

动态多目标优化研究综述

刘若辰 李建霞 刘静 焦李成

(西安电子科技大学智能感知与图像理解教育部重点实验室 西安 710071)

摘要 现实生活中,存在许多动态多目标优化问题(Dynamic Multi-objective Optimization Problems, DMOPs),这类问题的目标函数之间相互矛盾,并且目标函数、约束或者参数都可能随着时间的变化而发生变化.这种随时间不断变化的特性,给解决 DMOPs 带来了挑战,算法不仅要能够追踪到最优解,同时还要求算法能够快速地对发生的变化做出响应.本文对动态多目标优化(Dynamic Multi-objective Optimization, DMO)的研究进行了比较全面的综述,具体内容如下:(1)描述了 DMO 的相关理论背景;(2)阐述了 DMOPs 的分类并对现有的基准问题做了分类归纳;(3)详细讨论了 DMO 研究的发展概况;(4)对 DMO 算法的性能评价指标进行了归类介绍;(5)通过实验对比了主流 DMO 算法的性能;(6)总结了 DMO 算法在一些领域的应用;(7)分析了解决 DMOPs 存在的挑战以及诸多难题.

关键词 动态多目标优化;多目标优化;Pareto 最优;测试函数;性能指标;实际应用

中图法分类号 TP301 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2020.01246

A Survey on Dynamic Multi-Objective Optimization

LIU Ruo-Chen LI Jian-Xia LIU Jing JIAO Li-Cheng

(Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract In real life, there are many dynamic multi-objective optimization problems (DMOPs), in which the objective functions restrict each other and the objective functions, constraints or parameters may change over time. This changing property with time brings challenges to solving DMOPs. The algorithm not only needs to track the optimal solution, but also needs to respond to changes in the environment quickly. This paper gives a comprehensive review of the research on dynamic multi-objective optimization (DMO), including the following contents. (1) This paper first introduces the relevant theoretical background of DMO, including the definition of DMOP, the definition of Pareto-optimal set (*PS*) and Pareto-optimal front (*PF*). (2) This paper shows the classification of DMOPs and summarizes the existing benchmark functions according to the different characteristics of problems, for instance the change types, the shape of *PS* or the shape of *PF*, the relationship between the variables, change in the number of objective functions, change in the dimension of the decision vectors, whether there are constraints and so on. (3) Based on the simple analysis of general framework of solving DMOPs, this paper discusses the research status of the dynamic multi-objective optimization algorithms (DMOAs) in detail. When solving a DMOP, if the environment changes, the algorithm must be able to detect the changes of environment sensitively and respond to the changes occurred in the environments effectively; if the environment does not change, the algorithm should track the Pareto optimal solutions of the current environment as quickly and accurately as possible. Therefore, an environmental change detection operator, an

收稿日期:2018-12-27;在线发布日期:2019-11-11. 本课题得到国家自然科学基金(61876141,61373111,61672405,61871306)和陕西省自然科学基金(2019JZ-26)资助. 刘若辰,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算智能、数据挖掘以及模式识别等. E-mail: ruochenliu@xidian.edu.cn. 李建霞,博士研究生,主要研究方向为动态多目标优化. 刘静,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为进化计算、数据挖掘以及网络分析与挖掘. 焦李成,博士,教授,博士生导师,中国计算机学会(CCF)高级会员,主要研究领域为智能感知、图像理解等.

environmental change response strategy and an excellent static multi-objective optimization algorithm are three indispensable parts of a DMOA. Thus, the discussion of the status of DMOAs also based on the above three parts. Specially, the review of response strategies mainly includes the diversity introduction strategy, diversity maintenance strategy, prediction strategy, memory-based strategy, self-adaptive response strategy and some new response strategies based on special models such as transfer learning and support vector machine. It is worth noting that we have analyzed the advantages and disadvantages of each method. (4) The main purpose of performance evaluation is to evaluate the convergence and diversity of DMOAs. In this paper, the performance metrics are classified and introduced according to whether the metric is for evaluation convergence, evaluation diversity or comprehensive evaluation convergence and diversity. (5) This paper compares the performance of some mainstream DMOAs through empirical studies, finding each algorithm has more or less shortcomings and cannot solve every DMOP perfectly. (6) This paper summarizes some practical application cases of DMOAs, such as control problem, scheduling problem, mechanical design problem, image segmentation problem, resource management problem, path optimization problem. (7) Finally, this paper proposes the challenges and the existing problems in solving the DMOPs. On one hand, it is difficult to design efficient and effective environmental change detection operators and environmental change response strategies to solve some complex DMOPs. On the other hand, the research of DMO and practical application are disconnect, most of the existing DMOAs can only handle theoretical DMOPs.

Keywords dynamic multi-objective optimization; multi-objective optimization; Pareto optimal; benchmark functions; performance metrics, practical application

1 引言

在工业应用和科学研究中存在许多多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problems, MOPs), MOPs 需要并行处理几个相互矛盾的目标. 在众多的 MOP 中, 存在一种特殊的 MOPs——DMOPs, DMOPs 具备 MOPs 的问题特点, 同时 DMOPs 会随着时间的变化而发生改变, 例如目标函数, 约束或者参数可能会随着时间的变化而不断发生变化^[1].

对 MOPs 来说, 没有一个最优解能够同时满足优化多个相互矛盾的目标, 处理 MOPs 的目的是找到能够近似同时优化几个目标的折衷解, 即就是 Pareto 最优解集 PS (Pareto-optimal Set)^[2], 而求解 DMOPs 的目标是追踪不同时刻的 PS .

近年来, 越来越多的研究人员开始致力于 DMOPs 的研究, 这是因为动态多目标优化(Dynamic Multi-objective Optimization, DMO)具有重要的理论研究价值, 并且 DMO 在现实生活和工业生产的许多方面都具有非常广泛的应用前景, 下面简单地列举几个动态多目标优化算法(DMO Algorithms, DMOAs)的

典型应用领域.

从交通运输管理层面考虑, 在一个十字路口处, 道路状况、车辆的数目、任务的优先级、突发状况等多种因素都是随时间动态变化的, 如何在综合考虑上述因素的情况下, 管理车辆运行来减少交通拥堵并实现社会效益的最大化就是一类非常典型的 DMOP; 从节能环保层面考虑: 在一个水火电力调度系统中, 如何在总电力需求随时间动态变化的过程中实现发电的总能源成本和污染排放量最小化也是一个 DMOP; 从生产调度领域考虑: 在不断变化的市场需求下, 产品公司如何在生产产品的过程中实现利润的最大化、成本的最小化以及环境污染的最小化, 这就是一个 DMOP.

DMOPs 的问题特性, 给解决 DMOPs 带来了很大的挑战, DMOAs 要准确地检测到发生的变化, 要对发生的变化做出有效地应答, 要较快地找到当前时刻的最优解, 这些问题导致很难设计出适用于各种 DMOPs 的有效算法, 更不要说设计有效的算法用来解决复杂的实际 DMOPs. 因此, DMO 的研究需要投入更多的精力来探索 DMOPs 的特性, 设计高效的算法来解决各种理论问题和实际问题.

本文主要介绍了 DMO 的相关理论背景及

DMOPs 的分类、DMOAs 的发展概况以及性能评价指标、主流 DMOAs 性能对比及 DMOAs 的实际应用案例,在以上内容的基础上本文总结了求解 DMOPs 存在的诸多难题.

2 动态多目标优化的相关理论背景

一个最小化的 DMOP 的定义如下^[3]:

$$\begin{cases} \text{minimize } \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \{f_1(\mathbf{x}, t), f_2(\mathbf{x}, t), \dots, f_m(\mathbf{x}, t)\} \\ \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}, t) \geq 0, \\ h_j(\mathbf{x}, t) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (1)$$

其中, t 是环境(时间)变量, \mathbf{x} 是 R^n 上的决策向量, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 是目标向量, $g(\mathbf{x}, t)$ 和 $h(\mathbf{x}, t)$ 是不等式约束和等式约束.

定义 1. t 时刻, 如果 x_1 和 x_2 满足:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, m\}: f_i(x_1, t) \leq f_i(x_2, t) \\ \wedge \exists j \in \{1, \dots, m\}: f_j(x_1, t) < f_j(x_2, t) \end{aligned} \quad (2)$$

则认为 x_1 支配 x_2 , 记作 $x_1 < x_2$.

定义 2. t 时刻, 不存在任何一个个体 $x' \in R^n$ 支配个体 x , 那么 x 就是问题(1)在 t 时刻的一个 Pareto 最优解. t 时刻, 问题(1)的所有 Pareto 最优解构成了 PS_t , 表示为

$$PS_t = \{x \in R^n \mid \neg \exists x' \in R^n, x' < x\} \quad (3)$$

定义 3. t 时刻, PS_t 在目标空间中的映射称为 PF_t , 表示为

$$PF_t = \{F(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in PS_t\} \quad (4)$$

3 动态多目标优化问题的分类

Farina 等人^[3]提出, 根据 PS 和 PF 动态变化的不同组合, DMOPs 主要分为以下四类:

- (1) Type I: PS_t 改变, PF_t 保持不变;
- (2) Type II: PS_t 和 PF_t 都改变;
- (3) Type III: PS_t 保持不变, PF_t 改变;
- (4) Type IV: PS_t 和 PF_t 都保持不变.

目前, 很多学者已经提出了许多不同 DMOPs, 下面我们将对现有的 DMOPs 进行简单的归纳总结, 如表 1 所示. 所有测试问题的具体定义见附录 A.

表 1 动态多目标优化问题

问题特征	FDA ^[3]	DMOP ^[4]	DIMP ^[5]	HE ^[6]	JY ^[7]	
变化类型(I~IV)	Type I	FDA1, FDA4	DMOP3	DIMP1, DIMP2	HE1~HE10	JY1
	Type II	FDA2, FDA3, FDA5	DMOP2	—	—	JY2~JY4, JY6, JY7
	Type III	—	DMOP1	—	—	JY5, JY8
	Type IV	—	—	—	—	—
带约束优化问题	—	—	—	—	—	
决策变量以不同的速率变化	—	—	DIMP1, DIMP2	—	—	
PF 中解的分布随时间变化	FDA3, FDA5	DMOP3	—	—	JY4	
PF 形状随时间变化	FDA2	DMOP1, DMOP2	—	—	JY2~JY10	
PS 形状随时间变化	—	—	—	—	—	
PF 不连续	—	—	—	HE1, HE2	JY4	
PS 不连续	—	—	—	—	—	
目标函数的个数随时间变化	—	—	—	—	—	
决策向量的维数随时间变化	—	—	—	—	—	
决策变量之间存在非线性关系	—	—	—	HE3~HE10	JY3, JY6, JY7	
每一维决策变量形状不同	—	—	—	HE3~HE10	—	
混合变化	—	—	—	—	JY9, JY10	
问题特征	SJY ^[8]	DCP ^[9]	DSW ^[10]	UDF ^[11]	ZF ^[12]	
变化类型(I~IV)	Type I	SJY1, SJY2	DCP1~DCP7	—	—	ZF8
	Type II	SJY3	—	DSW1~DSW3	UDF1, 2, 4, 5, 8, 9	ZF5~ZF7, ZF9~ZF10
	Type III	SJY4	—	—	UDF3, UDF6, UDF7	—
	Type IV	SJY5	—	—	—	—
带约束优化问题	—	DCP1~DCP7	—	—	—	
决策变量以不同的速率变化	—	—	—	—	—	
PF 中解的分布随时间变化	SJY3, SJY4	—	—	—	—	
PF 形状随时间变化	SJY3, SJY4	—	—	UDF2, UDF4~UDF6	ZF5~ZF7, ZF9~ZF10	
PS 形状随时间变化	—	—	—	UDF4, UDF5	ZF5~ZF10	
PF 不连续	—	—	DSW2	UDF3, UDF6	—	
PS 不连续	—	—	—	—	—	
目标函数的个数随时间变化	—	—	—	—	—	
决策向量的维数随时间变化	—	—	—	—	—	
决策变量之间存在非线性关系	SJY2	—	—	UDF1~UDF9	ZF5~ZF10	
每一维决策变量形状不同	—	—	—	—	—	
混合变化	—	—	—	—	—	

(续 表)

问题特征	T ^[13]	DMZDT ^[14]	CF ^[15]	DTLZ _{Av} ^[16]	ZJZ ^[17]
Type I	—	DMADT1~DMADT4	—	—	—
变化类型(I~IV)	Type II	—	CF1~CF6	—	ZJZ
	Type III	T2	—	—	—
	Type IV	T1, T3, T4	—	—	—
带约束优化问题	—	—	—	—	—
决策变量以不同的速率变化	—	—	—	—	—
PF 中解的分布随时间变化	—	DMZDT4	—	—	—
PF 形状随时间变化	—	—	—	—	ZJZ
PS 形状随时间变化	—	—	—	DTLZ _{Av}	—
PF 不连续	—	DMZDT3	—	—	—
PS 不连续	—	—	—	—	—
目标函数的个数随时间变化	T2	—	CF1~CF6	DTLZ _{Av}	—
决策向量的维数随时间变化	T1	—	—	—	—
决策变量之间存在非线性关系	—	—	—	—	ZJZ
每一维决策变量形状不同	—	—	—	—	—
混合变化	—	—	—	DTLZ _{Av}	—

值得注意的是, 现有的 DMOAs 一般都只是解决前三种类型的 DMOPs, 很少有算法解决 PS 和 PF 都保持不变的问题或者四种变化类型混合出现的 DMOPs.

4 动态多目标优化算法的研究现状

DMOPs 是近 20 年来的新兴问题之一, 求解 DMOPs 具有很大的挑战性, DMOAs 需要同时优化多个目标, 同时还要能够快速精确地检测和响应发生的变化, 较快地找到随时间变化的最优解.

目前, MOPs 已经取得了较好的研究成果, 但对于 DMOPs 的研究深度还不够, 高效求解 DMOPs 的算法还比较少. 近年来越来越多的学者加入到这一研究领域, 提出了很多 DMOAs^[18-22].

DMOAs 能够有效地解决 DMOPs, 必须尽可能地保证以下两点: (1) 如果环境发生变化, 算法必须能够灵敏地检测到环境的变化并且有效地响应环境变化; (2) 如果环境没有发生变化, 算法要尽可能快速地追踪到当前环境的 PS. 因此, 环境变化检测、变化应答机制、静态多目标优化算法是 DMOAs 的重要组成部分. 图 1 给出了 DMOAs 的

一般框架.

4.1 环境变化检测

环境变化检测机制用来检测环境中的变化. 当前变化检测机制的研究主要集中在以下三个方面.

(1) 重评估. 其主要思路是从种群中选取一部分个体, 并对这些个体进行重新评估, 如果相邻两次迭代的目标函数值之间存在差异, 那么我们认为环境中发生了变化. 一般常用的方法是从种群中随机选取一定比例的个体进行重评估^[1,4,12,23-24]. 2016 年, Sahrnoud 和 Topcuoglu 提出了一系列新的变化检测机制 (Sensor-based Change Detection, SBCD)^[25], 这些变化检测方法主要分为两类: 第一类是基于种群的检测方法, 该方法是从种群中选择个体来检测变化; 第二类是不基于种群的选择方法, 在搜索空间中产生一些新个体来检测环境变化. 但是这种方法中选取的用来进行重评估的解的数量会影响算法的复杂度.

(2) 目标函数值数据的分布估计. Richter^[26] 提出的这一检测变化的方法主要思想是将当前代找到的 PS 放入下一代中计算目标函数值得到目标解集, 若当前代的目标解集和新一代的目标解集具有不同的分布, 则证明环境发生了变化. 但是统计分布的相关参数的设定还是一个值得研究的问题.

(3) 稳定状态检测方法. 该方法是 2017 年杨圣祥等人^[27] 提出的, 这种方法也是基于重评估的, 与重评估方法不同的是, 稳态检测方法是将所有个体随机排列, 然后逐一进行重评估, 如果发现某个体重评估存在差异, 则判定环境发生变化, 其余的个体就无

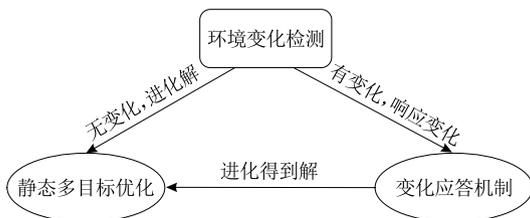


图 1 动态多目标优化算法的一般框架

须评估.但是这种方法的时间复杂度对随机排序的顺序有很强的依赖性.

目前,几乎所有的环境变化检测算子都只是简单地检测出环境发生了变化,而并未明确地检测出环境变化的类型和强度,一个优秀的环境变化检测处理应解决上面的问题来为应答机制的设计做好铺垫,提供指导.

4.2 环境变化应答机制

当变化检测机制检测到变化时,证明一个新的环境即将到来,因此变化应答机制需要起作用来适应环境的变化.当前的变化应答机制主要有以下几类:多样性引入机制、多样性保持机制、预测机制、记忆机制、自适应应答机制以及基于特殊模型的应答机制.

4.2.1 多样性引入机制

在求解 DMOPs 时,由于缺乏足够的多样性,DMOAs 可能无法找到最优解.算法可能已经收敛到一个特定的区域,当新的环境变化发生时,算法可能无法找到新环境的 *PS*.因此,当环境发生变化时,引入多样性可能是有用的.

2007 年,Deb 等人提出两种环境适应策略(随机初始化机制和变异机制),并将其引入到非支配排序遗传算法(Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II, NSGA-II)^[28]中提出 DNSGA-II(Dynamic NSGA-II)^[1]来解决 DMOPs.其中 DNSGA-II-A 是当前环境中找到的 *PS* 的一些个体被初始化产生的新个体替换;DNSGA-II-B 是当前环境找到的 *PS* 中的一些个体发生高斯变异;将两种策略得到的种群作为新环境的初始种群,来实现新环境中种群多样性的引入.作者在 FDA2 和 水火电力调度问题上测试了算法性能,实验表明对于 DNSGA-II-A,随机产生的个体比例为 20%~70%时算法性能相对较好,对于 DNSGA-II-B,变异个体的比例设置为 40%~100%时算法性能相对较好,但是作者采用的测试函数比较少,上面的多样性引入比例并不一定适用于其它的测试函数.

2008 年,Greeff 和 Engelbrecht 将重新初始化的环境变化应答机制集成到向量评估多目标优化算法(Vector Evaluated Particle Swarm Optimization (PSO), VEPSO)^[29]中提出 DVEPSO(Dynamic VEPSO)^[24]来求解 DMOPs,当环境发生变化之后,算法重新初始化部分粒子的位置来响应环境变化,并且算法分析了不同初始化比例对算法性能的影响.通过在 FDA1 和 FDA4 上的实验证明环境发生变

化后初始化所有粒子的位置时算法性能最好.但是仅根据两个测试函数的实验得出这样的结论似乎缺乏可信度.之后,作者在 DVEPSO 的基础上做了一系列更深入的研究,探讨了不同共享机制^[30]、不同存档处理机制^[31]、不同更新机制^[32]以及不同边界处理方法^[33]对算法性能的影响.

2009 年,Lechuga 基于多目标 PSO(Multiple Objective PSO, MOPSO)^[34]提出了 Dynamic MOPSO(DMOPSO)^[35].当环境发生变化时,算法采用两种简单的应答机制:第一种是新环境中每个粒子继承其当前找到的最优位置,另一种是随机产生新环境中所有粒子的初始位置.作者测试了算法在 FDA1 和 FDA2 上的性能,实验结果表明第二种方法的性能优于第一种方法的性能.作者也表明应该在更多的测试函数上验证算法的性能.

2009 年,Goh 和 Tan 为了解决 DMOPs 提出了一种竞争型——合作型协同进化多目标优化算法(Dynamic Competitive-cooperation Coevolutionary Algorithm, D-COEA)^[4],它结合了自然界中的竞争和合作机制,以促进协同进化中的自适应问题的分解.每个子种群将竞争代表多目标优化问题的特定子组成部分,而最终的获胜者将合作进化以获得更好的解,通过这种竞争和合作的迭代过程,不同子种群对各种子组成部分进行优化.当环境发生变化时,启动竞争机制来决定每个子种群是否需要重新初始化.作者通过 FDA1, DMOP1~DMOP3 这四个测试函数验证了算法的性能,实验证明 D-COEA 在 DMOP2 上的性能不是很好.

2017 年,刘若辰等人在多粒子群协同进化算法(Coevolutionary Multi-swarm PSO, CMPSO)^[36]的基础上提出一种新型的 DMOA(CMPSO for DMO, CMPSODMO)^[37],结合一种简单的环境变化应答机制——随机初始化方法来解决 DMOPs.作者验证了算法在 8 个测试函数上的性能,包括 DMOP1、DMOP2、FDA1、FDA3、FDA4、HE3、HE5、ZJZ,实验结果表明算法在 FDA3、HE3 以及 HE5 上性能不好,并且算法的时间复杂度也是一个值得改进的问题.

2018 年,Sahmoud 和 Topcuoglu 提出了一种基于变化类型检测(Type Detection, TD)的 DMOA(TD-based NSGA-II, TD-NSGA-II)^[25]来解决 DMOPs,类型检测机制描述如下:根据环境变化前后非支配解的数目的差异可以判断问题的 *PS* 是否发生变化.如果差异较大,说明 *PS* 发生变化,变化

类型是类型一和类型二,则随机初始化 10% 的个体来代替种群中的个体以此对环境变化做出响应;如果差异较小,说明 PS 未发生变化,变化类型是类型三和类型四,响应环境变化的方法是通过变异算子在种群中添加一个随机扰动来响应环境变化. 作者验证了算法在 7 个测试函数上的性能,包括 FDA1、FDA4、FDA5、DMOP1、DMOP2、SJY4、SJY5,实验

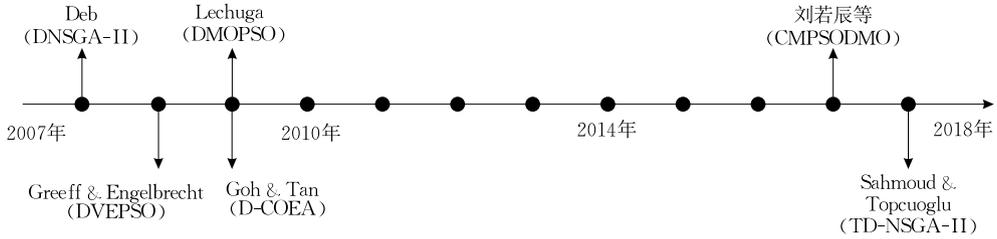


图 2 多样性引入机制的里程碑

4.2.2 多样性保持机制

多样性保持机制是相对于引入多样性机制而言的,这种方法直接将上一时刻的 PS 作为新时刻的初始种群.

2005 年,尚荣华等人基于克隆选择理论提出了一种克隆选择算法(Clonal Selection Algorithm for Dynamic Multi-objective Optimization, CSADMO)^[38]来处理 DMOPs,克隆选择和非一致性变异是该算法的主要算子. CSADMO 直接将当前环境的 PS 作为新环境的初始种群. 作者仅测试了 CSADMO 在 FDA1 和 FDA4 上的性能,而作者也明确说明应该用 CSADMO 来解决更多的 DMOPs,来验证算法的性能优劣.

2006 年,曾三友等人基于正交多目标优化算法(Orthogonal Multi-Objective Evolutionary Algorithm-II, OMOEA-II)^[39],提出了一种动态正交多目标优化算法(Dynamic OMOEA-II, DOMOEAE-II)^[40],该算法直接采用当前环境的 PS 作为新环境的初始种群. 作者测试了 DOMOEAE-II 在 FDA1~FDA3 上的性能,但是并没有和其它的 DMOAs 作对比,因此算法性能的好坏程度没有确定的一个衡量标准.

2014 年,尚荣华等人提出了一种量子免疫克隆协同进化算法(Quantum Immune Clonal Co-evolutionary Algorithm, QICCA)^[41]来求解 DMOPs,在人工免疫系统基本原理的基础上,该算法采用免疫克隆选择来解决 DMOPs. QICCA 直接采用当前环境的 PS 作为新环境的初始种群. 作者测试了算法在 FDA1~FDA5 上的性能,实验结果表明 QICCA 总体性能较好,但是算法的收敛速度还需要提高以使算法适合

表明 TD-NSGA-II 的性能优于 DNSGA-II,但是作者没有对随机初始化比例设置为 10% 给出相应的证明.

多样性引入机制原理简单,易于实现,但是这种方法只是盲目地对环境变化做出反应,有可能会误导种群的进化. 多样性引入机制的发展历程如图 2 所示.

解决实际问题.

多样性保持机制的特点是它只适合解决连续优化问题. 它适合解决环境变化较小的 DMOPs,但是当环境变化剧烈时,它的性能可能很差.

4.2.3 预测机制

在某些情况下,环境变化可能遵循某种可以预测的模式,因此,找到这种模式的规律来预测下一个环境变化也是一种响应环境变化的有效方式.

2006, Hatzakis 和 Wallace 基于排队多目标进化算法(Queueing Multi-Objective Optimizer, QMOO)^[42]提出了 D-QMOO(Dynamic QMOO)^[43]来求解 DMOPs,设计了一种前向预测机制(Feed-forward Prediction Strategy, FPS)来适应环境变化,该预测机制描述如下:当环境变化发生时,新环境的初始种群主要包括三部分个体:通过自回归模型(Auto Regression, AR)利用历史信息预测的解,当前环境的部分非支配解以及产生的部分新的随机解. 作者仅测试了算法在 FDA1 上的性能,也证明了在 FDA1 上预测是有效的,但是作者也表明可以采用其它的预测模型来解决复杂的优化问题,比如人工神经网络、贝叶斯模型等,并且可以研究不同的预测模型所适合的问题类型.

2007 年,周爱民等人采用基于正则模型的分布估计算法(A Regularity Model-based Multiobjective EDA, RM-MEDA)^[44],同时设计了新的变化应答机制——基于预测的种群初始化方法(Predicted Re-Initialization, PRI),提出了 RM-MEDA/PRI (PRI-based RM-MEDA)^[17]来解决 DMOPs,当检测到环境变化时,根据历史环境最优解的位置变化来

预测新环境中个体的位置,并用高斯噪声干扰新种群来避免算法陷入局部最优.作者测试了算法在 FDA1 和 ZJZ 上的性能,实验证明算法性能比较理想.但是实验结果也表明时间窗的宽度对性能有显著影响,时间窗越宽,算法性能越好,时间复杂度越高,因此选择合适的时间窗宽度来平衡算法性能和复杂度是一个值得研究的问题.

2010 年, Koo 等人提出了一种动态多目标进化梯度搜索 (Multi-Objective Evolutionary Gradient Search, DMO-EGS)^[5] 来解决 DMOPs, DMO-EGS 的创新点是设计了一种梯度预测机制,它能够根据历史环境的信息预测下一次环境变化的方向和幅度.作者测试了算法在 FDA1、FDA3、DIMP1 以及 DIMP2 上的性能,实验证明当环境变化较快时,算法性能不理想,并且作者也提出用更好的预测模型来预测梯度进而提高算法的性能.

2013 年,周爱民等人基于 RM-MEDA,同时设计了一种基于种群的预测机制 (Population Prediction Strategy, PPS) 来响应环境变化,提出了 PPS-RM-MEDA (PPS-based RM-MEDA)^[12] 来求解 DMOPs, PPS 描述如下:种群被分为中心点和流形,历史时刻的几个中心点可以预测产生新时刻的中心点,而历史时刻的流形可以用来预测产生新时刻的流形,利用预测得到的中心点和流形可以产生新时刻的初始种群.作者在 FDA1、FDA4、DMOP1、DMOP2 以及新提出的四种测试函数 ZF5~ZF8 上测试了算法性能,实验证明 PPS 优于 FPS 以及随机初始化方法,但是由于前期历史信息积累不足,因此 PPS 前期性能很不好,作者建议结合其他的应答机制组成混合机制来响应环境的变化.

2014 年,刘若辰等人提出了一种非支配排序协同进化多目标算法 (Non-dominated Sorting Cooperative Coevolution Dynamic Multi-objective Optimization based on a Predictive Model, PNSCCDMO)^[45] 来解决 DMOPs,当环境发生变化时,算法采用线性回归模型作为环境变化适应机制,用前两个时刻的 *PS* 预测产生新时刻的初始种群.作者验证了算法在 DMOP1、DMOP2 以及 FDA1~FDA4 上的性能,性能相对比较理想,但是该算法采用的预测机制与 PRI 相同,因此选择多少个历史环境的信息来预测新环境的初始种群是一个值得考虑的问题.

2015 年,郑金华等人在 RM-MEDA 中引入了基于引导个体的预测策略 (Prediction Strategy based on Guide Individual, GIPS),提出了 GIPS-RM-MEDA

(GIPS-based RM-MEDA)^[46] 来解决 DMOPs,该预测机制通过种群中心点的位置变化预测最优解所在的方向,进而产生新环境的初始种群.作者通过大量的测试函数验证了算法性能,包括 FDA1~FDA4、DMOP1~DMOP3、ZF5~ZF9,实验结果表明 GIPS 性能优于 PPS,但是需要指出的是前期的环境变化中收集的信息可能存在误差,导致算法在某几次环境变化上的预测不准确.

2015 年,武燕等人设计了两种定向搜索策略 (Directed Search Strategy, DSS), DSS1 被用作环境变化应答机制, DSS2 是一种局部搜索机制用来加速算法收敛,将 DSS 与基于差分进化 (Differential Evolutionary, DE) 的 NSGA-II^[28] 结合提出 NSGA-II/DE+DSS (DSS-based NSGA-II with DE)^[23] 来求解 DMOPs,当环境发生变化时, DSS1 通过在前两个历史环境的 *PS* 的中心点的移动方向上生成期望个体,来预测产生新环境初始种群; DSS2 通过在连续两次迭代之间 *PS* 的移动方向生成期望个体来加速种群收敛.作者测试了算法在 FDA1、FDA4、DMOP1、DMOP2 以及 ZF5~ZF10 上的性能,实验结果证明 DSS 性能优于 FPS 和 PPS.值得注意的是,如果环境变化很剧烈,则新问题与先前问题不太相关, DSS 可能效果不好.

2015 年,刘若辰等人结合改进的分解进化多目标优化算法 (multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition, MOEA/D)^[47] 和正交预测 (Orthogonal Predictive, OP) 模型提出 OPMOEA/D (OP-based MOEA/D)^[48] 来求解 DMOPs,当环境发生变化时,算法基于正交设计方法的预测模型从前两个时刻的 *PS* 中得到代表性的组合集,然后再从组合集中选择出有利于种群进化的个体作为新时刻初始种群的一部分个体.作者测试了算法在 DMOP1、DMOP2、FDA1 以及 FDA3~FDA5 上的性能,结果表明算法在 DMOP1 和 DMOP2 上性能不佳.

2015 年,刘若辰等人在基于非支配邻居选择的多目标免疫算法 (Nondominated Neighbor Immune Algorithm, NNIA)^[49] 的基础上设计了一种自适应差分交叉算子 (Adaptive Differential Evolution),并且结合一种改进的预测模型 (Predictive Model) 提出 PDNNIA^[50] (Predictive Model and Adaptive Differential Evolution based Dynamic NNIA) 来解决 DMOPs,当环境发生变化时,算法利用前两个时刻的 *PS* 预测产生新环境的初始种群.作者测试

了算法在 DMOP1、DMOP2、FDA1 以及 FDA3 ~ FDA5 上的性能, 结果表明 PDNNIA 不适合解决 PS 保持不变, PF 随时间变化的两目标问题以及 PS 随时间变化, PF 保持不变的三目标问题。

2015 年, 刘若辰等人基于 NNIA, 提出基于预测策略的动态多目标免疫优化算法 (Prediction Strategy-based Dynamic Multiobjective Immune Optimization, PSDMIO)^[51], 当环境发生变化时, 算法利用前几个环境下的 PS 来预测产生新环境的初始种群. 通过在 DMOP1、DMOP2、FDA1 以及 FDA4 测试函数上的实证研究证明 PSDMIO 不适合解决 PS 不随时间变化而 PF 随时间变化的 DMOPs.

2016 年, Muruganantham 等人在 MOEA/D-DE (MOEA/D based on DE)^[52] 中引入基于卡尔曼滤波 (Kalman Filter, KF)^[53] 的预测机制, 提出 MOEA/D-KF (MOEA/D based on KF)^[54] 来求解 DMOPs, 当环境发生变化时, 算法采用一种评分机制来决定采用基于 KF 的预测机制还是采用随机初始化方法. 作者使用 13 个测试函数 (DMOP1、DMOP2、FDA1 ~ FDA5、ZF5 ~ ZF10) 测试了算法的性能, 结果表明 MOEA/D-KF 在 DMOP1、ZF7 以及 ZF9 上性能不理想, 仍需要采取一些措施来改进算法的性能, 比如局部搜索策略、多样性维护策略、方向引导搜索机制等。

2017 年, 邹娟等人在 RM-MEDA 的基础上, 设计了基于中心点和拐点的预测机制 (Prediction Strategy based on Center Points and Knee Points, CKPS) 来响应环境变化, 提出了 CKPS/RM-MEDA (CKPS-based RM-MEDA)^[55] 来解决 DMOPs, 该预测机制描述如下: (1) 通过前两个环境的非支配解集的中心点变化来预测新环境的非支配解集的位置; (2) 该预测机制选择拐点作为每个环境的历史信息, 然后用 AR 自回归模型预测新环境的拐点; (3) 根据问题的复杂程度, 随机产生一部分个体来增加种群的多样性; 将上面三部分个体合成一个种群作为新环境的初始种群. 作者测试了算法在 DMOP1 ~ DMOP3, FDA1 ~ FDA4 以及 ZF5 ~ ZF10 上的性能, 结果表明 CKPS 在部分测试函数上性能不如 PPS. 作者也表明如何更好地分割拐点, 更好地跟踪 PF , 从而更好的体现拐点的优势, 是未来研究的另一项重要工作。

2017 年, 丁进良等人在 NAGA-II^[28] 中引入新的预测机制, 提出了基于参考点预测的 DMOA

(Prediction Strategy for Dynamic Multi-objective Optimization Algorithm based on Reference Point, PDMOP)^[56] 来解决 DMOPs, 该预测机制描述如下: 对关联到相同参考点的个体建立时间序列, 并对这些时间序列通过线性回归模型预测产生新环境下的初始种群从而实现对环境变化做出响应. 作者通过 4 个测试函数 FDA1, FDA3 ~ FDA5 验证了算法的性能, PDMOP 能够较好地适应不同环境的动态变化. 但是实验采取的测试样例不充分, 应该在更复杂的测试函数上验证算法的性能。

2017 年杨圣祥等人提出了一种新型的稳态泛化 DMOA (Steady-state and Generational Evolutionary Algorithm, SGEA)^[27] 来求解 DMOPs, 其以稳态方式检测环境变化并响应环境变化, 当检测到环境变化时, 新环境初始化种群包括两部分: 一部分个体是当前环境中分布较好的个体, 另一部分个体通过最优解的移动方向和移动步长来预测产生. 作者在 FDA 系列和 DMOP 系列问题上测试了算法的性能, 结果表明 SGEA 能够有效地跟踪随时间变化的 PF , 但如果问题的变量之间联系比较紧密或者环境的变化导致了显著的多样性损失时, SGEA 的性能可能不是很理想。

2017 年, 郑金华等人在 RM-MEDA 中引入了一种混合多样性保持机制 (Diversity Maintenance Strategy, DMS), 提出了 DMS-RM-MEDA (DMS-based RM-MEDA)^[57] 来解决 DMOPs, 该预测机制描述如下: 首先基于中心点的移动方向, 预测产生接近下一个 PF 的一些个体, 其次采用逐步搜索的方法在决策空间中生成一些分布均匀的个体, 最后在下一个可能的 PS 区域内随机产生一些个体, 将上面产生的个体合并到一个种群中通过非支配排序产生新环境的初始种群. 作者通过大量的测试函数测试了算法的性能, 包括 FDA ~ FDA4, DMOP1 ~ DMMOP3, ZF5 ~ ZF9, 实验结果表明 DMS-RM-MEDA 在大多数测试问题上表现良好, 除了 FDA2. 同时作者也提出使用机器学习中其它预测方法来预测新环境的 PS 是一个值得研究的方向。

2018 年, 巩敦卫等人设计了一种多方向预测机制 (Multi-directional Prediction, MDP) 结合粒子群优化算法提出 MDP-PSO (MDP-based PSO)^[58] 来解决 DMOPs, MDP 利用时间序列模型预测代表性个体的多个进化方向, 为种群的进化提供指导. 作者测试了算法在 FDA1 ~ FDA5, JY5, ZF8 上的性能, 结果表明在处理复杂 DMOPs 时, MDP-PSO 得到

的解的多样性不好.

2018 年,陈得宝、邹峰等人^[59]提出了一种基于模糊推理和一步预测的混合种群预测策略(Population Prediction Strategy based on Fuzzy Inference and One-step Prediction, FIOPPS)来响应环境变化,同时提出 MOTLBO/D(Multi-objective Teaching Learning-based Optimization with Decomposition),主要思路是将多目标分解机制引入到基于教学的优化算法(Teaching Learning-Based Optimization algorithm, TLBO)中来保持种群多样性.通过在

FDA1~FDA3, DMOP1~DMOP3 以及 ZF5~ZF9 上的数值实验,作者发现 FIOPPS 并不能实现在所有的测试函数上都表现良好.并且作者指出算法设计应该考虑如何利用较少的特征个体来预测解集的变化趋势,以减少时间复杂度和空间复杂度.

基于预测的应答机制特点是:如果每次预测是足够可靠的,那么这种应答机制将非常有效.然而错误的预测可能会误导进化搜索.通常,基于预测的策略对具有周期性环境变化的 DMOPs 更有效.

预测机制的发展里程碑如图 3 所示.

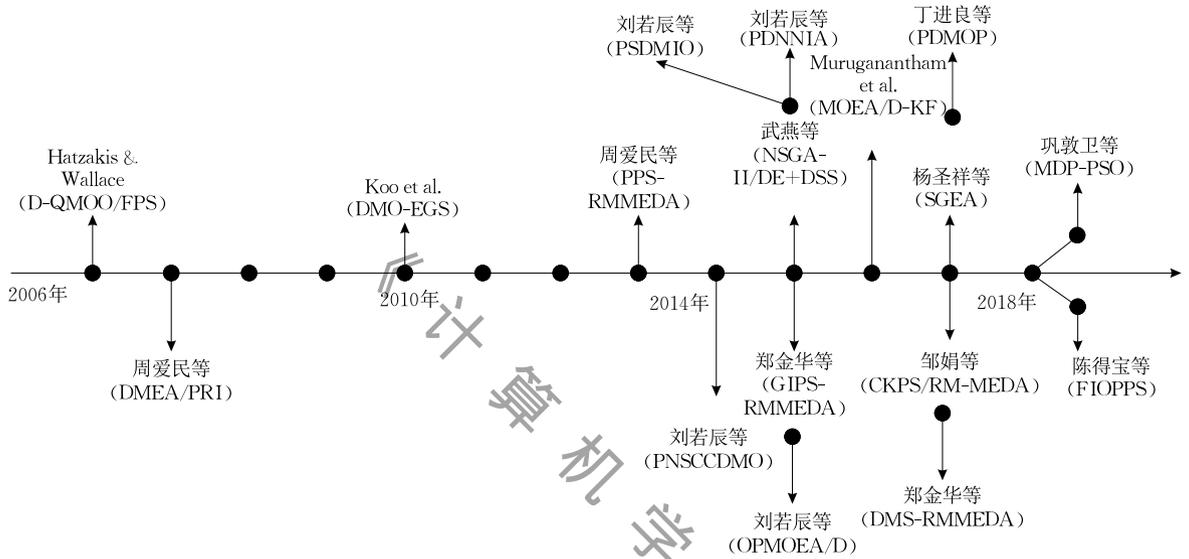


图 3 预测机制的发展里程碑

4.2.4 记忆机制

基于记忆的回答机制存储历史环境中找到的 PS , 并在新环境中重新使用存储的解.

2011 年, Zhang 和 Qian^[9] 设计了动态约束多目标优化人工免疫系统(Dynamic Constrained Multi-objective Optimization Artificial Immune System, DCMOAIS)来处理 DMOPs. 在 DCMOAIS 中, T 模块根据历史信息判断环境变化并初始化种群. B 模块用于搜索当前环境的 PS , M 模型存储所有非支配解, 当发生变化时, M 模型协助 T 模型初始化种群. DCMOAIS 被用来解决带约束 DMOPs, DCP1~DCP7 以及三种实际优化问题(动态焊接梁设计问题、动态水电调度问题以及动态减速机问题), 实验证明 DCMOAIS 适合解决低维优化问题.

2016 年, Sahmoud 和 Topcuoglu 将记忆机制与 NSGA-II^[28] 相结合, 提出了一种基于记忆机制的 DMOA(Memory-based NSGA-II, MNSGA-II)^[60], 该算法利用记忆机制存储大量的非支配个体, 当新的环境变化发生时, 存储的个体被重新使用作

为新环境初始种群中的个体. 作者通过 SJY1~SJY3 测试了算法性能, 结果表明 MNSGA-II 性能不如 D-COEA, 算法性能有待改进.

基于记忆的变化应答机制有助于解决有周期性变化的 DMOPs, 但是存在的缺点是: (1) 在内存中存储历史信息以及从内存中提取有用的信息需要一定的计算量; (2) 该应答机制只适用于求解周期性变化的 DMOPs.

4.2.5 自适应应答机制

为了更好地解决 DMOPs, 研究者提出了自适应应答机制来响应环境变化.

2014 年, 刘敏等人提出了一种自适应多样性引入(Adaptive Diversity Introduction, ADI)机制^[61], 算法根据环境变化的强度自适应地确定多样性引入的比例. 作者仅通过 FDA1 测试了算法的性能, 实验表明自适应地引入多样性优于确定多样性引入比例. 当时这种自适应应答机制只是对多样性引入机制的一种自适应处理, 可以考虑预测机制、记忆机制以及混合机制的自适应处理, 或许算法性能会更好.

2017年, Azzouz等人提出了一种记忆机制、局部搜索策略和随机初始化策略相结合的自适应混合应答机制, 结合 NSGA-II^[28] 提出一种基于变化强度的自适应种群管理机制的 DMOA (Dynamic NSGA-II based on Adaptive Hybrid strategy, A-Dy-NSGA-II)^[62] 以有效地处理 DMOPs, 该算法的关键是通过检测当前种群在新环境中的匹配程度来计算环境变化的强度, 然后根据环境变化的强度来确定随机初始化产生新个体以及从历史环境的最优解中选择个体的数目, 从而形成新环境的初始种群以加速算法的收敛. FDA1 和 FDA2 测试函数上的数值实验证明算法性能良好, 但是这种自适应应答机制只是做了记忆机制以及多样性引入机制的混合自适应处理, 易于实现, 算法性能或许不是最理想的.

到目前为止, 关于自适应机制的研究仍处于起步阶段, 还没能提出非常有效的自适应应答机制.

4.2.6 基于特殊模型的应答机制

现在, 很多学者提出了新的特殊模型来解决 DMOPs, 比如支撑向量机、迁移学习等.

2016年, Tan等人基于 MOEA/D 提出了一种 DMOA (Inverse Modeling-based MOEA/D, IM-MOEA/D)^[63], 该算法利用线性逆模型 (Inverse Modeling, IM) 来指导算法的搜索过程. 通过在 FDA1, FDA3 等大量测试函数上的实验, 作者发现 IM 可以减少用于检测变化的适应度评估的数量, 但是算法的收敛性还有待提高.

2017年, 江敏等人结合迁移学习 (Transfer Learning) 和进化算法提出了一种基于迁移学习的 DMOA (Transfer Learning-based DMOEA, Tr-DMOEA)^[64], 该算法采用迁移学习作为工具产生新环境的初始种群, 采用历史经验来加速种群的进化. Tr-DMOEA 在 FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9 上的数值实验验证了将迁移学习技术引入动态优化算法中为解决 DMOPs 提供了新思路, 但是算法时间复杂度较高, 算法的性能还有待提高.

2018年, 邹娟、杨圣祥等人提出了一种基于动态演化环境 (Dynamic Evolutionary Environment, DEE) 模型的 DMOA (DEE-based DMOEA, DEE-DMOEA)^[65], 当环境没有改变时, 该算法利用进化环境来记录进化过程中产生的知识和信息, 并且反

过来用知识和信息指导搜索. 当检测到变化时, 该算法通过建立动态演化环境模型, 帮助种群适应新环境. 作者通过 12 个 DMOPs 测试了算法性能, 这 12 个函数分别是 FDA1, FDA4, DMOP1, DMOP2, JY1, JY5 和 ZF5 ~ ZF10, 实验结果表明 DEE-DMOEA 性能良好, 仅在 ZF5 上性能相对不理想. 但是设计更精确的动态演化环境模型仍是未来主要的研究方向.

2018年, 江敏等人结合 NSGA-II^[28] 和支撑向量机 (Support Vector Machine, SVM), 提出了基于 SVM 的 DMOA (SVM-based DMOEA, SVM-DMOEA)^[66], 该算法利用得到的 PS 对 SVM 进行训练, 然后利用训练好的 SVM 对下一时刻的动态优化问题的个体进行分类, 从而能够生成由训练好的 SVM 识别的不同个体组成的初始种群. 作者在大量的测试函数上验证了算法性能, 包括 FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9, 实验结果表明 SVM-DMOEA 性能良好, 但是 SVM-DMOEA 只是将 SVM 引入 DMO 的一个启发性的工作, 如何在线训练 SVM 仍是一个挑战性的工作.

2018年, 江敏等人提出了一种基于域适应 (Domain Adaptation, DA) 和非参估计 (Nonparametric Estimation, NE) 的动态多目标分布估计算法 DANE-EDA (dynamic EDA based on DA and NE)^[67], 该算法的独特之处在于它尝试在一个框架下统一重要性采样、非参数密度估计、概率预测机制和域自适应技术来解决 DMOPs. 作者测试了 DANE-EDA 在 FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9 上的性能, 实验结果表明算法收敛性较好, 但是算法的鲁棒性和计算速度有待提高.

基于特殊模型的应答机制的优点是为解决 DMOPs 提供了新的思路, 但是算法的计算复杂度还是值得深入研究的问题.

上面介绍的所有应答机制可简单总结如表 2 所示. 从表 2 可以看出 FDA 系列和 DMOP 系列函数是使用较为广泛的测试问题. 目前, 大部分的研究工作都存在一个共性: 对于不同类型的环境变化, 算法的性能有所差异, 而一个优秀的应答机制应该能够用来处理不同类型的变化, 更有甚者能够用来处理未知类型的环境变化.

表 2 环境变化应答机制

应答机制分类	算法名称	测试函数	特点
多样性引入机制	DNSGA-II	FDA2,水火电力调度问题	原理简单,易于实现,但是这种方法只是盲目地对环境变化做出反应,有可能会误导种群的进化
	DVEPSO	FDA1, FDA4	
	DMOPSO	FDA1, FDA2	
	D-COEA	FDA1, DMOP1~DMOP3	
	CMPSODMO	DMOP1, DMOP1, FDA1, FDA3, FDA4, HE3, HE5, ZJZ	
	TD-NSGA-II	FDA1, FDA4, FDA5, DMOP1, DMOP2, SJY4, SJY5	
多样性保持机制	CSADMO	FDA1, FDA4	适合解决连续优化问题,但是当环境变化剧烈时,它的性能可能很差
	DOMOEA-II	FDA1~FDA3	
	QICCA	FDA1~FDA5	
预测机制	D-QMOO	FDA1	如果每次预测结果足够可靠,那么预测机制将非常有效.但是错误的预测可能会误导进化搜索
	RM-MEDA/PRI	FDA1, ZJZ	
	DMO-EGS	FDA1, FDA3, DIMP1, DIMP2	
	PPS-RM-MEDA	FDA1, FDA4, DMOP1, DMOP2, ZF5~ZF8	
	PNSCCDMO	DMOP1, DMOP2 以及 FDA1~FDA4	
	GIPS-RM-MEDA	FDA1~FDA4, DMOP1~DMOP3, ZF5~ZF9	
	NSGA-II/DE+DSS	FDA1, FDA4, DMOP1, DMOP2, ZF5~ZF10	
	OPMOEA/D	DMOP1, DMOP2, FDA1, FDA3~FDA5	
	PDNNIA	DMOP1, DMOP2, FDA1, FDA3~FDA5	
	PSDMIO	DMOP1, DMOP2, FDA1, FDA4	
	MOEA/D-KF	DMOP1, DMOP2, FDA1~FDA5, ZF5~ZF10	
	CKPS/RM-MEDA	DMOP1~DMOP3, FDA1~FDA4, ZF5~ZF10	
	PDMOP	FDA1, FDA3~FDA5	
	SGEA	FDA1~FDA5, DMOP1~DMOP3	
	DMS-RM-MEDA	FDA1~FDA4, DMOP1~DMOP3, ZF5~ZF9	
MDP-PSO	FDA1~FDA5, JY5, ZF8		
FIOPPS	FDA1~FDA3, DMOP1~DMOP3, ZF5~ZF9		
记忆机制	DCMOAIS	DCP1-DCP7, 动态焊接梁设计问题、动态水电调度问题以及动态减速机问题	适合解决周期性变化的 DMOPs,但是在内存中存储历史信息以及从内存中提取有用的信息需要一定的计算量
	MNSGA-II	SJY1-SJY3	
自适应应答机制	ADI	FDA1	自适应机制的研究仍处于起步阶段,还没能提出非常有效的自适应机制
	A-Dy-NSGA-II	FDA1, FDA2	
基于特殊模型的应答机制	IM-MOEA/D	FDA1, FDA3	为解决 DMOPs 提供了新的思路,但是算法的计算复杂度还值得深入研究
	Tr-DMOEA	FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9	
	DEE-DMOEA	FDA1, FDA4, DMOP1, DMOP2, JY1, JY5, ZF5~ZF10	
	SVM-DMOEA	FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9	
	DANE-EDA	FDA4, FDA5, DMOP2, DMOP3, DIMP2, HE2, HE7, HE9	

4.3 静态多目标优化算法

从式(1)可以看出,当时间变量 t 保持不变时,DMOP 就转变为了一个 MOP. 一个高效的静态多目标优化算法能够帮助算法在下次环境变化到来之前,快速、及时地追踪到当前环境的 PS. 目前很多的 DMOAs 都是在经典的多目标优化算法,如 NSGA-II^[28]、MOPSO^[34]、RM-MEDA^[44]、VEPSO^[29]、MOEA/D^[47] 中引入合适的环境变化检测算子和变化应答机制来解决 DMOPs, 并且也都取得了不错的效果. 关于静态多目标优化算法这一领域的进展已经有很多综述提到,我们不再赘述.

5 动态多目标优化算法性能评价指标

随着 DMOAs 的不断提出,如何评价一个 DMOA 性能的好坏也成为重要的研究方向,当

算法解决 DMOPs 时,需要通过性能度量指标来量化算法的性能,并将一种算法的性能与其他算法的性能进行量化比较. 常用的性能度量可以概括为以下三类.

5.1 准确性度量指标

(1) 世代距离 GD (Generational Distance)

GD ^[68] 通过度量算法所获得的 Pareto 前沿与真实 Pareto 前沿之间的距离来评价算法的收敛性, GD 的表达式如下:

$$GD_t(PF_t, PF_t^*) = \frac{\sum_{v \in PF_t} d(v, PF_t^*)}{|PF_t|} \quad (5)$$

式中 PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿, $d(v, PF_t^*)$ 是 PF_t 上的个体 v 与 PF_t^* 中距离 v 最近的个体之间欧式距离. 可以看出, GD 的评价方法是对于算法所获得

的 Pareto 前沿 PF_t 中每个个体, 在标准 Pareto 前沿 PF_t^* 中找到与它距离最近的个体并计算他们之间的欧式距离, 之后将所有欧式距离求和相加再取平均值, 因此 GD 值可以评价 PF_t 与 PF_t^* 之间的接近程度, GD 值越小说明算法收敛性越好。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 GD 的平均值为

$$\overline{GD} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} GD_t \quad (6)$$

(2) 成功率 SR (Success Ratio)

$SR^{[10]}$ 用来度量算法所获得的 PS 在目标空间中的映射占标准 Pareto 前沿的成員的比例, 其表达式如下所示:

$$SR_t = \frac{|\{x | f(x) \in PF_t^*\}|}{|PF_t|} \quad (7)$$

式中 PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿. SR 越大说明算法的性能越好。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 SR 的平均值为

$$\overline{SR} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} SR_t \quad (8)$$

(3) Variable space GD (VD)

Goh 和 Tan^[4] 提出了一种变量空间 GD 指标 VD , 定义如下:

$$VD_{\text{offline}} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_T} \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} VD(\tau) \cdot I(\tau) \quad (9)$$

$$I(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq \tau_T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

$$VD(\tau) = \frac{1}{|PS|} \cdot \left(|PS| \sum_{i=1}^{|PS|} d_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

其中, τ 是当前迭代次数, τ_T 是环境变化的频率, $|PS|$ 是第 τ 代种群中 Pareto 解的个数, d_i 是决策空间中 PS 上的第 i 个个体与理想 PS 中距离该个体最近的个体之间欧式距离. VD_{offline} 值越小说明算法收敛性越好。

(4) weighted VD (VD_{weighted})

DMOAs 的性能在每次独立运行的前几次环境中的性能或许会很差, 因此, Koo 等人^[5] 提出了一种加权平均方法来强调算法的后期性能, 定义如下:

$$VD_{\text{weighted}} = \frac{2}{T(T+1)} \sum_{t=1}^T t \cdot VD(t \cdot \tau_T) \quad (12)$$

其中, T 是环境变化的总次数. VD_{weighted} 值越小说明算法收敛性越好。

(5) 两集覆盖度 SC (Set Coverage)

$SC^{[69]}$ 被称为 C -度量, 用来衡量集合 B 中个体被

集合 A 中的个体支配的比例, 其表达式如下所示:

$$C_t(A, B) = \frac{|b \in B | \exists a \in A : a < b|}{|B|} \quad (13)$$

$C_t(A, B) = 1$ 表明 t 时刻集合 B 中的所有个体都被集合 A 中的个体支配, $C_t(A, B) = 0$ 表明 t 时刻集合 B 中的所有个体都不被集合 A 中的个体支配. 假设 PF_A 和 PF_B 分别是两个不同的算法 A 和 B 得到的 Pareto 前沿, 如果 $C_t(PF_A, PF_B) = 1$ 并且 $C_t(PF_B, PF_A) < 1$, 那么证明 t 时刻算法 A 的性能优于算法 B 的性能。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 $C(A, B)$ 的平均值为

$$\overline{C(A, B)} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} C_t(A, B) \quad (14)$$

5.2 多样性度量指标

(1) 间距^S (Spacing, S)

Schott^[70] 提出了一种评价指标——间距 (S) 来度量算法所获得的 Pareto 前沿中的个体的是否分布均匀, 表达式如下:

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{|PF_t| - 1} \sum_{i=1}^{|PF_t|} (d_i - \bar{d})^2} \quad (15)$$

$$d_i = \min_{k=1, \dots, |PF_t|, k \neq i} \left(\sum_{j=1}^m |PF_t(i, j) - PF_t(k, j)| \right) \quad (16)$$

式中 PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿, d_i 是 PF_t 中第 i 个个体与 PF_t 中和个体 i 最近的个体之间的欧式距离, \bar{d} 是 d_i 的平均值. S 可以评价 PF_t 中个体的分布性, S 值越小说明算法所得到的 Pareto 前沿分布越均匀。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 S 的平均值为

$$\bar{S} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} S_t \quad (17)$$

(2) 间距^D (Spacing)

Deb^[28] 提出了另一种新的间距指标 Δ 来度量算法所获得的 Pareto 前沿中的个体是否分布均匀, 表达式如下:

$$\Delta_t = \frac{\sum_{k=1}^m d_k^e + \sum_{i=1}^{|PF_t|} |(d_i - \bar{d})|}{\sum_{k=1}^m d_k^e + |PF_t| \times \bar{d}} \quad (18)$$

式中 PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿, d_i 是 PF_t 中第 i 个个体与 PF_t 中和个体 i 最近的个体之间的欧式距离, \bar{d} 是 d_i 的平均值, d_k^e 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿 PF_t 与标准 Pareto 前沿 PF_t^* 的端点之间的距离. Δ 可以评价 PF_t 中个体的分布

性, Δ 值越小说明算法所得到的 Pareto 前沿分布越均匀。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 Δ 的平均值为

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} \Delta_t \quad (19)$$

(3) 最大覆盖度 MS(Maximum Spread)

$MS^{[69]}$ 用来衡量算法所获得的 Pareto 前沿覆盖标准 Pareto 前沿的程度, 其表达式如下所示:

$$MS_t = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\min[\overline{PF_{ti}}, PF_{ti}^*] - \max[\underline{PF_{ti}}, \underline{PF_{ti}^*}]}{\overline{PF_{ti}} - \underline{PF_{ti}^*}} \right]^2} \quad (20)$$

PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿. 式中 $\overline{PF_{ti}}$ 和 $\underline{PF_{ti}}$ 分别是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿的第 i 个目标的最大值和最小值, $\overline{PF_{ti}^*}$ 和 $\underline{PF_{ti}^*}$ 分别是 t 时刻真实 Pareto 前沿的第 i 个目标的最大值和最小值, MS 越大说明算法的性能越好。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 MS 的平均值为

$$\overline{MS} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} MS_t \quad (21)$$

(4) weighted MS(MS_{weighted})

基于 MS , Koo 等人^[5] 提出了一种加权平均方法来强调算法的后期性能, 定义如下:

$$MS_{\text{weighted}} = \frac{2}{T(T+1)} \sum_{t=1}^T t \cdot MS_t \quad (22)$$

其中, T 是环境变化的总次数. MS_{weighted} 值越大说明算法收敛性越好。

(5) 覆盖范围 CS(Coverage Scope)

$CS^{[9]}$ 用来量化非支配解集的平均宽度或覆盖范围, 定义为

$$CS_t = \frac{1}{|PF_t|} \sum_{i=1}^{|PF_t|} \max\{\|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\|\} \quad (23)$$

式中 $j=1, 2, \dots, |PF_t|$, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿. CS 值越大, 说明算法获得的非支配解集的覆盖范围越大。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 CS 的平均值为

$$\overline{CS} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} CS_t \quad (24)$$

(6) 基于参考向量的多样性指标

2017 年, 蔡昕焯等人^[71] 提出了一种基于参考向

量的多样性指标 DIR (Diversity Indicator based on Reference vectors). 首先在目标空间中产生一组均匀分布的参考向量 $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^M$, 然后在 t 时刻的 PS 中找到每个参考向量 λ^i 最接近的个体 S^j , 如果 S^j 是最接近参考向量 λ^i 的个体, 则认为 S^j 覆盖 λ^i 所在的区域, 每个个体所覆盖的参考向量的个数组成了一个覆盖向量 $\mathbf{C} = (C^1, C^2, \dots, C^N)$, DIR 根据 \mathbf{C} 的方差来判断算法的性能, 其值越小, 说明算法所得到的 Pareto 前沿分布越均匀. DIR 定义如下所示:

$$DIR_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C^i - \bar{C})^2}}{\frac{M}{N} \sqrt{N-1}} \quad (25)$$

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 MS 的平均值为

$$\overline{DIR} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} DIR_t \quad (26)$$

5.3 综合度量指标

(1) 反向世代距离 IGD (Inverted Generational Distance)

$IGD^{[72]}$ 通过度量真实 Pareto 前沿与算法所获得的 Pareto 前沿之间的接近程度来评价算法的收敛性和多样性, IGD 指标定义如下:

$$IGD_t(PF_t^*, PF_t) = \frac{\sum_{v \in PF_t^*} d(v, PF_t)}{|PF_t^*|} \quad (27)$$

式中 PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿, $d(v, PF_t)$ 是 PF_t^* 上的个体 v 与 PF_t 中距离 v 最近的个体之间的欧式距离. 可以看出, IGD 的评价方法是对于标准 Pareto 前沿 PF_t^* 中每个个体在算法所获得的 Pareto 前沿 PF_t 中找到与它距离最近的点并计算它们之间的欧式距离, 之后将所有欧式距离求和相加再取平均值, 因此 IGD 不仅可以评价 PF_t^* 与 PF_t 之间的接近程度, 还可以评价 PF_t 中个体的分布性, IGD 值越小说明算法所得到的 Pareto 前沿收敛性越好, 分布越均匀。

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 IGD 的平均值为

$$\overline{IGD} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} IGD_t \quad (28)$$

(2) 超体积 HV (Hypervolume)

$HV^{[73]}$ 衡量算法所获得的 PS 在目标空间所覆盖的范围大小, 该指标可以同时衡量收敛性和多样性, 计算公式如下:

$$HV_i = \text{volume} \left(\bigcup_{i=1}^{|PF_t|} v_i \right) \quad (29)$$

式中 PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿, v_i 是由参考点和个体 i 形成的超体积. HV 越大说明算法所得到的 Pareto 前沿收敛性越好, 分布越均匀.

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 HV 的平均值为

$$\overline{HV} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} HV_t \quad (30)$$

(3) 超体积比率 HVR (Hypervolume Rate)

HVR ^[68] 的表达式如下所示:

$$HVR_t = \frac{HV(PF_t)}{HV(PF_t^*)} \quad (31)$$

式中 PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿. HVR 本质上是将 HV 归一化, 并且假定 HV 的最大值是标准 Pareto 前沿所对应的超体积值. 同 HV , HVR 越大说明算法所得到的 Pareto 前沿收敛性越好, 分布越均匀. 值得注意的是, 在计算 HV 和 HVR 时, 选择每个目标上最差的函数值的组合作为参考点.

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 HVR 的平均值为

$$\overline{HVR} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} HVR_t \quad (32)$$

(4) 超体积差异 HVD (Hypervolume Difference) HVD ^[17] 的表达式如下所示:

$$HVD_t = HV(PF_t^*) - HV(PF_t) \quad (33)$$

式中 PF_t^* 是 t 时刻的标准 Pareto 前沿, PF_t 是 t 时刻算法所获得的 Pareto 前沿. HVD 越小说明算法所得到的 Pareto 前沿收敛性越好, 分布越均匀.

假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 HVD 的平均值为

$$\overline{HVD} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} HVD_t \quad (34)$$

(5) Averaged Hausdorff Distance (Δ^p)

由于算法找到的最优解可能存在异常值, Schutze 等人^[74] 基于 IGD 和 GD 设计了一种将异常值考虑在内的性能指标 Δ^p , 如下所示:

$$\Delta_t^p(PF_t, PF_t^*) = \max(GD_t(PF_t, PF_t^*), IGD_t(PF_t^*, PF_t)) \quad (35)$$

Δ^p 值越小, 证明算法性能越好. 假定环境变化 T_{\max} 次, 则所有 T_{\max} 个环境的 Δ^p 的平均值为

$$\overline{\Delta^p} = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{t=1}^{T_{\max}} \Delta_t^p \quad (36)$$

表 3 呈现了以上性能指标的适用条件以及第 4 节中介绍的算法所使用的性能评价指标. 从表 3 可以总结出目前 IGD 是最常用的性能评价指标.

表 3 性能指标

指标名称	算法	适用条件	
准确性度量 指标	\overline{GD}	D MOPSO, QICCA, OP MOEA/D, PDNNIA, DMS-RM-MEDA, IM-MOEA/D, DEE-DMOEA	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	\overline{SC}	—	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	VD_{offline}	D-COEA	只适合理想 Pareto 解集已知的问题
	VD_{weighted}	DMO-EGS	只适合理想 Pareto 解集已知的问题
	$C_t(A, B)$	PSDMIO, DCMO AIS	—
多样性度量 指标	\overline{S}	DVEPSO, DMOPSO, CMPSODMO, TD-NSGA-II, QICCA, PNSCCDMO, PSDMIO, OP MOEA/D, PDNNIA, SGEA, DMS-RM-MEDA, MDP-PSO, DCMO AIS	—
	$\overline{\Delta}$	DOMOEA-II	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	\overline{MS}	TD-NSGA-II, QICCA, A-Dy-NSGA-II	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	MS_{weighted}	DMO-EGS	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	\overline{CS}	DMOPSO, DCMO AIS, DANE-EDA	—
	\overline{DIR}	—	—
综合指标	\overline{IGD}	CMPSODMO, TD-NSGA-II, RM-MEDA/PRI, PPS-RM-MEDA, PNSCCDMO, GIPS-RM-MEDA, NSGA-II/DE+DSS, MOEA/D-KF, CKPS/RM-MEDA, PDMOP, SGEA, DMS-RM-MEDA, MDP-PSO, FIOPPS, MNSGA-II, ADI, A-Dy-NSGA-II, IM-MOEA/D, Tr-DMOEA, DANE-EDA, SVM-DMOEA, DEE-DMOEA	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	\overline{HV}	DVEPSO	—
	\overline{HVR}	DNSGA-II, TD-NSGA-II, PDMOP, A-Dy-NSGA-II	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	\overline{HVD}	RM-MEDA/PRI, CKPS/RM-MEDA, SGEA, MDP-PSO, FIOPPS	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题
	$\overline{\Delta^p}$	MOEA/D-KF	只适合标准 Pareto 前沿已知的问题

6 主流算法性能对比

本节通过实证研究讨论了 5 种主流 DMOAs 的算法性能,分别是 DNSGA-II-A^[1],DNSGA-II-B^[1],FPS-RM-MEDA (FPS-based RM-MEDA)^[12],PPS-RM-MEDA^[12] 和 SGEA^[27]. 测试函数选择 FDA 系列和 DMOP 系列的所有问题,这些测试函数的动态特性是根据下面的公式实现的.

$$t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor \quad (37)$$

其中, n_t 代表环境变化的强度, τ_t 代表环境变化的频率.

为了测试算法在不同环境变化类型下的性能,我们将 (τ_T, n_T) 设置为 $(10, 10)$, $(15, 10)$, $(20, 10)$, 并且所有算法独立运行 20 次来提高实验结果的可信度.

6.1 算法介绍

(1) DNSGA-II-A

DNSGA-II-A 采用 NSGA-II 作为基本多目标优化算法,当检测到环境变化后,随机重新初始化一部分个体,替代当前环境得到的 PS 的一部分个体得到新环境的初始种群.

(2) DNSGA-II-B

DNSGA-II-B 同样采用 NSGA-II 作为基本多目标优化算法,当检测到环境发生变化后,对当前环境 PS 中的一部分个体进行高斯变异从而对环境变化做出响应.

(3) FPS-RM-MEDA

FPS-RM-MEDA 采用 RM-MEDA 作为基本多目标优化算法,同时设计了一种前向预测机制 FPS 来适应环境变化,该预测机制描述如下:当环境变化发生时,新环境的初始种群主要包括三部分个体:通过自回归模型 (Auto Regression, AR) 利用历史信息预测的解,当前环境的部分非支配解以及产生的部分新的随机解.

(4) PPS-RM-MEDA

PPS-RM-MEDA 同样采用 RM-MEDA 作为基本多目标优化算法,同时设计了一种基于种群的预测机制 PPS 来响应环境变化,PPS 描述如下:种群被分为中心点和流形,历史时刻的几个中心点可以

预测产生新时刻的中心点,而历史时刻的流形可以用来预测产生新时刻的流形,利用预测得到的中心点和流形可以产生新时刻的初始种群.

(5) SGEA

SGEA 以稳态方式检测环境变化并响应环境变化,当检测到环境变化时,新环境初始化种群包括两部分:一部分个体是当前环境中分布较好的个体,另一部分个体通过最优解的移动方向和移动步长来预测产生.

6.2 参数设置

5 种算法的参数设置大多基于原始参考文献,如表 4 所示.为了公平比较,5 种算法均从种群中选择 5% 的个体来检测环境的变化.

表 4 参数设置

算法	参数设置
DNSGAII-A DNSGAII-B	种群规模: $N=100$ 模拟二进制交叉概率: $p_c=1$; 交叉分布指数: $\eta_c=10$ 多项式变异概率: $p_m=1/n$; 变异分布指数: $\eta_m=20$ 随机多样性引入比例: 20% (DNSGA-II-A) 变异多样性引入比例: 40% (DNSGA-II-B)
FPS-RM-MEDA	种群规模: $N=100$ AR 模型的阶: $p=3$; 时间序列长度: $M=23$ 预测点的个数: $3(m+1)$; 预测模型的概率: $P=0.9$
PPS-RM-MEDA	种群规模: $N=100$ AR 模型的阶: $p=3$; 时间序列长度: $M=23$
SGEA	种群规模: $N=100$ 模拟二进制交叉概率: $p_c=1$; 交叉分布指数: $\eta_c=20$ 多项式变异概率: $p_m=1/n$; 变异分布指数: $\eta_m=20$

6.3 实验结果

我们采用 IGD、SP、MS、HVD 以及 GD 来评价所有算法的性能.对于每个测试函数,每个算法在每种性能指标下性能排序结果如表 5 所示.所有算法在每种性能指标下的实验结果见附录 B.

实验结果表明,总体来说,SGEA 性能最好, FPS-RM-MEDA 位居第二,其次是 PPS-RM-MEDA,最后 DNSGA-II-A 和 DNSGA-II-B 性能相似,表现都不是很理想.由表 5 可以看出不同算法在不同测试函数的性能有所差异,没有算法能够做到在所有测试函数上都表现良好.

表 5 实验结果

测试函数	Rank	IGD	SP	MS	HVD	GD
DMOP1	1st	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA
	2nd	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A
	3rd	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B
	4th	DNSGA-II-B	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	5th	DNSGA-II-A	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
DMOP2	1st	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA
	2nd	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	3rd	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A
	4th	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B
	5th	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA
DMOP3	1st	FPS-RM-MEDA	SGEA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	2nd	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
	3rd	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	SGEA	SGEA	SGEA
	4th	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A
	5th	SGEA	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B
FDA1	1st	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA	SGEA
	2nd	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	3rd	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA
	4th	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A
	5th	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B
FDA2	1st	SGEA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	SGEA	SGEA
	2nd	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A
	3rd	PPS-RM-MEDA	SGEA	SGEA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B
	4th	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	5th	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
FDA3	1st	SGEA	DNSGA-II-A	SGEA	SGEA	SGEA
	2nd	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A
	3rd	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B
	4th	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	5th	PPS-RM-MEDA	SGEA	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
FDA4	1st	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	FPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	2nd	PPS-RM-MEDA	SGEA	DNSGA-II-B	SGEA	SGEA
	3rd	SGEA	PPS-RM-MEDA	SGEA	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
	4th	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A
	5th	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B
FDA5	1st	FPS-RM-MEDA	SGEA	DNSGA-II-A	SGEA	SGEA
	2nd	SGEA	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	PPS-RM-MEDA	FPS-RM-MEDA
	3rd	PPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA
	4th	DNSGA-II-A	DNSGA-II-A	PPS-RM-MEDA	DNSGA-II-B	DNSGA-II-A
	5th	DNSGA-II-B	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B

7 动态多目标优化算法的应用

本节主要介绍了 DMOAs 的相关应用实例. 尽管存在许多实际的 DMOPs, 但是很少有 DMOAs 是根据实际问题进行评估的.

7.1 控制问题

通常, 静态控制器优化问题要求系统在整个最优控制过程中是已知的和固定的(但不依赖于时间). 实际上, 由于系统老化等因素的影响, 系统可能随时间的变化而变化, 因此为了使闭环系统的性能令人满意, 需要控制器具有自适应能力. 以垃圾焚烧系统为例, 需要焚烧的垃圾的总量通常是随机的, 是

动态变化的, 因此垃圾焚烧系统的控制参数应该要自适应调整. 2004 年, Farina 等人^[3]提出了一种动态控制器优化问题, 即动态比例积分微分(Proportion Integration Differentiation, PID)控制器优化问题. 由于外在因素的影响, 以 PID 控制器作为控制手段的控制系统的参数有可能发生改变, 并且该控制系统的各个性能指标之间是相互冲突的, 因此, PID 控制器的参数优化是一个 DMOP. 但是作者并没有提出具体的算法来解决这个 DMOP. 2011 年, 黄亮等人^[13]基于膜计算提出了一种膜控制系统来处理时变不稳定植物的 PID 控制器的参数优化问题. 实验结果清楚地表明, 基于 DMOA 的控制策略非常有效, 具有理想的系统输出. 2013 年, 胡成玉等人提出

一种基于多种群协同的动态多目标粒子群改进算法^[75],来解决动态系统 PID 控制器的参数整定问题,旨在利用多种群竞争和协作两种模式互相配合,从而达到快速高效求解 DMOPs 的目的.实验结果表明该算法得到了较优的控制参数,取得了满意的控制效果.作者提出对 DMOPs 的研究还需要从理论上加强,为进一步探究新的方法提供支撑.

众所周知,温室是一个复杂的控制系统,光照、温度、湿度、二氧化碳的浓度等因素都是相互冲突并且随时间动态变化的.2008年,张著洪针对决策空间维数随时间变化的一类 DMOPs,提出了一种动态多目标免疫优化算法^[76],设计了依赖于体细胞成熟和 t 细胞调节的免疫算子来适应不断变化的环境.作者将提出的算法用于温室的控制优化.通过实验对比,作者发现提出的算法相对来说性能良好.

埋弧式氧化镁炉的电力供应轨迹决定了制造过程中镁质颗粒的产量和品位.由于两个生产目标(即产量和氧化镁颗粒的等级)是相互矛盾的并且该过程随工作条件不断变化,因此需要动态地优化电力供应以找到随时间变化的 Pareto 最优解.2013年,Kong,Chai,Yang 和 Ding 提出一种混合 DMOA^[77],首先是基于案例推理响应环境变化,其次是学习案例解,指导和推动进化算法的搜索,并且作者将提出的算法用于解决镁生产过程中的供电问题.从实验结果可以看出,该算法的案例解可以增强 MOEAs 对 PS 的追踪能力,然后通过 MOEAs 的优化解对其进行改进,算法性能相对比较好.

选矿工艺操作指标优化是一个动态优化问题,最终目标是寻求精矿品位和产量的最大化,并且现实世界的选矿过程往往存在着许多变化,如设备能力或运行时间的变化,这些变化往往导致操作指标的最优值发生变化.根据这些变化调整最优运行指标,以确保实时优化全球工厂范围的生产,是非常重要的.2017年,Ding 等人^[78]提出了一种基于修正机制的动态多目标进化优化预测算法来优化选矿工艺操作的指标.统计结果表明,该算法能够有效地解决实际指标优化问题.作者指出提高 DMOA 的预测精度是未来一个值得研究的方向.

7.2 调度问题

2007年,Deb 等人提出两种环境适应策略(随机初始化机制和变异机制),并将其引入 NSGA-II^[28]中提出 DNSGA-II^[1]来解决水火电力调度问题.在总电力需求不断变化的过程中,算法需要控制每个水

力发电器和火力发电器的输出来实现发电的总能源成本以及污染排放量的最小化.实验结果表明该算法取得了满意的优化结果.但是该方法实际上是一种非在线优化策略,研究一种真正的在线优化程序来解决水火电力调度问题是迫在眉睫的.

最大限度地减少火车延误的持续影响,对铁路系统的用户和铁路公司都有好处.然而,一列火车的延迟会对整个调度系统带来一个扰动,现实世界中在扰动之后对列车进行有效的重调度是一个复杂的 DMOP.由于火车正在等待重新安排时,更多的火车将到达.这些列车可能具有不同的预定时间表,速度曲线和物理特征,这些新列车的到来将改变问题的性质,使其成为一个随时间变化的动态问题.该问题的多目标性质是可能需要同时最小化扰动的几个冲突后果,例如延迟、时间表偏差、能量消耗等.这些目标的冲突性质意味着提高一个目标的质量可能会对另一个目标的质量产生不利影响.2017年,Eaton,Yang 和 Gongora^[79]基于蚁群优化提出一种 MOACO(Multi-objective Ant Colony Optimization)来解决动态铁路枢纽调度问题.实验结果表明,当问题变化较大且频繁时,保持环境变化之间非支配解的存档,更新信息素以反映新环境,对于算法在动态多目标铁路调度问题上取得较好的效果起着重要作用.同时作者期望为更大型的铁路调度的问题设计有效的模型.

7.3 机械设计问题

梯度材料是一种由性能各异的材料组成的新一代柔性工件.高效加工具有连续变化特性的材料,即梯度材料,需要提前规划切削参数.由于材料性能的变化,以及在车削过程中刀具的磨损和表面粗糙度是需要优化的目标函数,梯度材料的加工可以看作是一个 DMOP.2008年,Roy 等人提出了基于预测和期望函数的 DMOA^[80],该算法为车削过程的参数设置提供了最佳的折衷方案,即就是提供了良好的加工参数集,最后根据期望函数选择最终的解决方案.

动态焊接梁设计问题(Dynamic Welded Beam Design Problem, DWBDP)焊接梁由梁和将梁固定在构件上所需的焊缝组成.焊接梁设计的目标是最小化总制造成本同时最小化杆端挠度,并且设计过程中每个时刻的固定负载不同,随时间动态变化,因此焊接梁的设计是一个典型的 DMOP.2011年,张著洪等人提出了 DCMOAS^[9],在 DCMOAS 中,T 模块根据历史信息判断环境变化并初始化种群. B

模块用于搜索当前环境的 PS, M 模型存储所有非支配解, 当发生变化时, M 模型协助 T 模型初始化种群. 实验证明 DCMOAIS 在解决动态焊接梁设计问题时获得了最佳优化效果.

动态减速器(Dynamic Speed Reducer, SR)设计了一种可用于轻型飞机的简单齿轮箱. 设计目标是 minimized 体积和两齿轮之一的应力, 由于环境因素的影响, 减速器的参数值可能随时间的变化而变化, 因此减速器的设计是一个 DMOP. DCMOAIS^[9] 也被用来解决动态减速器设计问题, 表现良好. 但是算法只是跟传统的算法 DNSGA-II 作了实验对比, 因此有必要进一步提高算法的性能来解决更复杂的优化问题.

7.4 图像分割问题

2015 年, 赵东等人提出一种动态多目标图像分割优化方法^[81], 利用 K 均值算法和模糊 C 均值聚类算法构造多目标函数; 结合动态多目标粒子群算法(DMOPSO), 使用背景差分法定义环境变化规则, 实现动态多目标的图像分割. 结果表明 PS 分布均匀, 图像分割准确率可达到 95%, 对图像识别的准确率可达到 90%, 具有较高的识别能力, 能满足确定背景下运动物体的准确识别. 但是由于实验数据的原因, 作者只进行了一组实验, 因此该算法在其他数据上的表现还有待考证.

7.5 资源管理问题

战场资源分配的主要目的是如何有效地为给定的战争分配兵力, 以达到我方收益最大、损害最小的目标. 而在作战过程中每一个新阶段的作战计划需根据之前的攻击结果以及实际的战争情况来动态规划. 因此该问题是一个典型的复杂 DMOP. 2015 年, 杨任农等人设计了一种动态分解多目标优化算法来求解动态兵力分配问题^[82]. 资源分配问题的具有特殊性, 作者提出了一种新的编码方式. 通过对比实验, 作者证明了提出的算法性能良好. 但是作者提出还需要做一些改进来提高算法的收敛速度.

如今, 许多医院都面临着降低成本和提高服务质量的巨大需求, 为了降低成本, 需要提高资源的占用率. 然而, 增加资源利用率可能会导致瓶颈, 导致阻塞患者流, 从而增加患者等待时间. 因此, 资源的有效配置是一个重要的问题. 对于资源管理的优化, 医院关心的三个结果指标是: 患者吞吐量, 即治疗后

出院的患者数量、资源成本和备用容量的使用情况. 精心设计的医院资源分配方案应以低资源成本和备用容量使用率实现了高病患吞吐量, 在这些相互冲突的目标之间需要权衡. 由于患者的数量是随机的, 因此医院资源管理是动态变化的. 2009 年, Hutzschenreuter 等人^[83]设计了一种动态策略来实现医疗资源的合理分配问题. 结果表明, 从医院实践中获得的基准被作者所提出的方法所支配. 此外, 与静态分配策略相比, 动态资源分配策略具有更高的性能. 作者提出, 在未来的工作中, 将开发使用更先进的时间依赖效应预测模型的分配策略. 此外, 作者将考虑病床交换机制中护理水平的替代顺序.

7.6 路径优化问题

车辆路径优化是现实生活中普遍存在的问题, 旨在寻找满足等待时间最小、对环境污染最小等条件满足的路径. 但是实际环境中存在很多时变因素, 比如车辆发生故障、路况发生变化、服务客户动态出现等, 因此实际生活中的路径优化是一种 DMOP. 2018 年, 郭一楠等人^[84]提出了一种具有随机出现特性的动态客户的动态多目标车辆路径问题模型. 除上述目标外, 该模型还重点研究了导致环境污染的燃料消耗问题. 通过分析负荷、行驶距离与油耗之间的关系, 建立了碳排放模型, 并将其作为优化目标. 在现有的规划方法中, 当新的服务需求出现时, 就会触发全局车辆路径优化方法来寻找最优路径, 这是一种非常费时的方法. 为此, 郭一楠等人提出了一种两阶段动态多目标车辆路径选择方法. 该方法的三个亮点是: (1) 第一阶段采用多目标粒子群优化方法为所有客户找到最优鲁棒虚拟路径, 下一阶段将所有动态客户从鲁棒虚拟路径中剔除, 形成静态客户的静态车辆路径; (2) 动态出现的顾客根据其服务时间和车辆状态追加服务. 只有在已经找到的静态路径中找不到适合新出现的动态客户的位置时, 才会触发耗时全局车辆路径优化. 统计结果表明, 该方法具有较好的稳定性和鲁棒性, 但可能存在次优性. 此外, 随着动态客户的出现, 避免了耗时的全局车辆路径优化. 针对多车场问题, 寻找更有效的鲁棒动态多目标车辆路径选择方法是作者下一步的工作.

以上介绍的动态多目标优化的相关应用实例总结如表 6 所示.

表 6 动态多目标优化算法应用案例

	名称	作者	时间
控制问题	PID 控制器的参数优化	Farina 等	2004 年
		黄亮等	2011 年
		胡成玉等	2013 年
	温室的控制优化	张著洪	2008 年
	镁生产过程中的供电问题	Kong, Chai, Yang 和 Ding	2013 年
调度问题	选矿工艺操作指标优化	丁进良等	2017 年
	水火电力调度问题	Deb	2007 年
	动态铁路枢纽调度问题	Eaton, Yang 和 Gongora	2017 年
机械设计问题	梯度材料的加工问题	Roy et al	2008 年
	动态焊接梁设计问题	张著洪	2011 年
	动态减速器设计	张著洪	2011 年
图像分割问题	动态多目标图像分割优化	赵东等	2015 年
资源管理问题	动态兵力分配问题	杨任农等	2015 年
	医疗资源的合理分配问题	Huttschenreuter	2009 年
路径规划问题	动态车辆路径规划问题	郭一楠等	2018 年

8 动态多目标优化问题存在的挑战

尽管 DMO 的研究已经引起越来越多关注,但是 DMOPs 随时间不断变化的特性,给解决 DMOPs 带来了很大的挑战,从目前的研究现状来看,处理 DMOPs 还存在诸多的挑战与难题.

(1) 目前存在的 DMOAs 在环境变化检测环节虽然可以采用诸如重新评估个别解或判断统计分布的差异来确定环境是否发生变化,但这些方法过于简单,只能用于检测出存在变化但却不能检测出变化的强度以及类型,这种“简化”的检测机制,极易导致把复杂的变化粗暴地简化,从而影响了后期的变化应答机制的选择或建立.从一开始的简化导致后期处理的简化,这也是目前的 DMOAs 只能解决某一类简单的基准问题的原因所在.另一方面,现有变化检测模型中,由于处理都是“已知的变化”,所以也缺乏对相关重要参数的讨论诸如重评估个体数目的设置、统计分布中的相关参数的设定等,而这些参数一方面影响着算法的计算复杂度,一方面对后期采取何种应答机制有很重要的影响.如果要应用 DMOAs 来求解“未知”背景的实际的 DMOPs,这些问题将是现有方法的制肘.

(2) 变化适应机制是处理 DMOPs 最关键的步骤之一,如何有效快速地适应特定问题的特定环境变化尤其是适应复杂的混合变化是这一机制的核心问题.然而正如前文所述,由于简化的变化检测机制导致现有的变化应答机制无法适应多种变化,从而导致算法在处理复杂变化时无法实现快速收敛.另一方面,大部分现有的变化适应机制是单一的适应

环境变化,即无视变化的类型以及变化的强度,均采用单一的模式来产生新时刻的种群,处理简单的问题尚可,一旦处理复杂问题就显得力不从心.

(3) 目前,DMO 的研究与现实应用严重脱节,现有的算法大部分只能处理理论意义上的 DMOPs,也就是基准问题,大部分基准问题都只有一种变化类型,那就是只有目标函数在变化,而现实生活中动态优化问题更加多样化,目标函数、约束条件、决策变量个数以及目标函数的个数等都可能随时间变化.另外现实的 DMOPs 一般要求实时处理,而目前处理的大多数问题并没有考虑到这个要求,并且用 DMO 来解决实际问题面临的最大的问题是计算代价太大,难以接受,这也是为什么很多学者质疑理论的 DMO 无法解决真正的实际优化问题的原因所在.

9 结 论

DMO 在现实生活中有着广泛的应用前景,然而 DMOPs 随时间不断变化的特性,给解决 DMOPs 带来了很大的挑战,DMOAs 要准确地检测到发生的变化,要对发生的变化做出有效地应答,要较快地找到当前时刻的 PS ,这些问题导致很难设计出适用于各种 DMOPs 的有效算法,更不要说设计有效的算法用来解决复杂的实际 DMOPs.

本文首先介绍了 DMO 的相关理论背景,然后描述了 DMOPs 的分类,之后简单介绍了 DMOAs 的研究现状和性能评价指标,最后在对 DMOPs 的一般解决方案做详细分析的基础上提出了解决 DMOPs 所面临的挑战以及存在的诸多难题.

DMO 需进一步研究的问题有以下几个:

(1) 测试问题. 分析现实生活中 DMOPs 的特点构建新的更有实际意义的 DMO 测试函数.

(2) 算法设计. 算法设计方面未来主要的研究方向就是解决上面介绍的处理 DMOPs 的所面临的挑战及存在的问题.

(3) 性能指标. 性能指标旨在评估算法的性能的好坏. 目前大多数的性能评价指标都依赖于 Pareto 前沿的先验知识, 然而现实生活中很多复杂的 DMOPs 都不能轻易地获得 Pareto 前沿的先验知识, 因此需要设计新的有效的性能评价指标来评估算法在求解具有未知 Pareto 前沿的 DMOPs 时的性能.

(4) 实际应用. 目前关于 DMO 的实际应用的研究还比较少, 可以考虑用 DMOAs 来解决实际生活中的 DMOPs.

参 考 文 献

- [1] Deb K, Rao U B, Karthik S. Dynamic multi-objective optimization and decision-making using modified NSGA-II: A case study on hydro-thermal power scheduling//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Matsushima, Japan, 2007: 803-817
- [2] Pelosi G, Selleri S. To celiney, in the footprints of Vilfredo Pareto's "optimum". IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2014, 56(3): 249-254
- [3] Farina M, Amato P, Deb K. Dynamic multi-objective optimization problems: Test cases, approximations and applications. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004, 8(5): 425-442
- [4] Goh C K, Tan K C. A competitive-cooperative coevolutionary paradigm for dynamic multiobjective optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2009, 13(1): 103-127
- [5] Koo W T, Goh C K, Tan K C. A predictive gradient strategy for multiobjective evolutionary algorithms in a fast changing environment. Memetic Computing, 2010, 2(2): 87-110
- [6] Helbig M, Engelbrecht A P. Benchmarks for dynamic multi-objective optimization//Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. Singapore, 2013: 84-91
- [7] Jiang S, Yang S. Evolutionary dynamic multiobjective optimization: Benchmarks and algorithm comparisons. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 47(1): 198-211
- [8] Jiang S, Yang S. A framework of scalable dynamic test problems for dynamic multi-objective optimization//Proceedings of the IEEE Symposium on Computational Intelligence in Dynamic & Uncertain Environments. Orlando, USA, 2014: 32-39
- [9] Zhang Z, Qian S. Artificial immune system in dynamic environments solving time-varying non-linear constrained multi-objective problems. Soft Computing, 2011, 15(7): 1333-1349
- [10] Mehnen J, Wagner T, Rudolph G. Evolutionary optimization of dynamic multiobjective functions. Universidad Dortmund, Germany: Technical Report CI-204/06, 2006
- [11] Biswas S, Das S, Suganthan P N, Coello Coello C A. Evolutionary multiobjective optimization in dynamic environments: A set of novel benchmark functions//Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Beijing, China, 2014: 3192-3199
- [12] Zhou A M, Jin Y C, Zhang Q F. A population prediction strategy for evolutionary dynamic multi-objective optimization. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 44(1): 40-53
- [13] Huang L, Suh I H, Abraham A. Dynamic multi-objective optimization based on membrane computing for control of time-varying unstable plants. Information Sciences, 2011, 18(11): 2370-2391
- [14] Wang Y, Li B. Multi-strategy ensemble evolutionary algorithm for dynamic multi-objective optimization. Memetic Computing, 2010, 2(1): 3-24
- [15] Li K, Chen R, Yao X. Dynamic multi-objectives optimization with a changing number of objectives. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 157-171
- [16] Avdagić Z, Konjicija S, Omanović S. Evolutionary approach to solving non-stationary dynamic multi-objective problems//Abraham A, Hassanien A E, Siarry P, Engelbrecht A eds. Foundations of Computational Intelligence Volume 3. Berlin, Germany: Springer, 2009: 267-289
- [17] Zhou A M, Jin Y C, Zhang Q F, et al. Prediction-based population re-initialization for evolutionary dynamic multi-objective optimization//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Matsushima, Japan, 2007: 832-846
- [18] Raquel C, Yao X. Dynamic multi-objective optimization: A survey of the state-of-the-art//Yang S, Yao X eds. Evolutionary Computation for Dynamic Optimization Problems. Berlin, Germany: Springer, 2013: 85-106
- [19] Jin Y, Branke J. Evolutionary optimization in uncertain environments: A survey. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2005, 9(3): 303-317
- [20] Nguyen T T, Yang S X, Branke J. Evolutionary dynamic optimization: A survey of the state of the art. Swarm and Evolutionary Computation, 2012, 6: 1-24
- [21] Cruz C, González J R, Pelta D A. Optimization in dynamic environments: A survey on problems, methods and measures. Soft Computing, 2011, 15(7): 1427-1448
- [22] Goh C K, Tan K C. Evolutionary Multi-Objective Optimization in Uncertain Environments: Issues and Algorithms. Berlin, Germany: Springer, 2009: 5-18

- [23] Wu Y, Jin Y, Liu X. A directed search strategy for evolutionary dynamic multiobjective optimization. *Soft Computing*, 2015, 19(11): 3221-3235
- [24] Greeff M, Engelbrecht A P. Solving dynamic multi-objective problems with vector evaluated particle swarm optimization// *Proceedings of the World Congress on Computational Intelligence (WCCI): Congress on Evolutionary Computation*. Hong Kong, China, 2008: 2917-2924
- [25] Sahnoud S, Topcuoglu H R. Sensor-based change detection schemes for dynamic multi-objective optimization problems// *Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. Athens, Greece, 2016: 1-8
- [26] Richter H. Detecting change in dynamic fitness landscapes// *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Trondheim, Norway, 2009: 1613-1620
- [27] Jiang S Y, Yang S X. A steady-state and generational evolutionary algorithm for dynamic multi objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 65-82
- [28] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyariyan T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197
- [29] Parsopoulos K E, Vrahatis M N. Recent approaches to global optimization problems through particle swarm optimization. *Natural Computing*, 2002, 1: 235-306
- [30] Greeff M, Engelbrecht A P. Dynamic multi-objective optimization using PSO//Nedjah N, dos Santos Coelho L, de Macedo Mourelle L eds. *Multi-Objective Swarm Intelligent Systems*. Berlin, Germany: Springer, 2010: 105-123
- [31] Helbig M, Engelbrecht A P. Archive management for dynamic multi-objective optimization problems using vector evaluated particle swarm optimization//*Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. New Orleans, USA, 2011: 2047-2054
- [32] Helbig M, Engelbrecht A P. Analyses of guide update approaches for vector evaluated particle swarm optimization on dynamic multi-objective optimization problems//*Proceedings of the World Congress on Computational Intelligence: Congress on Evolutionary Computation*. Brisbane, Australia, 2012: 28621-28628
- [33] Helbig M, Engelbrecht A P. Dynamic multi-objective optimization using PSO//Alba E, Nakib A, Siarry P eds. *Metaheuristics for Dynamic Optimization*. Berlin, Germany: Springer, 2013: 147-188
- [34] Coello C A C, Lechuga M S. MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization//*Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Honolulu, USA, 2002: 1051-1056
- [35] Lechuga M S. *Multi-Objective Optimization Using Sharing in Swarm Optimization Algorithms* [Ph. D. dissertation]. University of Birmingham, Birmingham, UK, 2009
- [36] Zhan Z H, Li J, Cao J, et al. Multiple populations for multiple objectives: A coevolutionary technique for solving multi-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, 43(2): 445-463
- [37] Liu R C, Li J X, Fan J, et al. A coevolutionary technique based on multi-swarm particle swarm optimization for dynamic multi-objective optimization. *European Journal of Operational Research*, 2017, 261(3): 1028-1051
- [38] Shang R H, Jiao L C, Gong M G, et al. Clonal selection algorithm for dynamic multiobjective optimization//*Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence and Security*. Xi'an, China, 2005: 846-851
- [39] Zeng S, Yao S, Kang L, et al. An efficient multi-objective evolutionary algorithm: OMOEA-II//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Guanajuato, Mexico, 2005: 108-119
- [40] Zeng S Y, Chen G, Zheng L, et al. A dynamic multi-objective evolutionary algorithm based on an orthogonal design// *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver, Canada, 2006: 573-580
- [41] Shang R, Jiao L, Ren Y, et al. Quantum immune clonal co-evolutionary algorithm for dynamic multi-objective optimization. *Soft Computing*, 2014, 18(4): 743-756
- [42] Leyland G B. *Multi-Objective Optimization Applied to Industrial Energy Problems* [M. S. dissertation]. École Polytechnique Fédérale de, Lausanne, Switzerland, 2002
- [43] Hatzakis I, Wallace D. Dynamic multi-objective optimization with evolutionary algorithms: A forward-looking approach// *Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. Seattle, USA, 2006: 1201-1208
- [44] Zhang Q F, Zhou A M, Jin Y. RM-MEDA: A regularity model based multi-objective estimation of distribution algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 12(1): 41-63
- [45] Liu R C, Chen Y Y, Ma W P, Jiao L C. A novel cooperative co-evolutionary dynamic multi-objective optimization algorithm using a new predictive model. *Soft Computing*, 2014, 18: 1913-1929
- [46] Zheng Jin-Hua, Peng Zhou, Zou Juan, Shen Rui-Min. A prediction strategy based on guide-individual for dynamic multi-objective optimization. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(9): 1816-1825(in Chinese)
(郑金华, 彭周, 邹娟, 申瑞珉. 基于引导个体的预测策略求解动态多目标优化问题. *电子学报*, 2015, 43(9): 1816-1825)
- [47] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731
- [48] Liu R C, Niu X, Fan J, et al. An orthogonal predictive model-based dynamic multi-objective optimization algorithm. *Soft Computing*, 2015, 19(11): 3083-3107

- [49] Gong M G, Jiao L C, Du H F. Multiobjective immune algorithm with nondominated neighbor-based selection. *Evolutionary Computation*, 2008, 16(2): 225-255
- [50] Liu R C, Fan J, Jiao L C. Integration of improved predictive model and adaptive differential evolution based dynamic multi-objective evolutionary optimization algorithm. *Applied Intelligence*, 2015, 43(1): 192-207
- [51] Liu Ruo-Chen, Ma Ya-Juan, Zhang Lang, Shang Rong-Hua. Dynamic multi-objective immune optimization algorithm based on prediction strategy. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1544-1560(in Chinese)
(刘若辰, 马亚娟, 张浪, 尚荣华. 基于预测策略的动态多目标免疫优化算法. *计算机学报*, 2015, 38(8): 1544-1560)
- [52] Li H, Zhang Q. Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(2): 284-302
- [53] Welch G, Bishop G. An introduction to the Kalman filter. Department of Computer Science, University of North Carolina, Chapel Hill, USA, 2001
- [54] Muruganatham A, Tan K C, Vadakkepat P. Evolutionary dynamic multiobjective optimization via Kalman filter prediction. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(12): 2862-2873
- [55] Zou J, Li Q, Yang S X, et al. A prediction strategy based on center points and knee points for evolutionary dynamic multi-objective optimization. *Applied Soft Computing*, 2017, 61: 806-818
- [56] Ding Jin-Liang, Yang Cui-E, Chen Li-Peng, Chai Tian-You. Dynamic multi-objective optimization algorithm based on reference point prediction. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(2): 313-320(in Chinese)
(丁进良, 杨翠娥, 陈立鹏, 柴天佑. 基于参考点预测的动态多目标优化算法. *自动化学报*, 2017, 43(2): 313-320)
- [57] Ruan G, Yu G, Zheng J H, et al. The effect of diversity maintenance on prediction in dynamic multi-objective optimization. *Applied Soft Computing*, 2017, 58: 631-647
- [58] Rong M, Gong D, Zhang Y, et al. Multi-directional prediction approach for dynamic multi-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 49(9): 3362-3374
- [59] Chen D, Zou F, Lu R, et al. A hybrid fuzzy inference prediction strategy for dynamic multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2018, 43: 147-165
- [60] Sahnoud S, Topcuoglu H R. A memory-based NSGA-II algorithm for dynamic multi-objective optimization problems// *Proceedings of the European Conference on the Applications of Evolutionary Computation*. Porto, Portugal, 2016: 296-310
- [61] Liu M, Zheng J, Wang J, et al. An adaptive diversity introduction method for dynamic evolutionary multiobjective optimization//*Proceedings of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. Beijing, China, 2014: 3160-3167
- [62] Azzouz R, Bechikh S, Said L B. A dynamic multi-objective evolutionary algorithm using a change severity-based adaptive population management strategy. *Soft Computing*, 2017, 21(4): 885-906
- [63] Gee S B, Tan K C, Alippi C. Solving multi-objective optimization problems in unknown dynamic environments: An inverse modeling approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4223-4234
- [64] Jiang M, Huang Z, Liming Q I U, et al. Transfer learning based dynamic multiobjective optimization algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(4): 501-514
- [65] Zou J, Li Q, Yang S, et al. A dynamic multiobjective evolutionary algorithm based on a dynamic evolutionary environment model. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 247-259
- [66] Jiang M, Hu W, Qiu L, et al. Solving dynamic multi-objective optimization problems via support vector machine//*Proceedings of the 10th International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI)*. Xiamen, China, 2018: 819-824
- [67] Jiang M, Qiu L, Huang Z, et al. Dynamic multi-objective estimation of distribution algorithm based on domain adaptation and nonparametric estimation. *Information Sciences*, 2018, 435: 203-223
- [68] Van Veldhuizen D A. Multi-Objective Evolutionary Algorithms: Classification, Analyzes, and New Innovations [Ph.D. dissertation]. Wright-Patterson AFB: Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, USA, 1999
- [69] Zitzler E. Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications [Ph. D. dissertation]. Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Switzerland, 1999
- [70] Schott J R. Fault Tolerance Design Using Single and Multi-Criteria Genetic Algorithms [M. S. dissertation]. Department of Aeronautics and Astronautics Massachusetts Institute of Technology, Boston, USA, 1995
- [71] Cai X, Sun H, Fan Z. A diversity indicator based on reference vectors for many-objective optimization. *Information Sciences*, 2018, 430: 467-486
- [72] Sierra M R, Coello C A C. Improving PSO-based multi-objective optimization using crowding, mutation and ϵ -dominance//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Guanajuato, Mexico, 2005: 505-519
- [73] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271
- [74] Schutze O, Esquivel X, Lara A, et al. Using the averaged Hausdorff distance as a performance measure in evolutionary multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 16(4): 504-522

[75] Hu Cheng-Yu, Yao Hong, Yan Xue-Song. Multiple particle swarms coevolutionary algorithm for dynamic multi-objective optimization problems and its application. *Journal of Computer Research and Development*, 2013, 50(6): 1313-1323 (in Chinese)
(胡成玉, 姚宏, 颜雪松. 基于多粒子群协同的动态多目标优化算法及应用. *计算机研究与发展*, 2013, 50(6): 1313-1323)

[76] Zhang Z H. Multiobjective optimization immune algorithm in dynamic environments and its application to greenhouse control. *Applied Soft Computing*, 2008, 8(2): 959-971

[77] Kong W J, Chai T Y, Yang S X, Ding J L. A hybrid evolutionary multiobjective optimization strategy for the dynamic power supply problem in magnesia grain manufacturing. *Applied Soft Computing*, 2013, 13(5): 2960-2969

[78] Yang C, Ding J. Constrained dynamic multi-objective evolutionary optimization for operational indices of beneficiation process. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2019, 30(7): 2701-2713

[79] Eaton J, Yang S X, Gongora M. Ant colony optimization for simulated dynamic multi-objective railway junction rescheduling. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2017, 18(11): 2980-2992

[80] Roy R, Mehnen J. Dynamic multi-objective optimization for machining gradient materials. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2008, 57(1): 429-432

[81] Zhao Dong, Zhao Hong-Wei, Yu Fan-Hua. Moving object image segmentation by dynamic multi-objective optimization. *Optics and Precision Engineering*, 2015, 23(7): 2109-2116 (in Chinese)
(赵东, 赵宏伟, 于繁华. 动态多目标优化的运动物体图像分割. *光学精密工程*, 2015, 23(7): 2109-2116)

[82] Zhang Ying, Yang Ren-Nong, Zuo Jia-Liang, et al. Improved decomposition-based evolutionary algorithm for multi-objective optimization model of dynamic weapon-target assignment. *Acta Armamentarii*, 2015, 36(8): 1533-1540 (in Chinese)
(张滢, 杨任农, 左家亮等. 改进分解进化算法求解动态火力分配多目标优化模型. *兵工学报*, 2015, 36(8): 1533-1540)

[83] Hutzschenreuter A K, Peter A N, Han B, et al. Evolutionary multiobjective optimization for dynamic hospital resource management//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Nantes, France, 2009: 320-334

[84] Guo Y N, Cheng J, Luo S, et al. Robust dynamic multi-objective vehicle routing optimization method. *IEEE/ACM transactions on computational biology and bioinformatics*, 2018, 15(6): 1891-1903

附录 A. 动态多目标优化问题.

测试函数	可行域	目标函数	类型
FDA1	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right), g = 1 + \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
FDA2	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_5] \in [-1, 1],$ $\mathbf{X}_{III}=[x_7, \dots, x_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \times h, g = 1 + \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} x_i^2,$ $h = 1 - (f_1/g)^2 \left(H(t) + \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{III}} (x_i - H(t)/4)^2 \right), H(t) = 2\sin(0.5\pi(t-1)), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
FDA3	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1^F, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right),$ $g = 1 + G + \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin(0.5\pi t) , F = 10^{2\sin(0.5\pi t)}, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
FDA4	$x_i \in [0, 1]^n,$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot x_2) \cdot \cos(0.5\pi \cdot x_1),$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot x_2) \cdot \sin(0.5\pi \cdot x_1),$ $f_3(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \sin(0.5\pi \cdot x_2),$ $g = \sum_{i=3}^n (x_i - G(t))^2, G(t) = \sin(0.5\pi \cdot t) , t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
FDA5	$x_i \in [0, 1]^n,$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot y_2) \cdot \cos(0.5\pi \cdot y_1),$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot y_2) \cdot \sin(0.5\pi \cdot y_1),$ $f_3(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \sin(0.5\pi \cdot y_2),$ $g = G(t) + \sum_{i=3}^n (x_i - G(t))^2, G(t) = \sin(0.5\pi \cdot t) ,$ $y_i = x_i^{F(t)}, F(t) = 1 + 100\sin^4(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
DMOP1	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^H \right),$ $g = 1 + 9 \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} x_i^2, H = 1.25 + 0.75\sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type III

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
DMOP2	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^H \right)$, $g = 1 + \sum_{x_i \in X_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin(0.5\pi t)$, $H = 1.25 + 0.75 \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
DMOP3	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right)$, $g = 1 + \sum_{i=1}^{x/r} (x_i - G(t))^2, G = \sin(0.5\pi t) , r = \cup(1, 2, \dots, n), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
DIMP1	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^2 \right)$, $g = 1 + \sum_{x_i \in X_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin \left(0.5\pi t + 2\pi \left(\frac{i}{n+1} \right) \right)^2, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
DIMP2	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \left(1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} \right)$, $g = 1 + 2(n-1) + \sum_{x_i \in X_{II}} [(x_i - G)^2 - 2\cos(3\pi(x_i - G))]$, $G = \sin \left(0.5\pi t + 2\pi \left(\frac{i}{n+1} \right) \right)^2, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
HE1	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h, g(\mathbf{x}) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$, $h(f_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}} - \frac{f_1}{g} \sin(10\pi t f_1), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type III
HE2	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h, g(\mathbf{x}) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$, $h(f_1, g) = 1 - \left(\sqrt{\frac{f_1}{g}} \right)^{H(t)} - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)} \sin(10\pi t f_1), H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type III
HE3	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (x_j - x_1^{0.5(1.0 + \frac{3(j-2)}{n-2})})^2, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h$, $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (x_j - x_1^{0.5(1.0 + \frac{3(j-2)}{n-2})})^2$, $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$, $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE4	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(x_j - \sin \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2$, $f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h$, $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(x_j - \sin \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2$, $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$, $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE5	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(x_j - 0.8x_1 \cos \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2$, $f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h$, $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(x_j - 0.8x_1 \sin \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2$, $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$, $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
HE6	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(\mathbf{x}_j - 0.8 \mathbf{x}_1 \cos \left(\frac{6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n}}{3} \right) \right)^2$ $f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h,$ $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{\mathbf{x}_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(\mathbf{x}_j - 0.8 \mathbf{x}_1 \sin \left(6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE7	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(\mathbf{x}_j - 0.3 \mathbf{x}_1^2 \cos \left(24\pi \mathbf{x}_1 + \frac{4j\pi}{n} \right) 0.6 \mathbf{x}_1 \right) \cos \left(6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n} \right)^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h,$ $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{\mathbf{x}_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(\mathbf{x}_j - 0.3 \mathbf{x}_1^2 \cos \left(24\pi \mathbf{x}_1 + \frac{4j\pi}{n} \right) + 0.6 \mathbf{x}_1 \right) \sin \left(6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n} \right)^2,$ $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE8	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (4y_j^2 - \cos(8y_j\pi) + 1.0), f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h,$ $g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{\mathbf{x}_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (4y_j^2 - \cos(8y_j\pi) + 1.0),$ $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, y_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{(0.5(1.0 + \frac{3(j-2)}{n-2}))},$ $H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE9	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(4 \sum_{j \in J_1} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_1} \cos \left(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}} \right) + 2.0 \right),$ $f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h, g(\mathbf{x}) = 2 - \sqrt{\mathbf{x}_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(4 \sum_{j \in J_2} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_2} \cos \left(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}} \right) + 2.0 \right),$ $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)}, y_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{(0.5(1.0 + \frac{3(j-2)}{n-2}))},$ $H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
HE10	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(\mathbf{x}_j - \sin \left(6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h, h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g} \right)^{H(t)},$ $g(\mathbf{x}) = 2 - \mathbf{x}_1^2 + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(\mathbf{x}_j - \sin \left(6\pi \mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ $H(t) = 0.75 \sin(0.5\pi t) + 1.25, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type III
JY1	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(\mathbf{x}_1 + A_t \sin(W_t \pi \mathbf{x}_1)), f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1 - \mathbf{x}_1 + A_t \sin(W_t \pi \mathbf{x}_1)),$ $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin(0.5\pi t), A(t) = 0.05, W(t) = 6, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
JY2	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(\mathbf{x}_1 + A_t \sin(W_t \pi \mathbf{x}_1)), f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1 - \mathbf{x}_1 + A_t \sin(W_t \pi \mathbf{x}_1)),$ $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2, G = \sin(0.5\pi t),$ $A(t) = 0.05, W(t) = \lfloor 6 \sin(0.5\pi(t-1)) \rfloor, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
JY3	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i^2 - y_{i-1})^2$, $A(t) = 0.05$, $W(t) = \lfloor 6 \sin(0.5\pi(t-1)) \rfloor$, $\alpha = \lfloor 100 \sin^2(0.5\pi t) \rfloor$, $y_1 = x_1 \sin((2\alpha + 0.5)\pi x_1) $, $y_i = x_i, i=2, \dots, n, t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type II
JY4	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2$, $G = \sin(0.5\pi t)$, $A(t) = 0.05$, $W(t) = 10^{ G }$, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type II
JY5	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} x_i^2$, $A(t) = 0.3 \sin(0.5\pi(t-1))$, $W(t) = 1$, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type III
JY6	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_{1 1} + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (4y_i^2 - \cos(K_t \pi y_i) + 1)$, $A(t) = 0.1$, $W(t) = 3$, $K_t = 2 \times \lfloor 10 \times G \rfloor$, $G = \sin(0.5\pi t)$, $y_i = x_i - G, i=2, \dots, n, t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type II
JY7	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\alpha_t}$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\beta_t}$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i^2 - 10 \cos(2\pi y_i) + 10)$, $A(t) = 0.1$, $\alpha_t = \beta_t = 0.2 + 2.8 \times G $, $W(t) = 3 + G = \sin(0.5\pi t)$, $y_i = x_i - G, i=2, \dots, n, t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type II
JY8	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\alpha_t}$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\beta_t}$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} x_i^2$, $G = \sin(0.5\pi t)$, $A(t) = 0.05$, $W(t) = 6$, $\alpha_t = \frac{2}{\beta_t}$, $\beta_t = 10 - 9.8 \times G $, $y_i = x_i - G, i=2, \dots, n, t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type III
JY9	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i + \sigma - G)^2$, $G = \sin(0.5\pi t) $, $A(t) = 0.05$, $W(t) = \lfloor 6 \sin^{\rho_t}(0.5\pi(t-1)) \rfloor$, $\sigma = \lfloor \frac{\tau}{\tau_t \rho_t} \rfloor$, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$, $\rho_t = 5$,	混合类型
JY10	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g)(x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\alpha_t}$, $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g)(1-x_1 + A_t \sin(W_t \pi x_1))^{\beta_t}$, $g = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i + \sigma - G)^2$, $G = \sin(0.5\pi t) $, $A(t) = 0.05$, $W(t) = 6$, $\alpha_t = \beta_t = 1 + \sigma G$, $\sigma = \lfloor \frac{\tau}{\tau_t \rho_t} \rfloor + R$, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$, $\rho_t = 5$, $R = \{R \in \mathbb{Z}, 1 \leq R \leq 3\}$	混合类型
SJY1	$\mathbf{X}_I=[x_1, x_m] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_{m+1}, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_{i=1:m}(\mathbf{x}, t) = (1+S) \left(\frac{x_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_m} \right)$, $S = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - G)^2$, $G = \sin(0.5\pi t)$, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type I
SJY2	$x_i \in [1, 10]^n$, n 为向量的维数	$f_{i=1:m}(\mathbf{x}, t) = (1+S) \left(\frac{x_i}{\sqrt{m-1} \prod_{j \neq i, x_j \in \mathbf{X}_I} x_j} \right)$, $swa p_t(x_i \in \mathbf{X}_I, x_{m-i} \in \mathbf{X}_I), i=1:n_p, S = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} \left(x_i - \frac{\sum_{j=1}^{n_p} x_j}{n_p} \right)^2$, $n_p = rand(1, m/2)$	Type I
SJY3	$x_i \in [1, 10]^n$, n 为向量的维数	$f_{i=1:m}(\mathbf{x}, t) = (1+S) \left(\frac{x_i}{\sqrt{m-1} \prod_{j \neq i, x_j \in \mathbf{X}_I} x_j} \right)^{H(t)}$, $swa p_t(x_i \in \mathbf{X}_I, x_{m+i} \in \mathbf{X}_{II}), i=1:n_p$, $S = \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (x_i - 5)^2$, $n_p = rand(1, m/2)$, $H(t) = 0.5 + 2 \sin(0.5\pi t) $, $t = \frac{1}{n_t} \lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \rfloor$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
SJY4	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+S) \prod_{j=1}^{m-1} \cos(0.5\pi\mathbf{x}_j), f_{i=2, m-1}(\mathbf{x}, t) = (1+S) \sin(0.5\pi\mathbf{x}_{m-j+1}) \prod_{j=1}^{m-1} \cos(0.5\pi\mathbf{x}_j),$ $f_m(\mathbf{x}, t) = (1+S)(1 - \cos^{\gamma(t)}(0.5\pi\mathbf{x}_1)), S = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_{II}} \mathbf{x}_i^2, \gamma(t) = 2 + 1.8 \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type III
SJY5	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \prod_{j=1}^{m-1} \cos(0.5\pi\mathbf{x}_j), f_{i=2, m-1}(\mathbf{x}, t) = \sin(0.5\pi\mathbf{x}_{m-j+1}) \prod_{j=1}^{m-1} \cos(0.5\pi\mathbf{x}_j),$ $f_m(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1+S}{1 + \cos^2(0.5\pi\mathbf{x}_1)} \right)^{\frac{1}{(1+S)^{B(t)}}}, S = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_{II}} \mathbf{x}_i^2, B(t) = 1.5 + 1.2 \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type IV
DCP1	$\mathbf{x}_1 \in [0, 1],$ $\mathbf{x}_k \in [-1, 1],$ $1 \leq k \leq \rho(t)$	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot \exp(-f_1/g), c_j(\mathbf{x}, t) = f_2(\mathbf{x}, t) - a_j \exp(-b_j f_1),$ $g = 1 + \sum_{i=1}^{\rho(t)} (\mathbf{x}_i - G(t))^2, G(t) = \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
DCP2~ DCP7	$\mathbf{x}_1 \in [0, 1],$ $\mathbf{x}_k \in [-1, 1],$ $1 \leq k \leq \rho(t)$	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot \exp(-f_1/g),$ $\cos\theta(f_2(\mathbf{x}, t) - e) + \cos\theta f_1(\mathbf{x}, t) \geq a \left \sin(b\pi(\sin\theta(f_2(\mathbf{x}, t) - e) + \cos\theta f_1(\mathbf{x}, t))) \right ^d,$ $g = 1 + \sum_{i=1}^{\rho(t)} (\mathbf{x}_i - G(t))^2, G(t) = \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
DSW1	$\mathbf{x}_i \in [-50, 50]^n,$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12} \mathbf{x}_1 - b_1 G(t))^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_1 - b_2 G(t) - 2)^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $G(t) = \tau(t)s, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor, a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0, b_1 = 1, b_2 = 1$	Type II
DSW2	$\mathbf{x}_i \in [-50, 50]^n,$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12} \mathbf{x}_1 - b_1 G(t))^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_1 - b_2 G(t) - 2)^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $G(t) = \tau(t)s, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor, a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 0, a_{22} = 1, b_1 = 1, b_2 = 1$	Type II
DSW3	$\mathbf{x}_i \in [-50, 50]^n,$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12} \mathbf{x}_1 - b_1 G(t))^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_1 - b_2 G(t) - 2)^2 + \sum_{i=2}^n \mathbf{x}_i^2,$ $G(t) = \tau(t)s, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor, a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$	Type II
UDF1	$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in [-2, 2],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(\mathbf{x}_j - \sin\left(6\pi\mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n}\right) - G(t) \right)^2 + G(t) ,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - \mathbf{x}_1 + G(t) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(\mathbf{x}_j - \sin\left(6\pi\mathbf{x}_1 + \frac{j\pi}{n}\right) - G(t) \right)^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\},$ $J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF2	$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in [-1, 2],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{0.5 \left(2 + \frac{3(j-2)}{n-2} \right) + G(t)} - G(t))^2 + G(t) ,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - \mathbf{x}_1 + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{0.5 \left(2 + \frac{3(j-2)}{n-2} \right) + G(t)} - G(t))^2 + G(t) ,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
UDF3	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \max\left\{0, \left(\frac{1}{2N} + \epsilon\right) [\sin(2N\pi x_1) - 2N G(t)]\right\} +$ $\frac{2}{ J_1 } \left[4 \sum_{j \in J_1} 2y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_1} \cos\left(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}\right) + 2 \right]^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - x_1 + \max\left\{0, \left(\frac{1}{2N} + \epsilon\right) [\sin(2N\pi x_1) - 2N G(t)]\right\} +$ $\frac{2}{ J_2 } \left[4 \sum_{j \in J_2} 2y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_2} \cos\left(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}\right) + 2 \right]^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), y_j = x_j - \sin\left(6\pi t + j \frac{\pi}{n}\right), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\},$ $J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF4	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left[x_j - \sin\left(6\pi x_1 + (j + K(t)) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - M(t)x_1^{H(t)} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left[x_j - \sin\left(6\pi x_1 + (j + K(t)) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), M(t) = 0.5 + G(t) , K(t) = \lceil nG(t) \rceil, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\},$ $J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF5	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 2]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (x_j - x_1^{0.5(2 + \frac{3(j-2)}{n-2}) + G(t)} - G(t))^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - M(t)x_1^{H(t)} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (x_j - x_1^{0.5(2 + \frac{3(j-2)}{n-2}) + G(t)} - G(t))^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), M(t) = 0.5 + G(t) , t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\},$ $J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF6	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = x_1 + \left(\frac{1}{2N} + \epsilon\right) \sin(2N\pi x_1) - 2N G(t) +$ $\frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (2y_j^2 - \cos(4y_j\pi) + 1)^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - M(t)x_1^{H(t)} \left(\frac{1}{2N} + \epsilon\right) \sin(2N\pi x_1) - 2N G(t) +$ $\frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (2y_j^2 - \cos(4y_j\pi) + 1)^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), M(t) = 0.5 + G(t) , y_j = x_j - \sin\left(6\pi t + j \frac{\pi}{n}\right), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\},$ $J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF7	$\mathbf{X}_I=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II}=[x_2, \dots, x_n] \in [-2, 2]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = R(t) \cos(0.5\pi x_1) \cos(0.5\pi x_2) + G(t) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(x_j - 2x_2 \sin\left(2\pi x_1 + j \frac{\pi}{n}\right) \right)^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = R(t) \cos(0.5\pi x_1) \sin(0.5\pi x_2) + G(t) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(x_j - 2x_2 \sin\left(2\pi x_1 + j \frac{\pi}{n}\right) \right)^2,$ $f_3(\mathbf{x}, t) = R(t) \sin(0.5\pi x_1) + G(t) + \frac{2}{ J_3 } \sum_{j \in J_3} \left(x_j - 2x_2 \sin\left(2\pi x_1 + j \frac{\pi}{n}\right) \right)^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), R(t) = 1 + G(t) , t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j 3 \leq j \leq n, j-1 \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\},$ $J_2 = \{j 3 \leq j \leq n, j-2 \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\},$ $J_3 = \{j 3 \leq j \leq n, j \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数}\}$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
UDF8	$\mathbf{X}_1=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{11}=[x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + G(t_3) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left[\mathbf{x}_j - \sin\left(6\pi\mathbf{x}_1 + (j+K(t_1))\frac{\pi}{n}\right) - G(t_2) \right]^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - H(t_4)\mathbf{x}_1^{H(t_5)} + G(t_3) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left[\mathbf{x}_j - \sin\left(6\pi\mathbf{x}_1 + (j+K(t_1))\frac{\pi}{n}\right) - G(t_2) \right]^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), K(t) = \lceil nG(t) \rceil,$ $H(t) = 0.5 + G(t) , t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
UDF9	$\mathbf{X}_1=[x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{11}=[x_2, \dots, x_n] \in [-2, 2]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 + G(t_3) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} [\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{0.5(2+\frac{3(j-2)}{n-2})+G(t_1)} - G(t_2)]^2,$ $f_2(\mathbf{x}, t) = 1 - H(t_4)\mathbf{x}_1^{H(t_5)} + G(t_3) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} [\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1^{0.5(2+\frac{3(j-2)}{n-2})+G(t_1)} - G(t_2)]^2,$ $G(t) = \sin(0.5\pi t), H(t) = 0.5 + G(t) , t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $J_1 = \{j j \text{ is odd and } 2 \leq j \leq n\}, J_2 = \{j j \text{ is even and } 2 \leq j \leq n\}$	Type II
ZF5	$\mathbf{x}_i \in [0, 5]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a ^H + \sum_{i \in I_1} y_i^2, f_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a - 1 ^H + \sum_{i \in I_2} y_i^2,$ $y_i = \mathbf{x}_i - b - 1 + \mathbf{x}_1 - a ^{H+\frac{i}{n}}, H = 1.25 + 0.75\sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right),$ $a = 2\cos\left(\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, b = 2\sin\left(2\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, t = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $I_1 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is odd}\}, I_2 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is even}\}$	Type II
ZF6	$\mathbf{x}_i \in [0, 5]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a ^H + \sum_{i \in I_1} y_i^2, f_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a - 1 ^H + \sum_{i \in I_2} y_i^2,$ $y_i = \mathbf{x}_i - b - 1 + \mathbf{x}_1 - a ^{H+\frac{i}{n}}, H = 1.25 + 0.75\sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right),$ $a = 2\cos\left(1.5\pi \frac{t}{n_T}\right)\sin\left(0.5\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, b = 2\cos\left(1.5\pi \frac{t}{n_T}\right)\cos\left(0.5\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, t = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $I_1 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is odd}\}, I_2 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is even}\}$	Type II
ZF7	$\mathbf{x}_i \in [0, 5]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a ^H + \sum_{i \in I_1} y_i^2, f_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a - 1 ^H + \sum_{i \in I_2} y_i^2,$ $y_i = \mathbf{x}_i - b - 1 + \mathbf{x}_1 - a ^{H+\frac{i}{n}}, H = 1.25 + 0.75\sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right),$ $a = 1.7\left(1 - \sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right)\right)\sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right) + 3.4,$ $b = 1.4\left(1 - \sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right)\right)\cos\left(\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2.1, t = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $I_1 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is odd}\}, I_2 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is even}\}$	Type II
ZF8	$\mathbf{X}_1=[x_1, x_2] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{11}=[x_3, \dots, x_n] \in [-1, 2]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot \mathbf{x}_2) \cdot \cos(0.5\pi \cdot \mathbf{x}_1),$ $f_2(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \cos(0.5\pi \cdot \mathbf{x}_2) \cdot \sin(0.5\pi \cdot \mathbf{x}_1),$ $f_3(\mathbf{x}, t) = (1+g) \cdot \sin(0.5\pi \cdot \mathbf{x}_2),$ $g = \sum_{i=3}^n \left(\mathbf{x}_i - \left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right)^H - G(t) \right)^2, G(t) = \sin(0.5\pi \cdot t) ,$ $H = 1.25 + 0.75\sin(0.5\pi \cdot t), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type I
ZF9	$\mathbf{x}_i \in [0, 5]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a ^H + \sum_{i \in I_1} y_i^2, f_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a - 1 ^H + \sum_{i \in I_2} y_i^2,$ $y_i = \mathbf{x}_i - b - 1 + \mathbf{x}_1 - a ^{H+\frac{i}{n}}, H = 1.25 + 0.75\sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right),$ $a = 2\cos\left(\left(\frac{t}{n_T} - \left\lfloor \frac{t}{n_T} \right\rfloor\right)\pi\right) + 2, b = 2\sin\left(2\left(\frac{t}{n_T} - \left\lfloor \frac{t}{n_T} \right\rfloor\right)\pi\right) + 2, t = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $I_1 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is odd}\}, I_2 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is even}\}$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
ZF10	$\mathbf{x}_i \in [0, 5]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a ^H + \sum_{i \in I_1} y_i^2, f_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1 - a - 1 ^H + \sum_{i \in I_2} y_i^2,$ $y_i = \begin{cases} \mathbf{x}_i - b - \mathbf{x}_1 - a ^{H + \frac{i}{n}}, & t \text{ is odd}; \\ \mathbf{x}_i - b - 1 + \mathbf{x}_1 - a ^{H + \frac{i}{n}}, & \text{其他} \end{cases}$ $H = 1.25 + 0.75 \sin\left(\pi \frac{t}{n_T}\right), a = 2 \cos\left(\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, b = 2 \sin\left(2\pi \frac{t}{n_T}\right) + 2, t = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor,$ $I_1 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is odd}\}, I_2 = \{i 1 \leq i \leq n, i \text{ is even}\}$	Type II
T1	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{d_1(t)} (\mathbf{x}_i^2 - 10 \cos(2\pi \mathbf{x}_i) + 10), f_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x}_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{d_2(t)} (\mathbf{x}_i^2 - \mathbf{x}_{i-1})^2,$ $d_1(t) = \lfloor n \sin(t) \rfloor, d_2(t) = \lfloor n \cos^3(2t) \rfloor, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type IV
T2	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = (1 + g) \prod_{i=1}^{M(t)-1} \cos\left(\frac{\pi \mathbf{x}_i}{2}\right),$ $f_k(\mathbf{x}, t) = (1 + g) \prod_{i=1}^{M(t)-k} \cos\left(\frac{\pi \mathbf{x}_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi \mathbf{x}_{M(t)-k+1}}{2}\right),$ $f_m(\mathbf{x}, t) = (1 + g) \prod_{i=1}^{M(t)-1} \sin\left(\frac{\pi \mathbf{x}_i}{2}\right),$ $g = \sum_{i=1}^{M(t)} (\mathbf{x}_i - 0.5)^2, M(t) = \lfloor m \sin(0.5\pi t) \rfloor, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type III
T3	$\mathbf{X}_I = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in$ $[\bar{R}(\mathbf{x}, t) - 100, \bar{R}(\mathbf{x}, t) + 100],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t) \cos\left(\frac{\pi \mathbf{x}_1}{2}\right), f_2(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t) \sin\left(\frac{\pi \mathbf{x}_1}{2}\right),$ $R(\mathbf{x}, t) = \bar{R}(\mathbf{x}, t) + G(\mathbf{x}, t), \bar{R}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{P} \sum_j^P R_j(\mathbf{x}, t-1), \bar{R}(\mathbf{x}, -1) = 1,$ $G(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=2}^n (\mathbf{x}_i - \bar{R}(\mathbf{x}, t-1))^2, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type IV
T4	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i^2 - 10 \cos(2\pi \mathbf{x}_i) + 10), f_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x}_1 - r(t))^2 + \sum_{i=2}^n (\mathbf{x}_i^2 - \mathbf{x}_{i-1})^2,$ $r(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - 0), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type IV
DMZDT1	$\mathbf{X}_I = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = y_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g(y) \left(1 - \sqrt{\frac{\mathbf{x}_1}{g(y)}}\right), g(y) = 1 + 9 \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i) / (n-1),$ $y_1 = x_1, y_i = \frac{\left x_i - \frac{t}{n_t}\right }{H(t)}, H(t) = \max\left\{\left 1 - \frac{t}{n_t}\right , \left -1 - \frac{t}{n_t}\right \right\}, t = \left\lfloor \frac{f_c}{FES_c} \right\rfloor$	Type I
DMZDT2	$\mathbf{X}_I = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = y_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g(y) \left(1 - \left(\frac{\mathbf{x}_1}{g(y)}\right)^2\right), g(y) = 1 + 9 \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i) / (n-1),$ $y_1 = x_1, y_i = \frac{\left x_i - \frac{t}{n_t}\right }{H(t)}, H(t) = \max\left\{\left 1 - \frac{t}{n_t}\right , \left -1 - \frac{t}{n_t}\right \right\}, t = \left\lfloor \frac{f_c}{FES_c} \right\rfloor$	Type I
DMZDT3	$\mathbf{X}_I = [\mathbf{x}_1] \in [0, 1],$ $\mathbf{X}_{II} = [\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in [-1, 1],$ n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = y_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g(y) \left(1 - \sqrt{\frac{\mathbf{x}_1}{g(y)}} - \frac{\mathbf{x}_1}{g(y)} \sin(10\pi y_1)\right),$ $g(y) = 1 + 9 \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i) / (n-1), y_1 = x_1, y_i = \frac{\left x_i - \frac{t}{n_t}\right }{H(t)},$ $H(t) = \max\left\{\left 1 - \frac{t}{n_t}\right , \left -1 - \frac{t}{n_t}\right \right\}, t = \left\lfloor \frac{f_c}{FES_c} \right\rfloor$	Type I

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
DMZDT4	$\mathbf{X}_I = [x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_{II} = [x_2, \dots, x_n] \in [-1, 1]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = y_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g(y) \left(1 - \sqrt{\frac{y_1}{g(y)}} \right), g(y) = 10n - 9 + \sum_{x_i \in \mathbf{X}_{II}} (y_i ^2 - 10 \cos(4\pi y_i))$, $y_1 = x_1, y_i = \frac{ x_i - t }{n_i}, H(t) = \max \left\{ \left 1 - \frac{t}{n_i} \right , \left -1 - \frac{t}{n_i} \right \right\}, t = \left\lfloor \frac{f_c}{FES_t} \right\rfloor$	Type I
CF1	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} x_i$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} x_i \right) (1 - x_{m(t)-j+1})$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5(1-x_1)$, $g = 100 \left[n - m(t) + 1 + \sum_{i=m(t)}^n ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))) \right], t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
CF2	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right)$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m(t)-j+1}\right) \right)$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g) \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right), g = \sum_{i=m(t)}^n (x_i - 0.5)^2, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
CF3	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right)$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m(t)-j+1}\right) \right)$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g) \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right), g = \sum_{i=m(t)}^n (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)), t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
CF4	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i^\alpha\right)$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i^\alpha\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m(t)-j+1}^\alpha\right) \right)$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g) \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1^\alpha\right), g = \sum_{i=m(t)}^n (x_i - 0.5)^2, \alpha > 0, t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
CF5	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right)$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m(t)-j+1}\right) \right)$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g) \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right)$, $g = \sum_{i=m(t)}^n (x_i - G(\bar{t}))^2, G(\bar{t}) = \sin(0.5\pi\bar{t}) , \bar{t} = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II
CF6	$x_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i^{F(\bar{t})}\right)$, $f_{j=2, m(t)-1}(\mathbf{x}) = (1+g)0.5 \left(\prod_{i=1}^{m(t)-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_i^{F(\bar{t})}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m(t)-j+1}^{F(\bar{t})}\right) \right)$, $f_{m(t)}(\mathbf{x}) = (1+g) \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1^{F(\bar{t})}\right)$, $g = G(\bar{t}) + \sum_{i=m(t)}^n (x_i^{F(\bar{t})} - G(\bar{t}))^2$, $G(\bar{t}) = \sin(0.5\pi\bar{t}) , F(\bar{t}) = 1 + 100 \sin^4(0.5\pi\bar{t}), \bar{t} = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$	Type II

(续 表)

测试函数	可行域	目标函数	类型
DTLZ _{Av}	$\mathbf{x}_i \in [0, 1]^n$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}) = a_1 x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_{m-1}^{c_{m-1}} (1-x_m)^{c_1} g_1(\mathbf{x}) + b_1,$ $f_2(\mathbf{x}) = a_2 x_1^{c_2} x_2^{c_2} \cdots (1-x_{m-1})^{c_2} (1-x_m)^{c_2} g_2(\mathbf{x}) + b_2,$ $\vdots,$ $f_{m-1}(\mathbf{x}) = a_{m-1} x_1^{c_{m-1}} (1-x_2)^{c_{m-1}} \cdots (1-x_{m-1})^{c_{m-1}} (1-x_m)^{c_{m-1}} g_{m-1}(\mathbf{x}) + b_{m-1},$ $f_m(\mathbf{x}) = a_m (1-x_1)^{c_m} (1-x_2)^{c_m} \cdots (1-x_{m-1})^{c_m} (1-x_m)^{c_m} g_m(\mathbf{x}) + b_m,$ $g_i = 1 - d_i \cos(20\pi x_i), a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$	混合类型
ZJZ	$\mathbf{X}_1 = [x_1] \in [0, 1]$, $\mathbf{X}_n = [x_2, \dots, x_n] \in [-1, 2]$, n 为向量的维数	$f_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_1, f_2(\mathbf{x}, t) = g \cdot h,$ $g = 1 + \sum_{x_i \in X_{II}} (x_i - G(t) - x_1^{H(t)})^2,$ $h(f_1, g) = 1 - \left(\frac{f_1}{g}\right)^{H(t)}, G(t) = \sin(0.5\pi \cdot t),$ $H(t) = 1.5 + G(t), t = \frac{1}{n_i} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_i} \right\rfloor$	Type II

附录 B. 动态多目标优化算法性能对比.

表 1 实验结果(IGD)

测试函数	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA
DMOP1	0.0360(0.0125) ⁽⁵⁾	0.0307(0.0097) ⁽⁴⁾	0.0244(0.0064) ⁽²⁾	0.0253(0.0125) ⁽³⁾	0.0156(0.0039)
DMOP2	0.0368(0.0024) ⁽²⁾	0.0381(0.0035) ⁽³⁾	0.0430(0.0021) ⁽⁴⁾	0.0973(0.0444) ⁽⁵⁾	0.0144(9.15E-04)⁽¹⁾
DMOP3	0.0508(0.0031) ⁽²⁾	0.0542(0.0064) ⁽³⁾	0.0210(0.0010)⁽¹⁾	0.0655(0.0114) ⁽⁴⁾	0.1303(0.0105) ⁽⁵⁾
FDA1	0.0299(0.0026) ⁽⁴⁾	0.0297(0.0019) ⁽³⁾	0.0266(0.0012) ⁽²⁾	0.0626(0.0233) ⁽⁵⁾	0.0135(0.0012)⁽¹⁾
FDA2	0.1565(6.42E-04) ⁽⁵⁾	0.1564(7.24E-04) ⁽⁴⁾	0.0111(0.0014) ⁽²⁾	0.0385(0.0084) ⁽³⁾	0.0099(3.88E-04)⁽¹⁾
FDA3	0.1713(0.0594) ⁽³⁾	0.1872(0.0707) ⁽⁴⁾	0.0199(0.0051) ⁽²⁾	0.1972(0.0582) ⁽⁵⁾	0.0175(0.0011)⁽¹⁾
FDA4	0.4007(0.0348) ⁽⁴⁾	0.4180(0.0324) ⁽⁵⁾	0.1138(0.0016)⁽¹⁾	0.1303(0.0067) ⁽²⁾	0.1307(0.0058) ⁽³⁾
FDA5	0.3504(0.0143) ⁽⁴⁾	0.3566(0.0145) ⁽⁵⁾	0.0840(0.0016)⁽¹⁾	0.1204(0.0093) ⁽³⁾	0.0980(0.0079) ⁽²⁾

表 2 实验结果(SP)

测试函数	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA
DMOP1	0.0055(0.0013) ⁽³⁾	0.0048(0.0010) ⁽²⁾	0.0157(0.0095) ⁽⁴⁾	0.0251(0.0247) ⁽⁵⁾	0.0027(3.08E-04)⁽¹⁾
DMOP2	0.0107(5.33E-04) ⁽²⁾	0.0115(7.45E-04) ⁽³⁾	0.0306(0.0040) ⁽⁵⁾	0.0116(0.0027) ⁽⁴⁾	0.0067(5.86E-04)⁽¹⁾
DMOP3	0.0082(6.52E-04) ⁽²⁾	0.0090(8.65E-04) ⁽³⁾	0.0152(0.0011) ⁽⁴⁾	0.0165(0.0024) ⁽⁵⁾	0.0054(6.08E-04)⁽¹⁾
FDA1	0.0101(0.0074) ⁽²⁾	0.0111(0.0068) ⁽³⁾	0.0183(0.0014) ⁽⁵⁾	0.0171(0.0065) ⁽⁴⁾	0.0075(5.82E-04)⁽¹⁾
FDA2	0.0054(3.38E-04)⁽¹⁾	0.0057(3.58E-04) ⁽²⁾	0.0156(0.0029) ⁽⁴⁾	0.0181(0.0039) ⁽⁵⁾	0.0066(8.77E-04) ⁽³⁾
FDA3	0.0117(0.0019)⁽¹⁾	0.0125(0.0020) ⁽²⁾	0.0177(0.0092) ⁽⁴⁾	0.0165(0.0042) ⁽³⁾	0.0241(0.0018) ⁽⁵⁾
FDA4	0.0816(0.0038) ⁽⁴⁾	0.0820(0.0040) ⁽⁵⁾	0.0387(0.0033)⁽¹⁾	0.0610(0.0106) ⁽³⁾	0.0413(0.0030) ⁽²⁾
FDA5	0.0935(0.0040) ⁽⁴⁾	0.0940(0.0041) ⁽⁵⁾	0.0632(0.0049) ⁽²⁾	0.0863(0.0042) ⁽³⁾	0.0450(0.0027)⁽¹⁾

表 3 实验结果(MS)

测试函数	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA
DMOP1	0.9808(0.0203) ⁽³⁾	0.9822(0.0210) ⁽²⁾	0.8832(0.0251) ⁽⁵⁾	0.9710(0.0338) ⁽⁴⁾	0.9835(0.0131)⁽¹⁾
DMOP2	0.8839(0.0104) ⁽⁴⁾	0.8850(0.0101) ⁽³⁾	0.8137(0.0255) ⁽⁵⁾	0.9502(0.0162) ⁽²⁾	0.9810(0.0046)⁽¹⁾
DMOP3	0.5319(0.0218) ⁽⁵⁾	0.5341(0.0220) ⁽⁴⁾	0.9110(0.0117)⁽¹⁾	0.8879(0.0096) ⁽²⁾	0.5757(0.0295) ⁽³⁾
FDA1	0.9269(0.0191) ⁽⁴⁾	0.9271(0.0185) ⁽³⁾	0.8938(0.0221) ⁽⁵⁾	0.9656(0.0123) ⁽²⁾	0.9727(0.0102)⁽¹⁾
FDA2	0.9973(0.0266)⁽¹⁾	0.9965(0.0270) ⁽²⁾	0.8751(0.0292) ⁽⁵⁾	0.9341(0.127) ⁽⁴⁾	0.9931(0.0033) ⁽³⁾
FDA3	0.7642(0.0791) ⁽³⁾	0.7651(0.0784) ⁽²⁾	0.5787(0.0364) ⁽⁵⁾	0.6089(0.0270) ⁽⁴⁾	0.9334(0.0711)⁽¹⁾
FDA4	1.0002(7.83E-07)⁽¹⁾	0.9998(6.55E-07) ⁽²⁾	0.9742(0.0060) ⁽⁵⁾	0.9990(1.22E-04) ⁽⁴⁾	0.9995(2.62E-05) ⁽³⁾
FDA5	1.0040(4.36E-07)⁽¹⁾	1.0001(3.26E-07) ⁽²⁾	0.9587(0.0359) ⁽⁵⁾	0.9978(0.0038) ⁽⁴⁾	0.9994(7.98E-04) ⁽³⁾

表 4 实验结果(HVD)

测试函数	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA
DMOP1	0.0228(0.0203) ⁽²⁾	0.0230(0.0210) ⁽³⁾	0.1124(0.0208) ⁽⁵⁾	0.0928(0.1391) ⁽⁴⁾	0.0190(0.0146) ⁽¹⁾
DMOP2	0.2908(0.0250) ⁽⁵⁾	0.2903(0.0242) ⁽⁴⁾	0.2078(0.0250) ⁽³⁾	0.1178(0.0435) ⁽²⁾	0.0359(0.0112) ⁽¹⁾
DMOP3	0.4714(0.0285) ⁽⁴⁾	0.4720(0.0283) ⁽⁵⁾	0.0658(0.0136) ⁽¹⁾	0.2797(0.0272) ⁽²⁾	0.3187(0.0296) ⁽³⁾
FDA1	0.1361(0.0175) ⁽³⁾	0.1369(0.0170) ⁽⁴⁾	0.0853(0.0202) ⁽²⁾	0.2971(0.0166) ⁽⁵⁾	0.0381(0.0144) ⁽¹⁾
FDA2	0.0206(0.0147) ⁽²⁾	0.0211(0.0151) ⁽³⁾	0.1249(0.0467) ⁽⁴⁾	0.2666(0.0147) ⁽⁵⁾	0.0168(0.0141) ⁽¹⁾
FDA3	1.0917(0.0991) ⁽²⁾	1.0932(0.0985) ⁽³⁾	1.3223(0.0780) ⁽⁵⁾	1.1626(0.0469) ⁽⁴⁾	0.9241(0.0826) ⁽¹⁾
FDA4	1.5893(0.0666) ⁽⁵⁾	1.5963(0.0678) ⁽⁴⁾	0.2708(0.0357) ⁽¹⁾	0.4345(0.0729) ⁽³⁾	0.2740(0.0243) ⁽²⁾
FDA5	5.4164(0.1622) ⁽⁵⁾	5.4210(0.1620) ⁽⁴⁾	2.3772(0.2731) ⁽³⁾	2.1995(0.3906) ⁽²⁾	1.8867(0.0938) ⁽¹⁾

表 5 实验结果(GD)

测试函数	DNSGA-II-A	DNSGA-II-B	FPS-RM-MEDA	PPS-RM-MEDA	SGEA
DMOP1	0.0088(0.0051) ⁽²⁾	0.0085(0.0050) ⁽³⁾	0.0394(0.0062) ⁽⁴⁾	0.0509(0.0937) ⁽⁵⁾	0.0082(0.0054) ⁽¹⁾
DMOP2	0.1183(0.0095) ⁽³⁾	0.1190(0.0089) ⁽⁴⁾	0.0733(0.0090) ⁽²⁾	0.4281(0.0173) ⁽⁵⁾	0.0121(5.72E-04) ⁽¹⁾
DMOP3	0.2001(0.0150) ⁽⁴⁾	0.2010(0.0155) ⁽⁵⁾	0.0296(0.0025) ⁽¹⁾	0.1137(0.0121) ⁽²⁾	0.1311(0.0136) ⁽³⁾
FDA1	0.0582(0.0039) ⁽⁴⁾	0.0591(0.0040) ⁽⁵⁾	0.0413(0.0066) ⁽²⁾	0.0427(0.0195) ⁽³⁾	0.0148(0.0021) ⁽¹⁾
FDA2	0.0108(9.02E-04) ⁽²⁾	0.0113(9.55E-04) ⁽³⁾	0.0473(0.0336) ⁽⁴⁾	0.0636(0.0106) ⁽⁵⁾	0.0092(6.33E-04) ⁽¹⁾
FDA3	0.1082(0.0331) ⁽²⁾	0.1088(0.0341) ⁽³⁾	0.1952(0.0328) ⁽⁴⁾	0.2195(0.0181) ⁽⁵⁾	0.0403(0.0291) ⁽¹⁾
FDA4	0.7634(0.0449) ⁽⁴⁾	0.7642(0.0452) ⁽⁵⁾	0.1246(0.0046) ⁽¹⁾	0.2115(0.0202) ⁽³⁾	0.1830(0.0067) ⁽²⁾
FDA5	1.0239(0.0549) ⁽⁴⁾	1.0311(0.0551) ⁽⁵⁾	0.3682(0.0406) ⁽²⁾	0.4803(0.0352) ⁽³⁾	0.3626(0.0086) ⁽¹⁾



LIU Ruo-Chen, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. Her main research interests include computing intelligence, data mining and pattern recognition.

LI Jian-Xia, Ph. D. candidate. Her main research interest is dynamic multi-objective optimization.

LIU Jing, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. Her main research interests include evolutionary computation, data mining and network analysis and mining.

JIAO Li-Cheng, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include intelligent perception and image understanding.

Background

In real life, many optimization problems involve optimizing multiple objectives simultaneously which are in conflict with each other, and the objective function, constraints or related parameters may change dynamically with time, such a problem is called as dynamic multi-objective optimization problem (DMOP). Since the optimal solution set of the DMOP has uncertainty, so when the environment changes, how to quickly track the optimal solution set of the new environment is the difficulty in solving DMOPs.

In recent years, more and more scholars begin to pay attention to the research of dynamic multi-objective optimization. This is because dynamic multi-objective optimization has important theoretical research value, and it also has a very wide application prospect in many aspects of real life and industrial production, such as transportation management, energy saving and environmental protection, production dispatching and so on.

The characteristics of DMOPs changing over time have brought great challenges to solving DMOPs. Algorithms should not only be able to track the optimal solution, but also be able to quickly respond to environmental changes. These challenges make it difficult to design effective algorithms for various DMOPs, let alone design effective algorithms to solve miscellaneous complex practical DMOPs. Therefore, the

study of dynamic multi-objective optimization needs to invest more energy to explore the characteristics of DMOPs, and to design efficient algorithms to solve various theoretical and practical DMOPs.

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 61876141, 61373111, 61272279, 61103119 and 61203303), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Nos. K50511020014, K5051302084), and the Provincial Natural Science Foundation of Shaanxi of China (No. 2014JM8321).

In this paper, we give a brief review of the dynamic multi-objective optimization. (1) This paper first introduces the relevant theoretical background of dynamic multi-objective optimization. (2) This paper summarizes the existing benchmark functions. (3) Based on the simple analysis of general framework of solving DMOPs, this paper discusses the research status of the dynamic multi-objective optimization algorithms in detail. (4) In this paper, the performance metrics are classified and introduced in detail. (5) This paper compares the performance of some mainstream dynamic multi-objective optimization algorithms. (6) This paper summarizes some practical application cases of dynamic multi-objective optimization algorithm. (7) Finally, this paper proposes the challenges and the existing problems in solving the DMOPs.