (T_{j_n} T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1})^\dagger, \text{ 其中 } \mathcal{M}'_i \in \bar{\mathcal{M}}, T_{j_i} \in \{K_{-1}^{i_{x_1}}, K_1^{i_{x_1}}, K_{-1}^{i_{x_2}}, K_1^{i_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{i_{x_d}}, K_1^{i_{x_d}}\}, i=1, 2, \dots, n;$$

$$(3) \text{ 令 } T_j = T_{j_n} T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}, 1 \leq j_i \leq 2d, j=1, 2, \dots, n, f_{x_t}(T_j) = f(T_{j_n} T_{j_{n-1}} \cdots T_{j_1}) = \sum_{i=1}^n f_{x_t}(T_{j_i}),$$

其中

$$f_{x_t}(T_{j_i}) = \begin{cases} 1, & T_{j_i} = K_1^{i_{x_t}} \\ -1, & T_{j_i} = K_{-1}^{i_{x_t}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$t=1, 2, \dots, d, i=1, 2, \dots, n$ .

**引理 1**<sup>[33]</sup>. 给定一个量子运算  $\mathcal{M}: D(\mathcal{H}) \rightarrow$

$D(\mathcal{H})$ , 记  $\text{Ker}(\mathcal{M}), \text{Ran}(\mathcal{M})$  分别表示算子  $\mathcal{M}$  的核和像, 则有下列式子成立:

$$D(\mathcal{H}) = \text{Ker}(\mathcal{M}) \oplus \text{Ran}(\mathcal{M}^\dagger).$$

**引理 2.** 对于任意的  $\bar{l} \in \mathbb{R}^d$ , 有下列方程成立:

$$(I - \mathcal{M}^\dagger)(L) = \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I.$$

**引理 3.** 设一个函数  $g: D(\mathcal{H}) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , 则公式

$$g(\rho, X) = \text{tr}(\rho L) + \langle X | \bar{l} \rangle,$$

满足方程

$$(I - P)g(\rho, X) = \langle X | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle,$$

其中  $Pg(\rho, x) = \sum_{(\rho', x')} P((\rho, x), (\rho', x')) g(\rho', x')$ .

**定理 3.** 给定一个  $\mathbb{Z}^d$  上开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00 \cdots 0\rangle \langle 00 \cdots 0|$ , 系统量子运算集为  $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_m\}$ . 每一个量子运算  $\mathcal{M}_l$  的运算元为  $\{K_{-1}^{l_{x_1}}, K_1^{l_{x_1}}, K_{-1}^{l_{x_2}}, K_1^{l_{x_2}}, \dots, K_{-1}^{l_{x_d}}, K_1^{l_{x_d}}\}$ ,  $l=1, 2, \dots, m$ ,  $\bar{m} = \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho_\infty T_j^\dagger) f_{x_t}(T_j) |e_t\rangle$ , 其中  $\rho_\infty$  是一个不变量子态. 用  $(\rho_n, X_n)_{n \geq 0}$  表示为量子行走的轨迹<sup>[21]</sup>, 量子态  $\rho_n \in D(\mathcal{H})$ , 位置状态随机变量  $X_n \in \mathbb{Z}^d, Y_n = \frac{X_n - n\bar{m}}{\sqrt{n}}$  是  $X_n$  标准化变量, 则有

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_n)}{n} = \bar{m};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \sim N(0, \sigma^2).$$

该定理表明了高维格上开放量子行走的位置状态依分布收敛于正态分布.

如果演化的每一步采取相同的量子运算, 那么该定理给出同质量子行走的极限分布, 否则为异质量子行走的极限分布.

值得注意的是, 在证明过程中, 需要用到不变性条件. 如果不变性条件不成立, 从引理 2 以及定理 3 的证明中可以看出, 方差的极限不存在, 位置状态无法依分布收敛于正态分布. 同时, 我们也需要完整性假设, 避免出现某些量子运算以稀疏形式出现, 对于每一个量子运算都能参与整个量子行走系统的演化运算.

### 5.2 $\mathbb{Z}$ 上同质开放量子行走的中心极限定理

文献[28]的定理 6.2 给出一维  $\mathbb{Z}$  上同质开放量子行走的中心极限定理, 本节将说明它是定理 3 的一种特殊情况.

设一个一维  $\mathbb{Z}$  上的同质开放量子行走, 量子初态为  $\rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |0\rangle \langle 0|$ , 系统的量子运算为  $\mathcal{M}$ , 它对应的运算元为  $B$  和  $C$ , 系统用量子轨迹表示为

$$(\rho_n, X_n)_{n \geq 0},$$

系统的演化方程表示为

$$\rho' = \mathcal{M}(\rho) = B\rho B^\dagger \otimes |1\rangle\langle 1| + C\rho C^\dagger \otimes |-1\rangle\langle -1|,$$

其中: (1) 运算元  $B$  和  $C$  分别表示在一维坐标轴上向负方向和正方向行走; (2)  $BB^\dagger + CC^\dagger = I$ .

设

$$(1) m = \text{tr}(B\rho_\infty B^\dagger) - \text{tr}(C\rho_\infty C^\dagger);$$

$$(2) \sigma^2 = \text{tr}(\rho_\infty \Gamma), \text{ 其中 } \Gamma = \sum_{l=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \{T_j^\dagger T_j [(f_{x_l}(T_j) \langle e_l | l \rangle - \langle m | l \rangle)^2] + 2T_j^\dagger L T_j (f_{x_l}(T_j) \langle e_l | l \rangle - \langle m | l \rangle)\} = B^\dagger B(1-m)^2 + C^\dagger C(-1-m)^2 + 2B^\dagger L B(1-m) + 2C^\dagger L C(-1-m).$$

结合(1)和(2), 根据定理 3 及其证明, 有

$$\sigma^2 = 1 - m^2 + 4(\text{tr}(C\rho_\infty C^\dagger)\text{tr}(\rho_\infty L) - \text{tr}(\rho_\infty C^\dagger L C))$$

或

$$\sigma^2 = 1 - m^2 + 4(\text{tr}(\rho_\infty B^\dagger L B) - \text{tr}(B\rho_\infty B^\dagger)\text{tr}(\rho_\infty L)).$$

**推论 1.**  $\mathbb{Z}$  上的同质开放量子行走的位置状态的随机变量  $X_n$  依分布收敛于正态分布:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma^2).$$

该结果与文献[28]的定理 6.2 是相同的, 这说明了本文所给出的定理 3 更具有一般性.

### 5.3 $\mathbb{Z}^2$ 上异质开放量子行走的中心极限定理

例 3. 给定  $\mathbb{Z}^2$  上异质开放量子行走, 量子初态

$$\text{为 } \rho^{(0)} := \rho_0 \otimes |00\rangle\langle 00|, \text{ 其中 } \rho_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 位置坐标}$$

为  $X = (x, y), x, y \in \mathbb{Z}$ . 系统每一次演化的量子运算  $\mathcal{M}$  取自于集合  $\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ , 其中量子运算  $\mathcal{M}_1$  用算子和表示为

$$\mathcal{M}_1(\rho) = E_1 \rho E_1^\dagger + W_1 \rho W_1^\dagger + N_1 \rho N_1^\dagger + S_1 \rho S_1^\dagger;$$

量子运算  $\mathcal{M}_2$  用算子和表示为

$$\mathcal{M}_2(\rho) = E_2 \rho E_2^\dagger + W_2 \rho W_2^\dagger + N_2 \rho N_2^\dagger + S_2 \rho S_2^\dagger,$$

其中  $E, W, S, N$  分别代表系统向东、西、南、北 4 个方位行走.

该量子行走的轨迹表示为

$$(\rho_n, X_n)_{n \geq 0}.$$

对应系统演化方程表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l(\rho_k \otimes |xy\rangle\langle xy|) &= E_l \rho_k E_l^\dagger \otimes |(x+1)y\rangle\langle (x+1)y| + W_l \rho_k W_l^\dagger \otimes \\ &|(x-1)y\rangle\langle (x-1)y| + N_l \rho_k N_l^\dagger \otimes \\ &|x(y+1)\rangle\langle x(y+1)| + S_l \rho_k S_l^\dagger \otimes \\ &|x(y-1)\rangle\langle x(y-1)|, l=1, 2. \end{aligned}$$

作为一个应用实例, 考虑该系统执行如下演化(从左到右):

$$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2, \dots$$

其中两个量子运算分别取如下运算元:

$$E_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & \sqrt{11} \end{bmatrix}, W_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, N_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{7}{8}} \end{bmatrix}, W_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, N_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定理 3 以及证明, 下面给出该实例的极限分布的计算步骤:

(1) 计算不变量子态  $\rho_\infty$

$$\rho_\infty = \begin{bmatrix} 59/113 & -166/10031 \\ -166/10031 & 54/113 \end{bmatrix}.$$

(2) 计算位置平均值

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{64} \text{tr}(T_j \rho_\infty T_j^\dagger) f_{x_k}(T_j) |e_k\rangle, \\ \bar{m} &= (1.1358, -0.0435). \end{aligned}$$

(3) 给出如下方程并求解

$$(I - \mathcal{M}^\dagger)(L) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{64} T_j^\dagger T_j f_{x_k}(T_j) \langle e_k | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I,$$

取  $\bar{l} = (1, 1)$ , 得

$$L = \begin{bmatrix} -1.3886 & 0.4153 \\ 0.4153 & 0.0001 \end{bmatrix}.$$

(4) 计算  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{64} \{T_j^\dagger T_j [(f_{x_k}(T_j) \langle e_k | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle)^2] + \\ &2T_j^\dagger L T_j (f_{x_k}(T_j) \langle e_k | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle)\}, \end{aligned}$$

$$\text{得 } \Gamma = \begin{bmatrix} -0.3572 & 0.1142 \\ 0.1142 & 3.1456 \end{bmatrix}.$$

(5) 计算方差

$$\sigma^2 = \text{tr}(\rho_\infty \Gamma),$$

得  $\sigma^2 = 1.3129$ .

综合上述 5 个步骤的计算, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nm}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1.3129).$$

## 6 结 论

本文研究高维格上开放量子行走的极限分布,

给出高维格上(异质)开放量子行走的概率分布和中心极限定理的计算方法. 主要研究结果有: 给出高维上开放量子行走的演化方程; 利用傅里叶变换和逆变换结合 Schrödinger-Heisenberg 对偶, 给出开放量子行走的概率分布的计算公式; 利用鞍差分序列的中心极限定理, 在满足一定条件和假设下, 证明开放量子行走的中心极限定理, 说明一维同质开放量子行走的中心极限定理是它的一种特殊情况; 最后通过实例给出开放量子行走的极限分布的计算步骤.

与前期学者们所研究的开放量子行走相比较, 我们给出的高维格上(异质)开放量子行走更具有一般性. 值得注意的是: (1) 定理 1 作为计算开放量子行走的概率分布的主要结论, 如果取  $d=1$  以及执行惟一一个量子运算, 即该量子系统是一个一维格上同质开放量子行走, 则经过计算得到的概率分布与 Konno 等人所计算出来的结果(文献[27]定理 2.3)是一样的; (2) 推论 1 给出一维格上同质开放量子行走的中心极限定理, 与文献[28]的定理 6.2 是相同的, 也是本文定理 3 的一种特殊情况.

## 参 考 文 献

- [1] Feynman R P. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 1982, 21(6):467-488
- [2] Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer//*Proceedings of the Royal Society of Mathematical and Physical Sciences*. London, UK, 1985: 97-117
- [3] Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000
- [4] Zhang Yi, Lu Kai, Gao Ying-Hui. Quantum algorithms and quantum-inspired algorithms. *Chinese Journal of Computers*, 2013, 36(9): 1835-1842(in Chinese)  
(张毅, 卢凯, 高颖慧. 量子算法与量子衍生算法. *计算机学报*, 2013, 37(9): 1835-1842)
- [5] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York, USA: Wiley, 1986
- [6] Barber M, Ninham B W. *Random and Restricted Walks: Theory and Applications*. New York, USA: Gordon and Breach, 1970
- [7] Malkiel B. *A Random Walk Down Wall Street*. New York, USA: Northon, 1973
- [8] Berg H C. *Random Walks in Biology*. Princeton, USA: Princeton University Press, 1993
- [9] Motwani R, Raghavan P. *Randomized Algorithms*. Cambridge, English: Cambridge Univeristy Press, 1995
- [10] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks. *Physical Review A*, 1993, 48: 1687-1690
- [10] Kempe J. Quantum random walks—An introductory overview. *Contemporary Physics*, 2003, 44(4): 307-327
- [11] Falkner S, Boettcher S. Weak limit of the three-state quantum walk on the line. *Physical Review A*, 2014, 90: 012307
- [12] Stefanak M, Bezdekova I, Jex I. Limit distributions of three-state quantum walks: The role of coin eigenstates. *Physical Review A*, 2014, 90: 012342
- [13] Portugal R, Boettcher S, Falkner S. One-dimensional coinless quantum walks. *Physical Review A*, 2014, 91: 052319
- [14] Wong T G. Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2015, 48(43): 43534
- [15] Venegas-Andraca S E. Quantum walks: A comprehensive review. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(5): 1015-1106
- [16] Liu Yan-Mei, Chen Han-Wu, Liu Zhi-Hao, et al. Scattering quantum walk search algorithm on star graph. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(11): 110201(in Chinese)  
(刘艳梅, 陈汉武, 刘志昊等. 星图上的散射量子行走搜索算法. *物理学报*, 2015, 64(11): 110201)
- [17] Wu Nan, Song Fang-Min, Li Xiang-Dong. Quantum search-based software engineering: An exploratory study. *Science China: Information Sciences*, 2015, 45(5): 623-633 (in Chinese)  
(吴楠, 宋方敏, LI Xiang-Dong. 基于量子搜索的软件工程. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45(5): 623-633)
- [18] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B. Quantum random walk search algorithm. *Physical Review A*, 2003, 67: 052307
- [19] Ambainis A. Quantum walk algorithm for element distinctness. *SIAM Journal on Computing*, 2007, 37(1): 210-239
- [20] Magniez F, Santha M, Szegedy M. Quantum algorithm for the triangle problem. *SIAM Journal on Computing*, 2007, 37(2): 413-424
- [21] Attal S, Petruccione F, Sinayskiy I. Open quantum walks on graphs. *Physics Letters A*, 2012, 276(18): 1545-1548
- [22] Attal S, Petruccione F, Sabot C, Sinayskiy I. Open quantum random walks. *Journal of Statistical Physics*, 2012, 147(4): 832-852
- [23] Sinayskiy I, Petruccione F. Open quantum walks: A short introduction. *Journal of Physics: Conference Series*, 2013, 442(1): 012003
- [24] Sinayskiy I, Petruccione F. Properties of open quantum walks on  $Z$ . *Physica Scripta*, 2012, T151: 014077
- [25] Pawela L, Gawron P, Miszczyk J, Sadowski P. Generalized open quantum walks on apollonian networks. *PLoS One*, 2015, 10(7): e0130967
- [26] Ampadu C. Averaging in  $SU(2)$  open quantum random walk. *Chinese Physics B*, 2014, 23: 030302

[27] Konno N, Yoo H J. Limit theorems for open quantum random walks. *Journal of Statistical Physics*, 2013, 150: 299-319

[28] Attal S, Plantard N G, Sabot C. Central limit theorem for open quantum random walks and quantum measurement records. *Annales Henri Poincaré*, 2015, 16(1): 15-43

[29] Carbone R, Pautrat Y. Open quantum random walks: Reducibility, period, ergodic properties. *Annales Henri Poincaré*, 2014, 15(1): 1-37

[30] Carbone R, Pautrat Y. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *Journal of Statistical Physics*, 2015, 160(5):

1125-1153

[31] Wolf M M. Quantum channels and operations; Guided Tour. <http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf>

[32] Hall P, Heyde C C, Hall P, et al. *Martingale Limit Theory and Its Application*. New York, USA: Academic Press, 1980

[33] Liu C, Petulante N. On limiting distributions of quantum Markov chains. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2011: 1-12

附 录.

定理 1 的证明.

证明.

$$\begin{aligned}
p_{\bar{x}}^{(n)} &= \text{tr}(\rho_{\bar{x}}^{(n)}) \\
&= \text{tr}\left(\frac{1}{2\pi} \int_K^{\oplus} e^{ik\bar{x}} \hat{\rho}^{(n)}(k) dk\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_K^{\oplus} e^{ik\bar{x}} \text{tr}(R_n \hat{\rho}^{(n)}(k)) dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_K^{\oplus} \prod_{t=1}^d e^{ik_{x_t} x_t} \text{tr}\left(\sum_{j=1}^{(2d)^n} \left(\prod_{t=1}^d e^{-ik_{x_t} a_{j_t}}\right) \cdot T_j^\dagger \cdot T_j \rho_0^{(0)}(k)\right) dk \\
&= \sum_{j=1}^{(2d)^n} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_K^{\oplus} \prod_{t=1}^d e^{ik_{x_t} (x_t - a_{j_t})} \text{tr}(T_j \rho_0 T_j^\dagger) dk \right] \\
&= \sum_{j=1}^{(2d)^n} \left[ \prod_{t=1}^d \delta_{x_t = a_{j_t}} \text{tr}(T_j \rho_0 T_j^\dagger) \right]. \tag{证毕.}
\end{aligned}$$

引理 2 的证明.

证明. 对于任意  $\bar{l} \in \mathbb{R}^d$  有

$$\sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle = \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle,$$

因而有

$$\text{tr}\left(\rho_\infty \left(\sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I\right)\right) = 0,$$

所以有

$$\sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I \in \langle \rho_\infty \rangle^\perp.$$

因为  $\rho_\infty$  具有不变性, 有  $(I - \mathcal{M})(\rho_\infty) = 0$  成立, 所以

$$\langle \rho_\infty \rangle^\perp = \text{Ker}(I - \mathcal{M})^\perp.$$

根据引理 1, 有

$$\text{Ker}(I - \mathcal{M})^\perp = \text{Ran}(I - \mathcal{M}^\dagger),$$

所以

$$\sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I \in \text{Ran}(I - \mathcal{M}^\dagger).$$

故存在一个  $L$  使得

$$(I - \mathcal{M}^\dagger)(L) = \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} T_j^\dagger T_j f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I.$$

证毕.

引理 3 的证明.

证明.

$$\begin{aligned}
(I - P)g(\rho, x) &= (I - P)(\text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle) \\
&= \text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle - P(\text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle) \\
&= \text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle - Pg(\rho, x) \\
&= \text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle - \sum_{(\rho', x')} P((\rho, x), (\rho', x')) g(\rho', x') \\
&= \text{tr}(\rho L) + \langle x | \bar{l} \rangle - \left[ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho T_j^\dagger L) f_{x_k}(T_j) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho T_j^\dagger) f_{x_k}(T_j) \langle e_k | \bar{l} \rangle \right] \\
&= \text{tr}(\rho(L - \mathcal{M}^\dagger(L) - \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j^\dagger T_j) f_{x_k}(T_j) \langle e_k | \bar{l} \rangle)) + \langle x | \bar{l} \rangle \\
&= \text{tr}(\rho(-\langle \bar{m} | \bar{l} \rangle I)) + \langle x | \bar{l} \rangle \\
&= -\langle \bar{m} | \bar{l} \rangle + \langle x | \bar{l} \rangle,
\end{aligned}$$

所以有  $(I - P)g(\rho, x) = \langle x | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$ . 证毕.

定理 2 的证明.

证明. 运用鞍差分序列的中心极限定理, 证明分为 3 步:

(1) 给出一组鞍差分序列

根据位置状态随机变量  $X_n$ , 构建一个新的变量  $Y = \langle X_n | \bar{l} \rangle - n\langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$ , 其中  $\bar{l} \in \mathbb{R}^d$ . 取  $\Delta X_n = X_n - X_1$ , 则有

$$Y = \langle X_0 | \bar{l} \rangle + \sum_{k=1}^n (\langle \Delta X_k | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle).$$

根据引理 2 和 3, 有

$$(I - P)g(\rho_n, \Delta X_n) = \langle \Delta X_n | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle,$$

所以

$$\begin{aligned}
Y &= \langle X_0 | \bar{l} \rangle + \sum_{k=1}^n (I - P)g(\rho_k, \Delta X_k) \\
&= \langle X_0 | \bar{l} \rangle + g(\rho_1, \Delta X_1) - Pg(\rho_n, \Delta X_n) +
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^n g(\rho_k, \Delta X_k) - Pg(\rho_{k-1}, \Delta X_{k-1}).$$

取  $R_n = \langle X_0 | \bar{l} \rangle + g(\rho_1, \Delta X_1) - Pg(\rho_n, \Delta X_n)$  和  $M_n =$

$\sum_{k=2}^n g(\rho_k, \Delta X_k) - P g(\rho_{k-1}, \Delta X_{k-1})$ , 那么

$$Y = R_n + M_n.$$

对于  $R_n$ , 由于  $(I-P)g(\rho_n, \Delta X_n) = \langle \Delta X_n | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$  以及  $g(\rho_n, \Delta X_n) = \text{tr}(\rho_n L) + \langle \Delta X_n | \bar{l} \rangle$ , 因而有  $P g(\rho_n, \Delta X_n) = \text{tr}(\rho_n L) + \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$ . 不难验证  $R_n$  是有界的.

对于  $M_n$ . 取  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1} = g(\rho_n, \Delta X_n) - P g(\rho_{n-1}, \Delta X_{n-1})$ ,  $\sigma$  域  $\mathcal{F}_n$  定义为  $\sigma\{\langle \rho_k, X_k \rangle; k \leq n\}$ . 因为  $E(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\langle g(\rho_n, \Delta X_n) | \langle \rho_{n-1}, \Delta X_{n-1} \rangle \rangle - P g(\rho_{n-1}, \Delta X_{n-1})) = 0$ , 所以  $\{\Delta M_n\}$  为鞅差序列.

(2) 证明对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(\Delta M_i^2 \delta(|\Delta M_i| \geq \epsilon \sqrt{n}) | \mathcal{F}_{i-1}) = 0$$

成立.

由于  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1} = g(\rho_n, \Delta X_n) - P g(\rho_{n-1}, \Delta X_{n-1})$ , 根据引理 3, 有  $\Delta M_n = \text{tr}(\rho_n L) - \text{tr}(\rho_{n-1} L) + \langle \Delta X_n | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$ , 因而有

$$\|\Delta M_n\| \leq (1 + \|\bar{m}\|) \|\bar{l}\| + 2\|L\| \infty,$$

即  $\Delta M_n$  有界, 所以当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\delta(|\Delta M_i| \geq \epsilon \sqrt{n}) \rightarrow 0.$$

结论成立.

(3) 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(\Delta M_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2$ .

因为  $\Delta M_i = \text{tr}(\rho_i L) - \text{tr}(\rho_{i-1} L) + \langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle$ , 所以

$$\begin{aligned} (\Delta M_i)^2 = & [(\text{tr}(\rho_i L))^2 - (\text{tr}(\rho_{i-1} L))^2] + \\ & [-2(\text{tr}(\rho_i L) - \text{tr}(\rho_{i-1} L) + \\ & \langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle) \text{tr}(\rho_{i-1} L)] + \\ & [(\langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle)^2 + \\ & 2\text{tr}(\rho_i L)(\langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle)]. \end{aligned}$$

按中括号标识, 将  $(\Delta M_i)^2$  划分三部分

$$(\Delta M_i)^2 = R_1 + R_2 + R_3.$$

分别计算如下 3 个式子:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(R_k | \mathcal{F}_{i-1}), \quad k = 1, 2, 3.$$

(3.1) 根据鞅论, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(R_k | \mathcal{F}_{i-1}) = 0, \quad k = 1, 2.$$

(3.2) 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} E(R_3 | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2$ .

$$\begin{aligned} E(R_3 | \mathcal{F}_{i-1}) = & E(\langle \langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle^2 + \\ & 2\text{tr}(\rho_i L)(\langle \langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle | \mathcal{F}_{i-1}) \\ = & \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho_{i-1} T_j^\dagger) \\ & [(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)^2] + \\ & 2E(\text{tr}(\rho_i L)(\langle \langle \Delta X_i | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle | \mathcal{F}_{i-1})) \\ = & \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho_{i-1} T_j^\dagger) \cdot \\ & [(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)^2] + \\ & 2 \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \text{tr}(T_j \rho_{i-1} T_j^\dagger L)(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle) \\ = & \text{tr}(\rho_{i-1} \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \{T_j^\dagger T_j [(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)^2] + \\ & 2T_j^\dagger L T_j (\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)\}). \end{aligned}$$

由于系统只有惟一不变量子态  $\rho_\infty$ , 即

$$\rho_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i,$$

所以有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(R_3 | \mathcal{F}_{i-1}) \\ = \text{tr}(\rho_\infty \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \{T_j^\dagger T_j [(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)^2] + \\ 2T_j^\dagger L T_j (\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)\}). \end{aligned}$$

令  $\Gamma = \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^{(2d)^n} \{T_j^\dagger T_j [(\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)^2] + 2T_j^\dagger L T_j (\langle f_{x_t}(T_j) \langle e_t | \bar{l} \rangle - \langle \bar{m} | \bar{l} \rangle \rangle)\}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(R_3 | \mathcal{F}_{i-1}) = \text{tr}(\rho_\infty \Gamma).$$

令  $\sigma^2 = \text{tr}(\rho_\infty \Gamma)$ , 综合上述有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E(R_k | \mathcal{F}_{i-1}) = \sigma^2, \quad k = 1, 2, 3.$$

故定理得证.

证毕.



**LIN Yun-Guo**, born in 1979, Ph. D. His research interests include quantum computing and quantum information, model checking.

**LI Yong-Ming**, born in 1966, Ph. D., professor. His research interests include non-classical computation theory, computational intelligence, quantum computing and quantum information, topology over lattices, analysis of fuzzy systems.

## Background

Recently, open quantum random walk has become an increasing hot topic as a quantum generalization of Markov chains on lattices. Quantum walks have been well studied and been extensively used in quantum search algorithm, quantum games, quantum biological systems, etc. Open quantum walks generalize quantum walks under the open quantum environment. The research results show that open quantum walks allow one to incorporate decoherence when considering quantum systems. It has been known that the importance of managing of decoherence has motivated its study in quantum control, quantum walks, etc.

In a series of recent papers about open quantum walks, the researchers focused on its limit behavior. In particular, the central limit theorem has been studied under certain condition. However, these works are limited to a homogenous open quantum random walk, especially, on one-dimensional lattice. Therefore, this paper will study open quantum random walks in the generalized case.

In this paper, we focus on higher dimensional lattices, non-homogenous open quantum random walk. Firstly, we give a simple evolution formula of open quantum random walk. Secondly, by using the fourier transform and the fourier inverse transform, we give the computation formula of the probability distribution of open quantum random walk. Finally, according to the central theorem for maringale difference sequence, we prove a central limit theorem for non-homogenous open quantum random walk on higher dimensional lattices under certain condition, show that the central limit theorem is its special case about a homogenous open quantum random walk on one-dimensional lattice, illustrate the specific process of solving the limit distribution.

The work in this paper is supported in part by the National Natural Science Foundation of China 11271237, 61228305. And it is partially supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities GK201302054.