基于非标准分析的粒计算研究

刘 清 邱桃荣 刘 斓
(南昌大学计算机科学与技术系 南昌 330031)

摘 要 该文着力于研究粒计算的基本理论.粒计算作为一种粒数数系被研究,在这种数系中研究粒运算的基本定律、粒与粒之间的不可区分关系;研究这种粒数系中描述型的形式语言等.采用的方法是基于非标准分析中的超实数理论研究实值粒运算应遵循的规则,也研究了伴随二元关系的信息粒的合成、加粗、加细、并和交运算等;在分析前人工作的基础上、基于超实数理论进一步为粒计算研究定义了一种新的不可区分关系,得到了几个相关性质,并且证明了相关结果.随后定义了描述这种粒数数系的描述型形式语言——一种带不可区分关系词的二阶粒逻辑;粒常量、粒变量、粒函数项的相关运算定律也被定义了.最后,以示例演示了这种粒逻辑适应于描述粒数学定理、粒公式化简等.

关键词 粗糙集;模糊集;粒计算;二阶粒逻辑;粒数学;超实数;非标准分析
中图法分类号 TP301 **DOI 号** 10.11897/SP.J.1016.2015.01618

The Research of Granular Computing Based on Nonstandard Analysis

LIU Qing QIU Tao-Rong LIU Lan
(*Department of Computer Science and Technology, Nanchang University, Nanchang* 330031)

Abstract In the article, we focus on studying fundamental theory of granular computing. Granular computing is studied as a granular number systems. Operation laws of granulations, the indiscernibility relation of granulations in the granular number systems are also studied. The formal language for describing the granular number systems needs also to be studied. We study the operation rules of real granulations to adopt the theory of hyperreal numbers in nonstandard analysis. The operations of compound, coarsening and refining, union and intersection of information granularity with binary relations are also studied in the article. We define further a new indiscernibility relation by hyperreal theory and get several related properties based on current relative researches. And related results are proved. Subsequently, the formal language for describing granular computing—a granular language with indiscernibility relation is defined. It is called a second order granular logic in the article. The related operations of granular constants, granular variables and granular function items used in the second-order granular logic are handled necessarily in the article. Finally, the significance of describing granular mathematical theorems defined in the granular number systems is illustrated with real examples.

Keywords Rough sets; fuzzy sets; granular computing; second-order granular logic; granular mathematics; hyperreal number; nonstandard analysis

---

收稿日期:2013-07-28;最终修改稿收到日期:2015-01-12.本课题得到国家自然科学基金(61070139)、江西省自然科学基金(20114BAB201039)和江西省教育厅科技计划项目(GJJ14134)资助.**刘 清**,男,1938 年生,教授,主要研究领域为人工智能、数据挖掘、粗糙集、粒计算、逻辑及其推理. E-mail: qliu_ncu@sina.com. **邱桃荣**,男,1964 年生,博士,教授,中国计算机学会(CCF)高级会员,主要研究领域为粗糙集、粒计算、智能信息处理. **刘 斓**,女,1973 年生,硕士,实验师,主要研究方向为信息管理、软件开发、算法语言程序设计.

1 引　言

粒数学是一种以粒(Granules/Granulations)为研究对象的新型数系.正像以单个的(individual)整数、实数、二进制数为研究对象的数系一样，粒数学应当有它自身的研究理论，遵循其理论的研究方法、运算定律等.自Zadeh[1]在1979年提出粒数学，主张以粒为研究对象，而不是单个的实体以来，有许多数学家和计算机科学家热衷于研究一种关于描述粒的形式语言——一种符号逻辑.Pawlak[2]于1982年提出了Rough集，又于1987年和1991年分别研究了Rough逻辑和决策逻辑[3-4].Orlowska[5]于1985年提出了一种不可区分关系的逻辑，但Orlowska给出的不可区分关系谓词R与Pawlak提出的不可区分关系R[4]似乎是一致的，都被认为是实体的性质集合.他们对所提出的不可区分关系既未给出文字的确切解释，也没给出公式的精确描述.1993年Charaborty提出了带Rough量词的Rough逻辑[6]，并建立了一套近似推理的逻辑工具.Nakamura[7-9]于1993年和1994年分别研究了信息逻辑、不完全知识的逻辑，试图把Rough逻辑、模糊逻辑和模态逻辑融合为一体，构成分层模态逻辑.随着Rough集及Rough逻辑的研究和发展，相应地提出了信息粒和粒计算概念.1985年Hobbs发表了粒度一文[10]，文中用谓词的等价性而不是实体性质的集合，定义了不可区分关系.但他在这个定义中应用了谓词的量化概念，即应用了二阶或高阶逻辑，这无疑给这种不可区分关系进一步研究和应用带来了极大困难.虽然Hobbs将他所定义的不可区分关系用于人工智能中的问题求解和讨论了粒度的拆分与融合问题，但这与早先AI中讨论问题求解时的分解和合并似乎是类似的[11].所以，用Hobbs的粒度理论无法进一步研究Robinson[12]的非标准分析中的超实数(Hyperreal Number)，也无法进一步研究Zadeh[1]提出的粒数学，对处理信息系统中用二元关系划分的信息粒更不方便.例如，用Hobbs的粒度理论来比较两个信息粒是否可区分，既不方便用文字解释清楚，又不能用公式作精确描述.因此，研究粒数数系(以下简称粒数系)，并基于粒数系来研究粒运算定律是很有必要，而定义一种描述粒数系的形式语言也是势在必行.2001年Skowron[13]也描述了信息粒，并第一次使用粒语言这个词.但没有在他所发表的论文中定义粒语言的语法和语义，更没有构造这种粒语言的近似推理的逻辑系统.Polkowski[14-15]于2004年在瑞典的RSCTC2004学术会议上报告了以粒为变量的二阶逻辑，又在2006年南昌的FGrCFRS2006学术论坛上报告了粒空间上的粒逻辑等.但他只是在报告中提到了这些名词，却没有定义其实质性相关内容.而且他所描述的粒逻辑内容很不完整.不过从这里我们能看出研究一种描述粒数系的形式语言似乎是许多学者的研究目标.上述研究的许多描述型逻辑和介绍的描述粒的形式语言或粒逻辑，其目的在于解决粒数系中对粒语句的描述、粒的性质及粒运算定律等，在于方便对信息粒的处理.然而为实现这些目标，研究者虽付出艰辛的努力，也取得不少有益的成果，但仍未得到比较理想的研究结果.分析原因似乎他们都存在一个共同问题，那就是没有定义出现在逻辑中的粒常量、粒变量、粒函数项的运算法则，对出现的这些项也没有确定是什么类型的数据.没有给出适用于这种运算的不可区分关系词.这导致难以很好地实现对信息粒的描述和信息粒之间的比较.为此，本文讨论了粒常量、粒变量、粒函数项等构成的新数系——以粒为研究对象的粒数系，研究了在新数系中粒的性质及其运算定律等.在粒空间上定义了不可区分关系词后，研究了描述这种新型粒数系的形式语言，一种带不可区分关系谓词的粒逻辑的语法和语义.因为在这种逻辑中研究的对象是具有某种关系的多个实体构成的聚合，被称为粒，它是一种域上新型的集合数据类型，特别是粒变量项可被量化，所以我们可称这种粒逻辑为一种二阶逻辑，它被看作是一阶逻辑的扩展.我们在文中定义的不可区分关系，实际上已经把Pawlak在有限信息系统上对信息的研究很自然扩展到无限空间上对信息的研究了，也就是，给定信息系统上的属性值都是粒空间上的粒，它被理解为无穷多个相互毗邻、彼此相差无穷小的数的集合，它可被看成排成的无穷序列，是域上的集合数据类型的粒.

鉴于上述论述，粒计算的提出和研究应当是基于非标准分析中的超数理论，所以，第2节研究了基于超实数理论的实数粒的概念及其相关性质和运算法则；鉴于通常粒都伴随着一个二元关系，因此，第3节讨论了伴随着二元关系的粒的合成、加细、加粗、并和交等粒的运算；在粒数系或称粒空间中，研究的对象似乎是粒，它被看成是研究的实体域上的集合数据类型，为了更完善、更好描述、处理，甚至对其量化，作者在第4节定义了一种描述型形式语言，

一种扩展的一阶逻辑,本文称它为二阶粒逻辑;接下去是本文的结束语,简述了文中已研究的工作,并提出接下去需进一步要研究的问题.

2 粒的基本概念及其相关性质和运算

Leibniz 在建立微积分理论时,曾虚构了无穷小和无穷大的数.但长期来人们一直未发现它是什么数系下的数.后来数学家就用 ε、δ 来代替 Leibniz 虚构的无穷小和无穷大的数[16].1961 年 1 月,Robinson 用数理逻辑中的模型论方法建立了超实数数系 $^*R$,它被用作实数数系 R 的一个扩展.1965 年,Robinson[12] 正式出版他的专著.他在扩展 $^*R$ 数域上所定义的无穷小和无穷大是一个实实在在的元素,被称为超实数.所以,R 和 $^*R$ 就分别被称之为标准和非标准[16-17].既然无穷小和无穷大被定义是数,所以在作数学定理证明、运算、推导过程中就可直接参与运算,使得证明、运算、推导简洁、明朗.正如哥德尔的评价:"非标准分析不但常常能简化初等定理的证明,而且对简化艰深结论的证明也同样有效".而在实数空间 R 上,所谓无穷小,不过是极限为 0 的变量.它不是一个"数",而是一个变化过程,所以它不能被用来作除数参与除法运算,也不能被忽略不计、被剔除.

Zadeh[1] 研究了粒数学,并用粒概率的例子来说明究竟什么是粒数学[18].Zadeh 提出的粒数学实际上是将实数空间上的一个点或一个实数视为一个粒.它在 Robinson[12] 的非标准分析 $^*R$ 中被视为一个超实数,这样就将实数空间 R 扩展成超实数空间 $^*R$.如果把超实数空间 $^*R$ 被视为实值粒空间,那么超实数在实值粒空间上就被称作实值粒.基于 Zadeh[1] 的粒数学和 Robinson[12] 的非标准分析 $^*R$ 上的超实数等概念,我们可以讨论粒空间 $^*R$ 上的粒及其运算.由此,我们也可以考虑在粒空间 $^*R$ 上定义一种描述粒数系的形式语言,本文称之为二阶粒语言,并以此来描述粒数学中的定理、公式变换、公式化简和相关问题的推理等.显然,也可用这种逻辑来解决一些实际问题,如描述医学专家的临床诊断经验及其推理的形式化过程[19].

2.1 实值粒空间 $^*R$

这里,我们将讨论一维实值粒空间 $^*R$ 上的粒及其相关运算.至于二维或 n-维实值粒空间上的粒及其相关运算可模拟一维的方式进行.设一维实数空间 R,其中每个实数 a 被看成是 R 上不可分的实数,但在 $^*R$ 上却被看成在其边缘附满了无穷小量.如果把这样的超实数被看成实值粒,意思是将这个实值 a 分别与附着在它边缘上的无穷小相加或相减,就将得到无穷多个毗邻的数团.团中的每个量都相互毗邻、彼此相差无穷小的无穷序列,因此它也可看成由毗邻、彼此相差无穷小的关系产生,所以超实数可被认为是实值粒.

这个实数 a 及附着的无穷小的量构成一个整体,统称为一个超实数,也即我们将实数 a 和附在它边缘上的无穷小量融合成一个实数粒[17,19],记为 $[a]$ 或 $^*a$.由此,我们就能得到基于实数空间 R 的一个实值粒空间 $^*R$,且满足 $R \subseteq R^*$.这就是从超实数世界谈论超实数,从粒世界谈论实值粒,从拓扑空间论述邻域系统,所以实质上超实数、实值粒、邻域系统三者应当是指同一个概念,只不过从不同的世界,以不同的观点来对同一事件给予不同的称呼而已.

于是,在一维实值粒空间 $^*R$ 上我们可引入粒概念:即对任一实数 a 和正无穷小量 ε 所构造的一个区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,称为一个粒,记为 $^*a$,其中 ε 是一维实数空间 R 上的正无穷小的量,并且 a 是一维实数空间 R 上的一个实数,如图 1 所示.

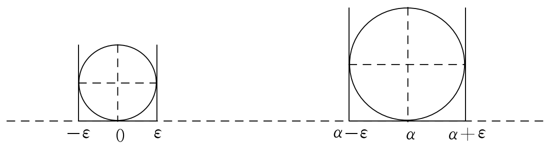

图 1 实值粒 $^*a$ 和 ^{*0}

在实空间 R 中,无穷小的量只能是 0,而在实值粒空间 $^*R$ 中却有 3 个无穷小的数 ^{*0}、$^*\varepsilon$ 和 $-^*\varepsilon$,如上述图 1 所示.$-^*\varepsilon$ 是 $^*R$ 中一个负无穷小的粒,$^*\varepsilon$ 是 $^*R$ 中一个正无穷小的粒和实值粒 $^*a$,$^*a$ 是由实数空间 R 中的实数 a 产生,它被表示为一维实空间 R 中的一个区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,或写成 $^*a$,被理解为无穷多个与 a 相互逼近且误差不大于 ε 的实数序列,这在 $^*R$ 上就被构成一个实值粒.图 2 是实值粒空间 $^*R$ 负无穷大实值粒、正无穷大实值粒及 $^*R$ 中一个无穷小的粒 ^{*0} 示意图.

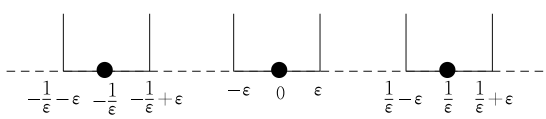

图 2 实值粒空间 $^*R$ 上的无穷大、无穷小示意图

2.2 粒空间 $^*R$ 上粒的相关运算

$\forall a \in R$,区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 被称作粒空间 $^*R$ 上的一个粒,记成 $^*a$.于是 $^*R$ 上粒的运算规则被定义如下[15-16]:

(1) ${}^*a \oplus {}^*b = {}^*(a+b)$；

(2) ${}^*a \ominus {}^*b = {}^*(a-b)$；

(3) ${}^*a \otimes {}^*b = {}^*(a\times b)$；

(4) ${}^*a \odot {}^*b = {}^*(a\div b)$.

我们可以根据超实数理论和模糊数学中区间运算的性质，证明这些运算法则是正确的，如 ${}^*a\otimes{}^*b={}^*(a\times b)$ 被证明如下[12,16-17,20]：

$$\begin{aligned}{}^*a\otimes{}^*b &= (a-\varepsilon_a, a+\varepsilon_a)\times(b-\varepsilon_b, b+\varepsilon_b)\\ &= (\min\{(a-\varepsilon_a)\times(b-\varepsilon_b), (a-\varepsilon_a)\times(b+\varepsilon_b),\\ &\quad (a+\varepsilon_a)\times(b-\varepsilon_b), (a+\varepsilon_a)\times(b+\varepsilon_b)\},\\ &\quad \max\{(a-\varepsilon_a)\times(b-\varepsilon_b), (a-\varepsilon_a)\times(b+\varepsilon_b),\\ &\quad (a+\varepsilon_a)\times(b-\varepsilon_b), (a+\varepsilon_a)\times(b+\varepsilon_b)\})\\ &= (\min\{a\times b-a\times\varepsilon_b-b\times\varepsilon_a+\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b+a\times\varepsilon_b-b\times\varepsilon_a-\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b-a\times\varepsilon_b+b\times\varepsilon_a-\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b+a\times\varepsilon_b+b\times\varepsilon_a+\varepsilon_a\times\varepsilon_b\},\\ &\quad \max\{a\times b-a\times\varepsilon_b-b\times\varepsilon_a+\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b+a\times\varepsilon_b-b\times\varepsilon_a-\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b-a\times\varepsilon_b+b\times\varepsilon_a-\varepsilon_a\times\varepsilon_b,\\ &\quad a\times b+a\times\varepsilon_b+b\times\varepsilon_a+\varepsilon_a\times\varepsilon_b\})\\ &= (a\times b-\varepsilon_{a\times b}, a\times b+\varepsilon_{a\times b})\\ &= {}^*(a\times b).\end{aligned}$$

证毕.

其他证明与此类似.

2.3 粒空间 ${}^*\boldsymbol{R}$ 上粒运算的相关性质

$\forall {}^*a, {}^*b, {}^*c\in{}^*R$，${}^*a, {}^*b, {}^*c$ 关于运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 的交换律、结合律和分配律成立，它们被列表如下：

(1) ${}^*a\oplus{}^*b={}^*b\oplus{}^*a$；

(2) ${}^*a\otimes{}^*b={}^*b\otimes{}^*a$；

(3) $({}^*a\oplus{}^*b)\oplus{}^*c={}^*a\oplus({}^*b\oplus{}^*c)$；

(4) $({}^*a\oplus{}^*b)\otimes{}^*c=({}^*a\otimes{}^*c)\oplus({}^*b\otimes{}^*c)$.

我们也可利用超实数理论和模糊数学中区间运算的性质证明这些定律是成立的[12,16-17,20].

2.4 粒空间 ${}^*\boldsymbol{R}$ 上粒的特别性质[12,16-17]

$\forall {}^*b\in{}^*R$，如果 ${}^*b>0$ 并且对任意正实数 a 有 ${}^*a>{}^*b$，那么称 ${}^*b$ 是 ${}^*R$ 中正无穷小的粒，记成 ${}^*\varepsilon$.

(1) 如果 ${}^*\varepsilon$ 是 ${}^*R$ 中正无穷小的粒，那么 $-{}^*\varepsilon$ 是 ${}^*R$ 中负无穷小的粒.

(2) 如果 ${}^*\varepsilon$ 是 ${}^*R$ 中正无穷小的粒，并且 $r\in R$ 是任意实数，那么 ${}^*(\varepsilon+r)$ 是 ${}^*R$ 中的一个实数粒 ${}^*r$.

(3) 设 ${}^*\varepsilon$ 是 ${}^*R$ 中正无穷小的粒，并且 $a\in R$ 是任意实数，那么 ${}^*(a\varepsilon)$ 是 ${}^*R$ 中的一个无穷小粒 ${}^*\varepsilon$.

(4) 设 ${}^*\varepsilon$ 是 ${}^*R$ 中正无穷小的粒，那么 ${}^*(1/\varepsilon)$ 是 ${}^*R$ 中的一个正无穷大的粒并且 $-{}^*(1/\varepsilon)$ 是 ${}^*R$ 中的一个负无穷大的粒.

(5) 设 ${}^*\varepsilon, {}^*\delta\in{}^*R$ 是 ${}^*R$ 中无穷小的粒，那么 ${}^*(\varepsilon+\delta)$ 和 ${}^*(\varepsilon\delta)$ 是 ${}^*R$ 中无穷小的粒 ${}^*\varepsilon$ 或 ${}^*\delta$.

(6) 有界性. 任意无穷小的粒与任意有界整数的倍数 n，总是不会超过 1，即 ${}^*\varepsilon n<1$.

2.5 粒空间 ${}^*\boldsymbol{R}$ 上的二元不可区分关系

事实上，在近似计算和模糊推理等学科中，等号“＝”，即相等关系词“＝”不是普遍适用的，所以 Pawlak 及其合作者都曾研究过不可区分关系. Pawlak 本人用不可区分关系定义了信息系统上的 Rough 集，提出了上下近似理论. 这不仅解决了逻辑学家和谓词逻辑的创始人 Frege 提出的边界线上的元素计算问题，而且在信息系统数据约简上也有着很好的应用. 不过 Pawlak 提出的不可区分关系被解释为信息系统上的属性子集，所以不少学者在实际应用中都把这种不可区分关系看作是等价关系. Pawlak 本人也是如此，比如，他在信息表中定义属性子集 $B=\{a,b\}\subseteq A=\{a,b,c\}$ 是不可区分关系是指 $a(x)=a(y)$ 和 $b(x)=b(y)$，即 x 和 y 关于 B 是不可区分的. 显然这里的不可区分关系是用相等关系词“＝”引入的，这实际上是把不可区分关系 B 当作等价关系来用. Hobbs 在文献[10]中用逻辑中的等价词“≡”定义了不可区分关系“～”，即 $(\forall x,y)(x\sim y)\equiv(\forall p\in R)(p(x)\equiv p(y))$，其中 R 是这个模型中全体谓词的集合，p 是 R 中任一谓词. 显然，这里对谓词进行了量化，可见这里用的条件是很强的，不仅出现了高阶量词的使用，而且引用了逻辑中的等价词“≡”，这似乎很难构造出这种不可区分关系“～”. 从这里我们看出，不少学者在研究近似计算时都设法回避相等关系词“＝”或等价关系“≡”，而尽力去研究与等价关系相近的不可区分关系似乎是必要的. 为此，我们这里根据超数理论定义一种新的不可区分关系词“∞”，它是作为实数数系 R 中的相等关系词“＝”的扩张.

设 ${}^*a, {}^*b\in{}^*R$ 是二个超实数，${}^*a$ 和 ${}^*b$ 是不可区分的，记成 ${}^*a\infty{}^*b$，它被定义为

$${}^*a\infty{}^*b \text{ iff } {}^*a\ominus{}^*b={}^*\varepsilon\in{}^*R,$$

其中“∞”是实值粒空间 ${}^*R$ 上的不可区分关系符，$\ominus$ 是实值粒空间 ${}^*R$ 上粒的减法运算符，${}^*\varepsilon$ 是实值粒空间 ${}^*R$ 上的无穷小的粒. ${}^*a$ 与 ${}^*b$ 是不可区分的，意味着由超实数理论 ${}^*a$ 和 ${}^*b$ 分别被看成无穷多个相互毗邻、误差无穷小的一个数字序列，其 ${}^*a$ 的有限部分与 ${}^*b$ 的有限部分对应项是相同或对应项相等. 而 ${}^*a$ 的无穷部分与 ${}^*b$ 的无穷部分不同，但它们的对应项无限逼近，即 ${}^*a$ 的 a_{n+1} 与 ${}^*b$ 的 b_{n+1} 无限逼近，…，${}^*a$

的 a_{n+m} 与 $^*b$ 的 b_{n+m} 无限逼近.其实被看作伴随一个二元关系的任一粒总是有限或无穷可数序列,因为用二元关系划分的粒中的元素关于这个二元关系总是可以排列成与自然数一一对应的序列,所以它应当是有限或无穷可数序列.由此可见,如果任意两个粒 $^*s$ 与 $^*w$ 不可区分,那么两者的有穷或看得见部分对应项相同或对应项相等,而其无穷或看不见部分被认为对应项无限逼近.很明显这里定义的不可区分关系与 Pawlak 提出的不可区分关系不同.Pawlak 提出的不可区分关系,实质上是在信息表上用相等关系词"="引入的,即属性关于实体的属性值相等,而这里是基于超实数概念引入的.正因如此,不少研究者把 Pawlak 的不可区分关系理解为等价关系并当作等价关系用.

这里应当强调的是粒总可以被看成是一个数字序列,尽管实际生活中研究的对象有许多非数字的东西,如颜色、形状和材料的性质等,但实际上它们最终都可以表示成数字形式.这正如 2500 多年前古希腊著名哲学家和数学家彼达歌拉斯提出的著名论断:"Everything is a matter of numbers",即所有存在的事物,最终总可以把它数字化.所以,无论是数字还是非数字的粒,都可被看成数字序列.又因信息科学中的每个被划分的粒都必然伴随一个二元关系,所以在信息科学中的任一个粒都应当是一个有限或无穷可数序列.

2.6 不可区分关系"∞"的几个性质

(1)同一性. $\alpha\infty\alpha$;

(2)对称性. $\alpha\infty\beta\rightarrow\beta\infty\alpha$;

(3)传递性. $\alpha\infty\beta\wedge\beta\infty\gamma\rightarrow\alpha\infty\gamma$;

因为有限部分:$\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 与 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 对应项相同,$\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 与 $\gamma_i(i=1,\cdots,n)$ 对应项相同,所以 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 与 $\gamma_i(i=1,\cdots,n)$ 对应项相同.无限部分:$\alpha_{n+j(j=1,\cdots)}$ 与 $\beta_{n+j(j=1,\cdots)}$ 对应项无限逼近,即 $\alpha_{n+j(j=1,\cdots)}\ominus\beta_{n+j(j=1,\cdots)}={}^*\varepsilon_{\alpha\beta}$ 无穷小.同理,$\beta_{n+j(j=1,\cdots)}$ 与 $\gamma_{n+j(j=1,\cdots)}$ 对应项无限逼近,所以 $\beta_{n+j(j=1,\cdots)}\ominus\gamma_{n+j(j=1,\cdots)}={}^*\varepsilon_{\beta\gamma}$ 无穷小.也就是说 $\alpha_{n+j(j=1,\cdots)}$ 与 $\gamma_{n+j(j=1,\cdots)}$ 对应项无限逼近,即 $\alpha_{n+j(j=1,\cdots)}\ominus\gamma_{n+j(j=1,\cdots)}={}^*\varepsilon_{\alpha\gamma}={}^*\varepsilon_{\alpha\beta}\oplus{}^*\varepsilon_{\beta\gamma}$ 无穷小(因无穷小 $\oplus$ 无穷小仍然是无穷小).所以,传递性成立.

(4)替换性. $\alpha\infty\beta\rightarrow P(\cdots\alpha\cdots)\infty P(\cdots\beta\cdots)$.

定理 1. 任意伴随二元关系的非空无穷粒 $[x]_R$ 中,总存在一个无穷可数子粒 $[y]_R$.

证明. 因为任意伴随二元关系的无穷粒都被看成一个无穷序列,所以我们可作下面操作,以此具体构建一个无穷可数子粒.

从 $[x]_R$ 中任取一个元素 y_1,因 $[x]_R$ 是无穷的,所以 $[x]_R\ominus\{y_1\}\neq\{\}$(注:$\{\}$ 意味着空粒,仍存在无穷小的粒或剩余序列,不是没有元素的空序列).于是可从 $[x]_R\ominus\{y_1\}$ 的剩余序列中再取一元素 $y_2\neq y_1$,继续如此操作下去,总可以挑选出互不相同的如下序列:

$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots,y_{n+m}(\forall y_i\in[x]_R$,且 $y_i\neq y_j$,当 $i\neq j)$.

再因为 $[x]_R$ 是无穷,所以 $[x]_R\ominus\{y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_{n+m}\}\neq\{\}$.由归纳法,我们无疑可得到无穷序列 $y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_{n+m},\cdots$,显然它构成 $[x]_R$ 的一个无穷可数子粒.

$[y]_R=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_{n+m},\cdots\}$,$[y]_R\subseteq[x]_R$. 证毕.

这定理 1 将在进一步研究粒的性质及其应用时应当会有意义.

3 伴随二元关系的信息粒的相关运算

3.1 伴随二元关系的信息粒的合成运算

设 $^*a_R\in{}^*R$ 和 $^*b_S\in{}^*S$ 分别由关系 R 和 S 产生的粒,$^*a_R$ 和 $^*b_S$ 的合成运算是指 R 和 S 的合成关系 $R\bigcirc S$ 并作用于 $^*a_R$ 和 $^*b_S$ 的链结 $^*a_R\cdot{}^*b_S$ 集上,即

$$R\bigcirc S(^*a_R\cdot{}^*b_S),$$

其中"·"是两个信息粒的链结符.该式表示用合成关系 $R\bigcirc S$ 重新划分两个粒的链结集.

例如,$R=\{(1,2),(3,4),(2,2)\}$ 和 $S=\{(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)\}$ 都是 $X=\{1,2,3,4,5\}$ 上的二元关系,有 $^*a_R=[3]_R=\{3,4\}$ 和 $^*b_S=[2]_S=\{2,4,5\}$.我们有 $^*a_R\cdot{}^*b_S=\{2,3,4,5\}$ 和 $R\bigcirc S=\{(1,5),(3,2),(2,5)\}$.于是有 $R\bigcirc S(^*a_R\cdot{}^*b_S)=\{[2]_{R\bigcirc S},[3]_{R\bigcirc S},[4]_{R\bigcirc S},[5]_{R\bigcirc S}\}$,其中 $[2]_{R\bigcirc S}=\{2,3,5\}$,$[3]_{R\bigcirc S}=\{3,2\}$,$[4]_{R\bigcirc S}=\{\}$,$[5]_{R\bigcirc S}=\{2,5\}$.

3.2 伴随二元关系的信息粒的加细运算

设 $^*a_R$ 是由定义在 X 上的关系 R 产生的粒,细化粒 $^*a_R$ 意味着细化关系 R 得到新关系 S,并将 S 作用于 X,即用 S 重新划分 X 得到的新粒 $^*b_S$,它必须满足

$$^*b_S\subseteq{}^*a_R.$$

它表示经细化关系 S 划分 X 得到的任一粒 $^*b_S$ 必须包含于经 R 划分 X 的旧粒 $^*a_R$ 之中.

设 $S=(U,A)$ 是一信息系统,其中 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6x_7,x_8\}$,$A=\{a,b,c,d,e,f\}$,如表 1 所示.

表 1　信息系统 $S=(U,A)$

U	A					
	a	b	c	d	e	f
x_1	${}^*1_{a1}$	${}^*1_{b1}$	${}^*0_{c1}$	${}^*0_{d1}$	${}^*1_{e1}$	${}^*0_{f1}$
x_2	${}^*1_{a2}$	${}^*1_{b2}$	${}^*1_{c2}$	${}^*0_{d2}$	${}^*1_{e2}$	${}^*1_{f2}$
x_3	${}^*1_{a3}$	${}^*1_{b3}$	${}^*0_{c3}$	${}^*1_{d3}$	${}^*0_{e3}$	${}^*1_{f3}$
x_4	${}^*1_{a4}$	${}^*0_{b4}$	${}^*1_{c4}$	${}^*0_{d4}$	${}^*1_{e4}$	${}^*1_{f4}$
x_5	${}^*1_{a5}$	${}^*0_{b5}$	${}^*1_{c5}$	${}^*0_{d5}$	${}^*1_{e5}$	${}^*0_{f5}$
x_6	${}^*1_{a6}$	${}^*1_{b6}$	${}^*0_{c6}$	${}^*0_{d6}$	${}^*0_{e6}$	${}^*1_{f6}$
x_7	${}^*0_{a7}$	${}^*1_{b7}$	${}^*0_{c7}$	${}^*1_{d7}$	${}^*1_{e7}$	${}^*0_{f7}$
x_8	${}^*0_{a8}$	${}^*1_{b8}$	${}^*1_{c8}$	${}^*1_{d8}$	${}^*0_{e8}$	${}^*1_{f8}$

设 $R=B=\{a,b\}$ 是 U 上不可区分关系，即有 $a(x_1)={}^*1_{a1}\infty{}^*1_{a2}=a(x_2)$，$a(x_2)={}^*1_{a2}\infty{}^*1_{a3}=a(x_3)$，$a(x_3)={}^*1_{a3}\infty{}^*1_{a6}=a(x_6)$，$b(x_1)={}^*1_{b1}\infty{}^*1_{b2}=b(x_2)$，$b(x_2)={}^*1_{b2}\infty{}^*1_{b3}=b(x_3)$，$b(x_3)={}^*1_{b3}\infty{}^*1_{b6}=b(x_6)$等等. 如设 $S=C=\{a,b,c\}$ 是 R 的加细不可区分关系，即有 $a(x_1)={}^*1_{a1}\infty{}^*1_{a3}=a(x_3)$，$a(x_3)={}^*1_{a3}\infty{}^*1_{a6}=a(x_6)$，$b(x_1)={}^*1_{b1}\infty{}^*1_{b3}=b(x_3)$，$b(x_3)={}^*1_{b3}\infty{}^*1_{b6}=b(x_6)$，$c(x_1)={}^*1_{c1}\infty{}^*1_{c3}=c(x_3)$，$c(x_3)={}^*1_{c3}\infty 1_{c6}=c(x_6)$等等，那么 R 在 U 上的划分 $U/R=\{\{x_1,x_2,x_3,x_6\},\{x_4,x_5\},\{x_7,x_8\}\}$，$S$ 在 U 上的划分 $U/S=\{\{x_1,x_3,x_6\},\{x_2\},\{x_4,x_5\},\{x_7\},\{x_8\}\}$. 可见，$U/S$ 中任一粒 ${}^*x_S$包含在 U/R 的某一个中，${}^*x_S\subseteq{}^*x_R$ 中.

显然，此处的属性实值粒 ${}^*1_{ai}$，${}^*0_{aj}$，…；${}^*1_{bi}$，${}^*0_{bj}$，…；…；${}^*1_{f1}$，${}^*0_{fj}$，…可以是离散(整数)，也可以是实数粒. 因此，引入实实在在的不可区分关系后，用 Pawlak 的 Rough 集理论处理信息表就不局限于整数值信息表，而是可直接在实值信息表上进行操作. 事实上，信息系统上的实体分类是用不可区分关系符“∞”关于属性粒值可区分和不可区分来进行分类，而不是用相等关系符“＝”关于属性整数值相等和不相等来进行分类，就这个意义上说，对实值信息系统就可不必施行离散化过程.

3.3　伴随二元关系的信息粒的加粗运算

设 ${}^*a_R$是由定义在 X 上的关系 R 产生的粒，粗化粒 ${}^*a_R$意味着加粗关系 R 得到新关系 S，并将 S 作用于 X，即用 S 重新划分 X 得到的新粒 ${}^*b_S$，它必须满足 ${}^*a_R\subseteq{}^*b_S$. 它表示经粗化关系 S 划分 X 得到的任一粒 ${}^*b_S$必须包含经 R 划分 X 的某个旧粒 ${}^*a_R$.

例如，在表 1 所给出的信息系统中，对 R 加粗，即在 U 上定义一个粗不可区分关系 $W=\{a\}$，则有 $U/W=\{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\},\{x_7,x_8\}\}$. 显然，在粗不可区分关系 W 划分 U 得到的粒集 U/W 中，任取一个粒 ${}^*x_W$，总可以在由 R 对 U 划分的粒集 U/R 中，找到一个粒 ${}^*x_R$被包含于 ${}^*x_W$中，即 ${}^*x_R\subseteq{}^*x_W$.

3.4　伴随二元关系的信息粒的并运算

设 ${}^*u_R\in{}^*R$ 和 ${}^*v_S\in{}^*R$ 分别由关系 R 和 S 划分的粒，${}^*u_R$和 ${}^*v_S$的并运算是指 R 和 S 的并关系 $RⓤS$ 作用于 ${}^*u_R$和 ${}^*v_S$两个粒链结 ${}^*u_R\cdot{}^*v_S$集上，即

$$RⓤS({}^*u_R\cdot{}^*v_S)={}^*w_{RⓤS},$$

其中 ⓤ 是伴随二元关系的信息粒并运算符，“$\cdot$”是伴随二元关系的信息粒链结符. 该式运算结果 ${}^*w_{RⓤS}$是一个伴随并二元关系新的信息粒，它应当分别被包含在两个参与运算旧信息粒中.

例如，在表 1 所给出的信息系统中，取 $R=\{a,b\}$和 $S=\{b,c\}$都是 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$上的二元关系，且 $R=\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,d,e,f\}$，

$$S=\{b,c\}\subseteq\{a,b,c,d,e,f\}.$$

任取 ${}^*u_R=\{x_1,x_2,x_3,x_6\}$，${}^*v_S=\{x_1,x_3,x_6,x_7\}$. 有

$${}^*u_R\cdot{}^*v_S=\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}\text{和 }RⓤS=\{a,b,c\}.$$

于是得$RⓤS({}^*u_R\cdot{}^*v_S)={}^*w_{RⓤS}=\{x_1,x_3,x_6\}_{RⓤS}$.

事实上两个参与运算的信息粒所带关系的并是它们的加细，因此运算结果应当取分别被包含在参与运算的带关系的信息粒中，即

$$\{x_1,x_3,x_6\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_6\},$$
$$\{x_1,x_3,x_6\}\subseteq\{x_1,x_3,x_6,x_7\}.$$

3.5　伴随二元关系的信息粒的交运算

设 ${}^*u_R\in{}^*R$ 和 ${}^*v_S\in{}^*R$ 分别由关系 R 和 S 划分的粒，${}^*u_R$和 ${}^*v_S$的交运算是指 R 和 S 的交关系 $RⓝS$ 并作用于 ${}^*u_R$和 ${}^*v_S$两个粒链结 ${}^*u_R\cdot{}^*v_S$集上，即

$$RⓝS({}^*u_R\cdot{}^*v_S)={}^*w_{RⓝS},$$

其中 ⓝ 是伴随二元关系的信息粒的交运算符，“$\cdot$”是伴随二元关系的信息粒链结符. 该式运算结果 ${}^*w_{RⓝS}$是一个伴随交二元关系新的信息粒，它应当包含两个参与运算旧信息粒的每一个.

例如，在表 1 所给出的信息系统中，取 $R=\{a,b\}$和 $S=\{b,c\}$都是 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$上的二元关系，且

$$R=\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,d,e,f\},$$
$$S=\{b,c\}\subseteq\{a,b,c,d,e,f\},$$

任取 ${}^*u_R=\{x_1,x_2,x_3,x_6\}$，${}^*v_S=\{x_1,x_3,x_6,x_7\}$. 有

$${}^*u_R\cdot{}^*v_S=\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}\text{和 }RⓝS=\{b\}.$$

于是得 $RⓝS({}^*u_R\cdot{}^*v_S)={}^*w_{RⓝS}=\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}_{RⓝS}$.

事实上两个参与运算的信息粒所带关系的交是它们的加粗，因此运算结果应当包含参与运算的带

关系的旧信息粒的每一个,即

$$\{x_1,x_2,x_3,x_6\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\},$$

$$\{x_1,x_3,x_6,x_7\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}.$$

上述定义的伴随二元关系的信息粒的运算为不同层次、不同网页上的粒建立了有机的联系,实现了跨层次、跨网页的粒运算,自然为信息科学中相关信息的推理、实际问题的处理提供了极大的方便,应当说它为粒计算这个学科建立了粒信息推理,完善了粒计算运算体制的基本理论.

4 粒空间 $^*R$ 上的描述形式语言——一种二阶粒语言

粒计算实质上是一种粒化求解或者称为分而治之的方法学.它应当是 AI 中问题求解的一种方法或技术,所以粒计算似乎是信息科学中研究信息计算和信息推理有意义的研究学科.而这里定义的一种描述型形式语言是一种带不可区分关系词"∞"的二阶粒逻辑,它是粒数系中被用来描述粒语句的粒语言,之所以称它为二阶的,是因为这种逻辑中的项是粒,一种新型域上的集合数据类型,它也是信息粒和研究信息粒推理的较好工具,所以研究这种粒逻辑应当是有意义的[13,15-16,21-27].当年,Robinson[16]及对非标准分析有兴趣的研究学者在学习、研究非标准分析时,也设计了一种描述型的形式语言.但他们在构造的形式语言中,没有明确指出其中涉及的项,超实数是域上的集合数据类型,而且把相等关系词"="定义为一种谓词.在粒数系或超实数数系中相等关系词"="似乎是不普遍适用的.如 $^*a$ 和 $^*b$ 是两个无穷小的实值粒(或超实数),则意味着实数 a 和 b 分别被无穷小的量包围着,所以 $^*a$ 和 $^*b$ 分别被理解为无穷多个逼近 a 和 b 的元素生成的无穷序列.那么我们怎么去找它们之间的对应无穷小的量对应相等或对应等价呢?已有不少学者在为研究近似计算而设计描述性逻辑语言时总是回避以相等关系词"="或等价关系作为谓词被引用,而是尽力寻找与等价关系相近的不可区分关系引作逻辑中的谓词,如 Orlowska 在文献[5]中就是以不可区分关系 R 被用作她设计的逻辑中的新谓词,其目的在于有效地解决经典逻辑中处理近似计算、粒数学、模糊数学和超实数等问题.但由于 Orlowska 定义的不可区分关系是信息表中属性的子集,因此只限于处理整数值信息表,对于实数值信息表必须离散化.这导致实际应用时很不方便,也带来了一定的困难.

我们这里基于超实数理论,根据超实数概念本文中新定义了不可区分关系符"∞",它被用作逻辑中一种新的谓词,为此我们称之为带不可区分关系词"∞"的粒逻辑.值得注意的是一阶逻辑不能有效地描述粒空间上的由粒构成的语句,因它受限于涉及的项是单独的个体,而非数域上的集合数据类型.而这里定义的粒逻辑是一种非标准一阶语言,被用作为一阶的推广,即允许出现的项为领域上的集合数据类型,对其变量项可被量化.只有这种被称作二阶的粒逻辑才能有效地描述粒空间上由粒构成的粒语句或超实数空间由超实数构成的粒数学公式,这也就是 Robinson 根据数理逻辑中的模型论方法,提出非标准分析,定义无穷小、无穷大确确实实是一个数,被称作为超实数的充分依据.

4.1 语 法

设 R 是实数空间,$^*R$ 是实值粒空间.如果 U 是 R 的子空间,那么 $^*U$ 是 $^*R$ 的子空间.这种粒逻辑可被用来描述粒数学(超实数数系)中的粒数学定理,也可被用来描述专家的经验,如,描述医学专家的临床诊疗经验[24].这种粒逻辑被缩写成 $L_{^*u}$.

(1) 符号集

①粒常量:$^*U$ 中所有的实体都被称为研究对象;

②粒变量:$x_1,\cdots,x_n,\cdots$;

③谓词:$\infty,\in$;

④联结词:$\wedge,\neg$;

⑤量词:$\exists$;

⑥方括号:[,].

(2) 合式公式

① 原子公式:

$^*u_1\infty{}^*u_2$, $^*u_1\infty x_i$, $x_i\infty{}^*u_2$, $x_i\infty x_j$;

$^*u_1\in{}^*u_2$, $^*u_1\in x_i$, $x_i\in{}^*u_2$, $x_i\in x_j$.

其中 $^*u_i$ 为 $^*U$ 上的粒常量实体,x_i 为 $^*U$ 上的粒变量,因为是变量,所以在其左上角省略了星号.不包含任何联结词或量词的公式被称作原子公式.所有原子公式都被称作 $L_{^*U}$ 中的合式公式.

② 设 α,β 是 $L_{^*U}$ 中的公式,那么下面公式都是 $L_{^*U}$ 中的合式公式:

$$\neg[\alpha],\forall x_i[\alpha],[\alpha]\wedge[\beta],\neg[\neg[\alpha]],$$

$$\neg[\forall x_i[\alpha]],\forall x_i[\neg[\alpha]],\forall x_i[\forall x_j[\alpha]],$$

$$[\alpha]\rightarrow[\beta],[\alpha]\vee[\beta],[\alpha]\leftrightarrow[\beta].$$

③ 重复利用上述这些规则得到的公式都是 $L_{^*U}$ 中的合式公式.

(3) 句子

不包含任一自由变量的公式,被称作句子,例

如，$\exists x_2[\exists x_1[x_1\in x_2]]\wedge[{}^*u_1\in{}^*u_2]$.

(4) 公理和推理规则

在这种逻辑推理系统中是以粒为推理对象，即出现在这种推理公式中的符号或是粒常量或粒变量或粒函数项等.它们都表示粒符号，以粒为其值.在这种粒推理中建立起来的推理规则、定理和公理等都可被用作粒计算的理论基础，也即作为粒计算用来推理和处理问题的新工具.例如，两个谓词 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 不可区分：$P(x)\infty Q(x)$ 当且仅当无论粒变量 x 怎么变化，其有限部分对应项使得 $P(x_n)=Q(x_n)$，其无限部分对应项使得 $P(x_{n+m})$ 真值无限逼近 $Q(x_{n+m})$ 的真值.这里的真是指 $\models_\infty P(x)$，即无论粒变量 x 怎么变化，其有限部分对应项使得 $P(x_n)=T$(真)，而其无限部分对应项使得 $P(x_{n+m})$ 无限逼近 T(真)；这里的假是指 $\models_\infty\neg P(x)$，即无论粒变量 x 怎么变化，其有限部分对应项使得 $P(x_n)=F$(假)，而其无限部分对应项使得 $P(x_{n+m})$ 无限逼近 F(假).在这种意义下，下面的粒空间 ${}^*R$ 上的粒假言推理规则是有效的，即

$$\frac{\begin{array}{l}P(x)\text{（这里的 }P(x)\text{ 是指}\vdash_\infty P(x)\text{）}\\ P(x)\rightarrow_\infty Q(x)\text{（或写成}\vdash_\infty P(x)\rightarrow Q(x)\text{）}\end{array}}{Q(x)\text{（这里的 }Q(x)\text{ 是指}\vdash_\infty Q(x)\text{）}}.$$

由此建立一个带不可区分关系词的粒逻辑推理系统是完全有可能的.事实上，在近似计算和模糊推理等学科中，等号"="，即相等关系词是不能普遍适用的，所以建立带不可区分关系词的粒逻辑推理系统应当是完全必要的.

当然，要使这种二阶粒逻辑构造成完备的公理化演绎推理系统，似乎还要增加有关必要的受限条件，以使其避开出现罗素矛盾.

4.2　语　义

(1) 公式的真值

设 $K\subseteq L_{{}^*U}$ 是公式的集合，映射 t 被定义在 K 上，t：$K\rightarrow\{$真(true)，假(false)$\}$.如果 α 是 K 上的一个公式，那么它必需是下面情况之一：

① 在公式 α 中不存在任一量词或联结词是作为句子，如，α：${}^*u_1\in{}^*u_2$，则 $t(\alpha)=$true，或 ${}^*u_1\notin{}^*u_2$，则 $t(\alpha)=$false；若 ${}^*u_1\infty{}^*u_2$，则 $t(\alpha)\infty$true，或 $\neg({}^*u_1\infty{}^*u_2)$，则 $t(\alpha)\infty$false.

② 设 α 是 $\neg[\beta]$ 或 $[\beta]\wedge[\gamma]$ 或 $\exists x_i[\delta]$，其中 β,γ 是不含任一量词或联结词的公式或者说 β,γ 是句子，δ 是只包含自由变量 x_i 的句子，那么 $t(\alpha)\infty$true 或 $t(\alpha)\infty$false.

③ $t(\alpha)=$true，记成 $\models\alpha$；$t(\alpha)\infty$true，记成 $\models_\infty\alpha$；$t(\alpha)=$false，写成 $\models\neg\alpha$；$t(\alpha)\infty$false，记成 $\models_\infty\neg\alpha$.

例如，设 ${}^*u\in{}^*U$ 是粒常量或粒实体，如果公式 α 被表示为

$$\alpha:[\neg[{}^*u\infty\varnothing]]\wedge[\neg[\exists x_i[x_i\in{}^*u]]],$$

那么 $t(\alpha)\infty$true.

(2) 就语义上而言，下面式子成立

① $[\alpha]\rightarrow[\beta]$ 当且仅当 $\neg[[\alpha]\wedge[\neg[\beta]]]$；

② $[\alpha]\vee[\beta]$ 当且仅当 $\neg[[\neg[\alpha]]\wedge[\neg[\beta]]]$；

③ $[\alpha]\leftrightarrow[\beta]$ 当且仅当 $[[\alpha]\rightarrow[\beta]]\wedge[[\beta]\rightarrow[\alpha]]$；当且仅当 $[\neg[[\alpha]\wedge[\neg[\beta]]]]\wedge[\neg[[\beta]\wedge[\neg[\alpha]]]]$；

④ $\forall x_i[\alpha]$ 当且仅当 $\neg[\exists x_i[\neg[\alpha]]]$.

5　对 ${}^*\boldsymbol{R}$ 中的粒数学定理的描述

设 ${}^*f$ 在 ${}^*a\in{}^*A\subseteq{}^*R$ 上是连续的粒函数，即对任意无穷小粒 ${}^*\varepsilon>{}^*0$(ε 是 R 中无穷小，即从大于 0 方向逼近 0，所以 ${}^*\varepsilon>{}^*0$)，存在 ${}^*\delta>{}^*0$，对每个 $x\in{}^*A$，$|x\ominus{}^*a|\in{}^*\delta$ 都有

$$|{}^*f(x)\ominus{}^*f({}^*a)|\in{}^*\varepsilon.$$

上述粒空间 ${}^*R$ 上的连续粒函数在粒数学中被描述成如下定理.

定理 2.　${}^*f$ 在粒 ${}^*a\in{}^*A\subseteq{}^*R$ 上是连续的当且仅当对任意 ${}^*\varepsilon>{}^*0$，总存在一个 ${}^*\delta>{}^*0$，使得对任意 $\forall x\in{}^*A\subseteq{}^*R$，当 $|x\ominus{}^*a|\in{}^*\delta$ 时，就有 $|{}^*f(x)\ominus{}^*f({}^*a)|\in{}^*\varepsilon$.

这个粒数学定理用 $L_{{}^*U}$ 中的公式被描述如下：

$$\forall x[\exists{}^*\delta[{}^*\delta>{}^*0\wedge x\in{}^*A\wedge|x\ominus{}^*a|\in{}^*\delta]\rightarrow$$
$$\forall{}^*\varepsilon[{}^*\varepsilon>{}^*0\wedge|{}^*f(x)\ominus{}^*f({}^*a)|\in{}^*\varepsilon]]$$

或写成

$$\vdash_\infty[\forall x[\exists{}^*\delta[{}^*\delta>{}^*0\wedge x\in{}^*A\wedge|x\ominus{}^*a|\in{}^*\delta]\rightarrow$$
$$\forall{}^*\varepsilon[{}^*\varepsilon>{}^*0\wedge|{}^*f(x)\ominus{}^*f({}^*a)|\in{}^*\varepsilon]]].$$

因此，要证明 ${}^*R$ 中的粒数学定理，只需证明这公式关于不可区分关系词"∞"是真即可，或证明这公式关于"∞"是重言式.

下面是粒空间 ${}^*R$ 上的粒数学公式化简的示例.

例. 设粒空间 ${}^*U\subseteq{}^*R$ 上定义的公式集 $L_{{}^*U}$ 上的公式 α：

$$(p(g(f(x))\vee q(x))\wedge((f(g({}^*b))\infty{}^*a)\vee$$
$$R(g({}^*c)))\wedge(x\infty g({}^*b)).$$

显然在这个例子中，x 是自由变量，利用不可区分关系的替换性质和通常的逻辑公式变换准则，上式公式可得到化简，即 α 被简化为

$$(p(g({}^*a))\vee q(g({}^*b)))\vee(R(g({}^*c))),$$

去掉最外层括号，得到最后约简式为

$$p(g({}^*a))\vee q(g({}^*b))\vee R(g({}^*c)).$$

6 结束语

粒计算似乎应当归结为当年数学界研究非标准分析的继续，为“非标准分析”进一步研究增添了新的思路，探索出一条新的基于二元关系的粒计算：一种分而治之和粒化求解的方法学[28-29]．也为非标准分析在信息科学中的应用开辟了新方向[29]．反过来用非标准分析的理论来研究粒计算，无疑将为基于二元关系的粒计算更加深入研究提供了充分的理论依据．

研究基于超实数的粒语言的意义在于：这种粒语言将为粒计算的研究提供一种新的理论和方法学，同时也为经典逻辑和其他非标准逻辑在实践中的应用提供一种新思路．这种粒语言可被用来描述超实数空间的粒数学定理及判定其定理的真、假结果值，同时也可被用来描述专家的临床诊断经验并推断出其诊断结果[24-27]．因此，这种理论可被用于信息科学，是信息分类和信息处理的较好的工具．

本文定义的粒描述型形式语言与其他文献中定义的超实数描述型形式语言是有区别的．这里定义的是一种二阶或高价粒语言，并引用了不可区分关系作为新谓词，所以本文定义的粒逻辑描述的粒语句能自然地被用来判断其描述的粒语句的模型；而其他文献中定义的描述型形式语言似乎没有明确指出其涉及的项是领域上的集合数据类型，仍然是作为一阶处理，并仍然使用相等关系词作为谓词，所以涉及由超实数构成的语句，特别对带量词的语句或公式，一阶逻辑是无能为力的．在第 5 节中选用的示例是这种二阶逻辑应用的初步，属探讨性研究．

伴随二元关系的信息粒并交运算在布料色卡图像检索中的具体应用，我们已在 2014 年 10 月苏州国际粒计算高峰论坛（GrCF2014）会议上报告过，评论尚高．事实上，还应当有许多理论需要更进一步去研究、完善，比如，通常伴随着二元关系的信息粒的更多推理规则、二阶逻辑公理化推理系统等，也都寄希望于通过超实数理论对粒计算展开更进一步、更深化的研究．

致　谢　本文在撰写过程中涉及到相关概念，曾与 Lin 教授在电话里讨论过多次，听取了他许多宝贵意见，在此对 Lin 教授表示敬意和感谢！

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity//Gupta M, Ragade R, Yager R eds. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Amsterdam: North Holland, 1979: 3-18

[2] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[3] Pawlak Z. Rough logic. Bulletin of Polish Academy of Sciences, 1987, 35(5-6): 253-259

[4] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991

[5] Orlowska E. A logic of indicernibility relation//Skowron A ed. Proceedings of the Computation Theory. Lecture Notes in Computer Science 208. Heidelberg: Physica-Verlag, 1985: 177-186

[6] Chakraborty M K, Banerjee M. Rough logic with rough quantifiers. Warsaw University of Technology, Warsaw: ICS Research Report 49/93, 1993

[7] Nakamura A. A rough logic based on incomplete information and its applications. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15(4): 367-378

[8] Nakamura A, Matsueda M. Rough logic on incomplete knowledge systems//Lin T Y ed. Proceedings of the 3rd International Workshop on Rough Sets and Soft Computing (RSSC'94). San Jose, California, USA: San Jose State University, 1994: 56-64

[9] Nakamura A. Graded modalities in rough logic//Polkowski L, Skowron A eds. Rough Sets, Knowledge Discovery 1. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998: 192-208

[10] Hobbs J R. Granularity//Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Los Angeles, USA, 1985: 432-435

[11] Nilsson N J. Problem Solving Methods in Artificial Intelligence. New York: McGraw Hill, 1971

[12] Robinson A. Nonstandard Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1965

[13] Skowron A. Toward intelligent systems: Calculus of information granules//Proceedings of the International Workshop on Rough Set Theory and Granular Computing (RSTGC-2001). Bulleting of International Rough Set Society, Kyoto, Japan, 2001, 5(1/2): 9-30

[14] Polkowski L. Toward rough set foundations: mereological approach//Proceedings of the 4th International Conference. Uppsala, Sweden, 2004: 8-25

[15] Polkowski L. A calculus on granules from rough inclusions in information systems//Proceedings of the International Forum on Theory of GrC from Rough Set Perspective. Nanchang, China, 2006: 22-27

[16] Li Bang-He. Nonstandard Analysis Foundation. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1987(in Chinese)
(李邦河．非标准分析基础．上海：上海科学技术出版社，1987)

[17] Zhao Guo-Qing, Li Shu-Bo, Shan Xing-Yuan. Nonstandard Calculus. Harbin: Heilongjiang Science and Technology Press, 1983(in Chinese)
(赵国清，李书波，单兴缘．非标准微积分．哈尔滨：黑龙江科学技术出版社，1983)

[18] Zadeh L A. Granular computing: Computing with uncertain, imprecise and partially true data//Proceedings of the 3th International Conference on Granular Computing. Silicon Valley, USA, 2007

[19] Miao Duo-Qian, Wang Guo-Yin, Liu Qing, et al. Granular Computing: Past, Present and Future. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese)
(苗夺谦，王国胤，刘清等. 粒计算：过去、现在与展望. 北京：科学出版社，2007)

[20] Liu Qing, Wang Qian-Ying. Rough number and logical values of λ-operator based on Rough sets. Journal of Software, 1996, 7(A00): 455-461(in Chinese)
(刘清，王黔英. Rough数和基于Rough集的λ-算子的逻辑价值. 软件学报，1996，7(A00)：455-461)

[21] Liu Qing, Huang Zhao-Hua. G-logic and its resolution reasoning. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(7): 865-873(in Chinese)
(刘清，黄兆华. G-逻辑及其归结推理. 计算机学报，2004，27(7)：865-873)

[22] Liu Qing, Sun Hui, Wang Hong-Fa. The present studying state of granular computing and studying of granular computing based on the semantics of rough logic. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(4): 543-555(in Chinese)
(刘清，孙辉，王洪发. 粒计算的研究现状和基于Rough逻辑语义的粒计算研究. 计算机学报，2008，31(4)：543-555)

[23] Liu Q, Liu L. A descriptive language based on granular computing: Granular logic//Proceedings of the RSFDGrC2011. LNAI 6743. Moscow, Russia, 2011: 91-94

[24] Liu Q, Jiang F, Deng D Y. Design and implement for the diagnosis software of blood viscosity syndrome based on hemorheology on GrC//Proceedings of the RSFDGrC2003. LNAI 2639. Chongqing, China, 2003: 413-421

[25] Liu Q. Granules and reasoning based on granular computing //Proceedings of the 16th International Conference on Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems, IEA/AIE 2003. Loughborough, UK, 2003: 516-526

[26] Liu Q. Semantic Analysis of Rough Logic, Novel Developments in Granular Computing by Jingtao Yao. New York: New York Press, 2010: 264-284

[27] Liu Qing, Liu Qun. Granules and applications in logical reasoning to granular computing. Journal of Computer Research and Development, 2004, 41(4): 546-551(in Chinese)
(刘清，刘群. 粒及粒计算在逻辑推理中的应用. 计算机研究与发展，2004，41(4)：546-551)

[28] Lee J L. On nonstandard real and granular mathematics//Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Granular Computing. Hangzhou, China, 2012: 275-278

[29] Lin T Y. Uncertainty and knowledge theories: New era in Granular computing//Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Granular Computing. Hangzhou, China, 2012: 8-11

LIU Qing, born in 1938, professor. His research interests include artificial intelligence, data mining, expert system, rough sets, granular computer, logic and its reasoning.

QIU Tao-Rong, born in 1964, Ph. D., professor. His current research interests include rough sets, granular computing and intelligent information processing.

LIU Lan, born in 1973, M. S., experimentalist. Her research interests include information management, software development, algorithmic language and program design.

Background

Granular computing is the research of foundation theory in AI. In the article, we focus on studying fundamental theory of granular computing. It should be the area of AI. Since Zadeh proposed granular mathematics and information granularity, many mathematicians and computer scientists are interested in the research of granular computing. In the world, Pawlak proposed the upper and lower approximate sets in rough set theory. The experts for studying cloud computing are interested in the applications of granular computing in cloud computing field. For example, granular computing can be used in MapReduce studied by Google company in order to deal with big data. But the applications to deal with big data are not popularized to general promotion. Perhaps, the theoretical research of granular computing seems yet not enough at present. In view of granular computing, one is actually based on the nonstandard analysis put forward by Robinson. Hence, we focused on the research of granular computing theory based on nonstandard analysis. We define the operation laws of real granularity by hyperreal theory and get several related properties. The operation rules for compound, coarsening and refining, union and intersection of information granularity with binary relations are also defined. We define further the new indiscernibility relation by hyperreal theory and get several related properties based on current researches. The research results will be important significance for handling variable granularity and granulations in different levels. This is also the innovation in granular computing theory.