

基于模糊规则的插值推理算法综述

李方轶 李 映 杨 静

(西北工业大学计算机学院 西安 710129)

(空地一体化大数据技术及应用国家工程实验室 西安 710129)

(陕西省语音与图像信息处理重点实验室 西安 710129)

摘 要 基于模糊规则的近似推理系统是在模糊集和模糊逻辑理论上建立的,在数学、工程、计算机等科学领域得到了迅速的发展.它作为解决建模和推理中不精确和模糊问题的有效工具,利用模糊 if-then 规则完成推理任务.传统推理机制只能使用稠密的规则库进行推理,其能获得有效结论的前提是保证任何输入的观测值都能与现有的模糊规则相匹配.模糊规则插值(Fuzzy Rule Interpolation, FRI)技术能够有效地利用不完备(或稀疏)的规则库实现推理,为没有规则匹配的观测值通过规则插值估计出其结论.本文系统地综述了基于模糊规则的插值推理技术,着重介绍基于 α -截集和基于中间规则的两大类插值方法,通过代表性算法揭示了这两类方法的基本思想.同时,还简要介绍了模糊插值推理系统的其他方法和规则插值算法的实际应用.此外,本文汇总了11个常用的评价指标,并对典型算法进行了系统的比较和讨论,最后对未来的研究工作进行了展望.

关键词 模糊规则插值;不完备规则库;模糊 α -截集;模糊中间规则;模糊插值推理

中图法分类号 TP301 **DOI号** 10.11897/SR.J.1016.2022.01687

Fuzzy Rule-Based Interpolative Reasoning: A Survey

LI Fang-Yi LI Ying YANG Jing

(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129)

(National Engineering Laboratory for Integrated Aero-Space-Ground-Ocean Big Data Application Technology, Xi'an 710129)

(Shaanxi Provincial Key Laboratory of Speech & Image Information Processing, Xi'an 710129)

Abstract Fuzzy rule-based approximate reasoning system, established with support of the fuzzy set theory and fuzzy logic, has gained rapid developments in a variety of scientific areas, including mathematics, engineering, and computer science. It works by the use of a set of fuzzy if-then rules, as an effective tool to address the issues of imprecision and vagueness in modelling and reasoning. The conventional reasoning mechanism can only perform inference with dense rule bases where any input observation is able to match the existing fuzzy rules. Fuzzy rule interpolation (FRI) facilitates fuzzy rule-based inference system to make reasoning when incomplete (or sparse) rule bases are available, where an estimation is able to be made by computing an interpolated consequent for the observation which matches no rules. This paper systematically reviews the fuzzy interpolative reasoning technique where FRI is involved. In particular, the existing methodologies of FRI are generically categorised into two groups, which are the α -cut based interpolation and the intermediate rule based interpolation, respectively. The main body of this survey reviews each of the two groups of method, where individual representative approaches are described in

detail to demonstrate the basic idea of their implementations of FRI. Also, other alternative FRI methods and practical applications of fuzzy interpolative reasoning systems are briefly outlined. In addition, the most commonly used evaluation criteria over FRI algorithms are collected and presented, supported by the comparison and discussion among the typical methods. This paper finally points out potential work of future study in this area.

Keywords fuzzy rule interpolation; incomplete rule base; α -cut fuzzy set; fuzzy intermediate rule; fuzzy interpolative reasoning

1 引 言

模糊集合理论^[1]及模糊逻辑已成功地应用于许多实际问题^[2-4]. 以它们为基础的模糊专家系统由于能够出色地处理实际问题中存在的精确性、部分真值和近似值而广受重视. 许多模糊专家系统是基于近似推理(也称为语义推理(linguistic reasoning))发展起来的.

近似推理系统通常可以被形式化为一个基于模糊 if-then 规则的推理机制, 它由语义变量、模糊规则和模糊推理方法组成. 语义变量就是利用某些具有潜在数学语义的模糊量来解释语言表达. 模糊推理规则是将给定的系统输入和输出变量关联起来, 从而确定它们之间关系的一组规则. 模糊推理规则可以从数据中学习得到, 也可以直接从领域专家那里获取, 或者两者兼而有之. 模糊近似推理方法将这些模糊推理规则应用于新的输入数据, 从而推导出相应的结论. 因此, 模糊规则库是任何近似推理模型的基本组成部分, 它不仅存储了推理所需的知识, 其性质也决定了使用何种推理技术实现模糊近似推理.

近似推理系统的另一个主要组成部分是模糊推理机制. 现有文献中存在多种多样的模糊推理机制, 其中多数是通过合成推理规则(Compositional Rule of Inference, CRI)^[5]来实现一般化的假言推理(modus ponens). 合成推理规则自提出后得到了广泛而成功的应用. 例如, 著名的 Mamdani 模糊逻辑控制器^[6]就是基于 CRI 实现的. 然而, CRI 只能在规则库是稠密(dense)或者完备的情况下(即可用的规则覆盖整个问题论域)得出合理和准确的结果. 换言之, 任何未知的观测值都必须与规则库中的至少一条模糊规则匹配才能使传统的基于 CRI 的推理机制生成有效的结论.

然而, 在实际应用中可能无法获得稠密的规则库, 其原因有许多^[7-8], 其中最常见的是: (1) 用于构造规则库的知识不完备, 包括来自人类的专业知识

以及机器学习技术学习得到的知识; (2) 为降低生成的模糊系统的复杂度, 减少规则库中的规则数, 而导致规则库是稀疏(sparse)或不完备的.

当只有稀疏知识可用时, 模糊规则插值(Fuzzy Rule Interpolation, FRI)技术^[9-10]应运而生, 它解决了模糊规则推理系统中的近似推理问题, 从而解除了 CRI 在应用过程中需要一个稠密模糊规则库的关键限制, 这为基于模糊规则的推理系统提供了一种新的解决方案, 即推断近似的插值结果, 实现模糊插值推理.

模糊规则插值在基于模糊规则的系统发展中有两个重要贡献: 一是它实现了基于稀疏规则库^[11]的模糊推理; 二是它可以用来简化模糊规则库的复杂性^[12-13], 例如, 用插值得到的一条规则迭代地替换两条(或者多条)已知的用于插值的规则, 从而从相邻规则中消除那些可以近似的模糊规则^[12]. 文献中大多数模糊规则插值方法都围绕第一点, 本文因此将详细综述规则插值推理算法.

作为一种推理机制, 当输入的某一观测值未能匹配到稀疏模糊规则库中的任何一条规则时, 模糊规则插值从选择与该观测值的最邻近的模糊规则开始实现插值推理. 这些选择出的规则构成了进行模糊插值的基础, 它们将作为实现规则插值推理算法的待插值规则. 在文献中, 继 Kóczy 和 Hirota(1993)的开创性模糊规则插值工作^[9-10]之后, 各种各样的模糊插值推理方法相继出现. 现有的方法通常可以分为两类: (1) 基于 α -截集的插值方法, 以及 (2) 基于中间规则的插值方法. 这种分类取决于插值结果的计算是否通过构造和变换中间规则的过程来完成. 因此它们也分别被称为基于非变换和基于变换的模糊规则插值技术^[14]. 模糊插值推理的开创性方法, 如 KH 线性规则插值^[9-10]及其衍生算法是最典型的基于非变换的方法. 此类方法直接利用待插值的规则获得插值推理结论, 其中大部分遵循“相似前件属性将导出相似结论”的基本思想, 利用模糊 α -截集推导结论. 对于那些依赖于变换中间规则的第二大

类算法,其中典型的一类基于尺度和位移变换的模糊规则插值方法族(称为 T-FRI 方法)已经得到了广泛的研究和应用^[15-19]. 这些方法没有直接对待插值的规则进行推导操作,而是通常采取两步走的策略实现插值推理:首先利用待插值的规则,将其聚合起来构造一条“中间规则”,然后基于相似类比的原理,对比如何将中间规则的前件变换为输入观测值的过程,利用计算获得的变换参数,将中间规则的后件变换成所求结论.

虽然绝大多数模糊规则插值方法可以依照上述分类方法划分其类别,但还有一些算法难以精确的划分到上述两大类中. 这些算法可以细分为五类: (1) 基于模糊环境(vague environment)逼近的插值及其在自动导引车系统中的应用,包括文献 Kovács 和 Kóczy (1997)^[20]、Kovacs 和 Koczy (1997)^[21]、Kovács 和 Kóczy (1997)^[22]; (2) 基于梯度的插值方法(Bouchon-Meunier 等人(1999, 2001, 2000)^[23-25]); (3) 模糊插值的公理化方法(Jenei (2001)^[26], Jenei 等人(2002)^[27]); (4) 将模糊集映射到高维笛卡尔空间中的点从而进行插值,此类方法详见文献 Yam 等人(2000b)^[28]、Yam 和 Kóczy (2000, 1998, 2001)^[29-31]、Yam 等人(2000a)^[32]; (5) 规则簇插值用于在稀疏规则库环境中生成自适应神经模糊推理系统(Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System, ANFIS)^[33]. 这些多种多样的方法显示了模糊规则插值方法研究领域的复杂性和多样性.

本文第 2 节首先叙述贯穿本文的基于模糊规则推理的相关概念和符号;第 3 节综述基于 α -截集的模糊插值方法;第 4 节详细介绍基于中间规则的模糊插值方法;第 5 节介绍模糊规则插值算法的评估准则并对代表性的方法进行分析,概述列举算法的实际应用;最后第 6 节总结本文并展望模糊插值推理技术的发展前景.

2 模糊规则推理的相关概念

模糊规则插值技术的关键组成部分是一组由 if-then 形式表示的规则,每一条规则都采用模糊或精确的术语来表示输入变量,并将它们与作为某个问题描述的输出变量相关联. 一般来说,一条规则可能包含多个输入属性和多个输出变量,但一条多输出规则总是可以由多条单一输出规则等价地表示. 为了讨论的方便并不失一般性,本文只考虑具有单一输出变量的规则.

一个典型的模糊规则模型本质上包含两个关键

要素: $\langle R, Y \rangle$. 其中 Y 表示非空的有限属性集 $Y = A \cup \{z\}$,它包含的 $A = \{a_j | j = 1, 2, \dots, m\}$ 表示输入的规则前件属性集,以及 z 代表规则的结论(或者后件)属性. 另一个重要元素 R 表示一个非空的有限模糊规则集 $R = \{r^1, r^2, \dots, r^N\}$. 在许多传统的基于模糊规则的系统(包括使用模糊规则插值技术实现的系统)中,给定的规则 $r^i \in R$ 和观测值 o^* 通常表示为

r^i : if a_1 is A_1^i and a_2 is A_2^i and $\dots$ and a_m is A_m^i ,
then z is B^i

o^* : a_1 is A_1^* and a_2 is A_2^* and $\dots$ and a_m is A_m^* (1)

其中, A_j^i 和 A_j^* 分别表示 r^i 和 o^* 中的前件属性 A_j 所取的模糊集值, B^i 表示 r^i 的后件属性 z 的模糊集值.

规则的前件和后件的模糊取值通常用模糊集表示. 模糊集的概念是由 Zadeh^[1] 引入的. 论域 X 中的模糊集 A 由模糊隶属函数 A 表示,它将每个元素 $x \in X$ 与一个实数 $A(x) \in [0, 1]$ 相关联. 这一实数可以被理解为元素 x 属于模糊集 A 的隶属度^[34].

实际应用中通常使用的模糊隶属函数主要有两类: (1) 多边形(分段线性)模糊集. 包括三角形、梯形、六边形的隶属函数等; (2) 非线性模糊集. 通常包括高斯型、广义钟形和 Sigmoid 隶属函数. 多边形模糊集通常由其特征点在实数集上的分布从小到大按升序表示,而非线性模糊集则由用于指定每个非线性函数的参数表示. 不同模糊隶属函数的选择取决于给定应用问题的特定要求. 但是三角形和梯形隶属函数由于其简单的表示和计算效率高而被广泛使用,尤其用于实时的应用场景.

在模糊规则插值方法的研究过程中,不同的模糊隶属函数被用来实现不同的方法. 由于模糊规则插值过程依赖于具体的模糊隶属函数,因此很难有一个通用的形式来统一所有的模糊规则插值模型. 尽管如此,为了叙述的一致性和理解的简单性,并且由于其广泛应用在大多数文献中,下文中的所有模糊规则插值方法都使用三角形隶属函数来描述说明. 如图 1 所示,一个正规的凸的三角形模糊集 A 由它的三个特征点按升序表示,即 (a_1, a_2, a_3) , 其中第一个和第三个特征点代表该模糊集的支撑集的两

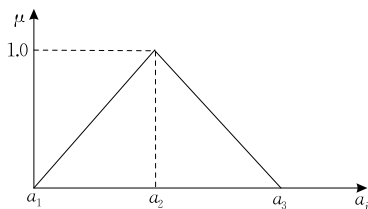


图 1 正规凸三角形模糊隶属函数

个极值点,其隶属度为 0,中间的特征点代表隶属度为 1 的点.对于由式(1)表示的规则组成的模糊规则库,三角形模糊集表示的规则前件 A_j^i ,观测目标值 A_j^* ,规则后件 B^i 以及需要由模糊规则插值方法计算得出的结论 B^* 的模糊值,分别由它们相应的特征点表示为

$(a_{j1}^i, a_{j2}^i, a_{j3}^i), (a_{j1}^*, a_{j2}^*, a_{j3}^*), (b_1^i, b_2^i, b_3^i), (b_1^*, b_2^*, b_3^*),$

其中 $i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, m.$

3 基于 α -截集(非变换)的模糊插值推理方法

在介绍了基于模糊规则的推理的相关概念之后,本节首先概述基于 α -截集的模糊插值方法的基

本原理,然后详细介绍此类方法中的一些典型代表算法,包括经典的 KH 线性插值方法及其衍生算法.

3.1 概述

基于 α -截集的模糊规则插值方法,也称为基于非变换的方法.此类方法在计算与某一未匹配到任何规则的观测值对应的插值推理结论时,直接利用选定相邻的至少两条模糊规则,计算插值结果的每个 α -截集.在模糊插值推理研究的早期阶段,已有大量的研究报道了这类方法.特别是第一个被提出的模糊规则插值方法,以其发明者的名字命名为 KH 方法^[9-10],是最典型的基于 α -截集的算法.表 1 汇总了文献中属于该类的各种算法.此外,由于 KH 插值方法被广泛深入的研究,表 2 列出了 KH 方法家族的相关衍生算法.

表 1 基于 α -截集(非变换)的模糊规则插值方法

算法	特征
Huang 等人(2004) ^[35] ; Kóczy 和 Hirota(1993a,b) ^[9-10] ; Ughetto 等人(2000) ^[36]	仅含两条模糊规则的插值算法
Chang 等人(2008) ^[37] ; Chen 和 Chen(2016) ^[38] ; Chen 等人(2013a,2015) ^[39-40] ; Chen 和 Lee(2011) ^[41] ; Cheng 等人(2015,2016) ^[42-43] ; Kovács(2006) ^[44] ; Yang 和 Shen(2013) ^[45]	多条模糊规则的插值算法
Chang 等人(2008) ^[37] ; 卢正鼎、王天江、符海东等人(2004) ^[46-47]	基于几何相似推理的模糊规则插值算法
Hsiao 等人(1998) ^[48] ; 王天江和卢正鼎(2004) ^[49] ; 赵洪文(2010) ^[50]	基于多边形模糊集斜率的插值算法
Chen 和 Chen(2016) ^[38] ; Chen 等人(2013a) ^[39] ; Cheng 等人(2015) ^[42]	加权的模糊规则插值算法
Chen 和 Lee(2011) ^[41] ; Chen 和 Barman(2019b) ^[51] ; Chen 和 Adam(2018) ^[52] ; Bai 和 Wang(2017) ^[53]	基于区间值 II-型模糊集(interval type-2 fuzzy sets) ^[56] 的模糊规则插值算法
Chen 等人(2015) ^[40] ; Chen 等人(2019a) ^[54]	基于粗糙-模糊集(rough-fuzzy sets)的模糊规则插值算法
Chen 和 Adam(2017) ^[55] ; Cheng 等人(2016) ^[43] ; Chen 等人(2019a) ^[54] ; Chen 和 Barman(2019b) ^[51] ; Chen 和 Adam(2018) ^[52]	具有自适应性的模糊规则插值算法

表 2 KH 线性规则插值算法族

算法	特征
Kóczy 和 Hirota(1997) ^[12] ; Kóczy 等人(2000) ^[57] ; Kóczy 等人(2000) ^[58] ; Kóczy 和 Hirota(1993a,b,c,1991) ^[9-10,59-60]	KH 线性规则插值算法的基本原理
Vass 等人(1992) ^[61]	扩展的 KH 算法用于减少无效结论
Baranyi 等人(1999) ^[7] ; Tikk(1999) ^[62] ; Tikk 和 Baranyi(2000) ^[8] ; Yam 等人(1999) ^[63]	基于坐标修正的 α -截集方法
Tikk 等人(1997,1999,2002) ^[64-66]	稳健的 KH 规则插值算法
Wong 等人(2000,2005) ^[67-68]	多维输入的 KH 改进算法
钱皓等人(2009) ^[69]	基于高斯型隶属函数的 KH 扩展算法

基于 α -截集的模糊规则插值本质上是经典线性插值的模糊扩展,其中用于插值的“给定点”是相关的模糊规则.插值的结果是通过在每个 α -截集上计算和聚合线性插值生成的.在理论方面,给定任意形状的正规凸的模糊集,一个近似的插值结论应该考虑无限个 α -截集.然而在实践中,为了达到可接受的计算要求,大多数基于 α -截集的方法只考虑有限个数的 α -截集(通常是 2、3 或 4 个),最终的结论由分段线性连接以得到近似值.下面将介绍一些典型的基于 α -截集的模糊规则插值方法.

3.2 KH 线性规则插值

本节首先阐述了最著名的基于 α -截集的模糊规则插值方法,即 KH 线性规则插值^[9-10],然后介绍该方法在多维情况下使用三角形隶属函数的具体实现.

3.2.1 基本方法

KH 规则插值通过利用 α -截集之间的距离为实现模糊插值推理进行了初步的尝试.当给定的观测值与稀疏规则库中任何规则都不匹配时,通过对距离观测值最近的,事先选定的一些(通常是两个),相邻规则的结果执行线性聚合来构造插值结果.聚合

操作符合基于相似性的类比推理的一般原则如下:

规则的前件 A^i (是单个属性值 A_a^i 的逻辑聚合) 越接近观察值 o^* , 规则的后件 B^i 越接近对应于 o^* 的结论 B^* .

其中所采用的相似性度量是通过使用规则前件和观测值之间定义的模糊距离来指定的. 也就是说, A^i 和 o^* 之间的距离越小, 它们就越相似, 相应的 B^i 被视为潜在地对所寻求的结果作出更多贡献.

假设规则库 R 中有两条规则 r^i 和 r^j , 其形式由式(1)定义. 给定一个观测值 o^* (同样如式(1)), 前文所述的线性规则插值的基本做法如下: 通过类比观测值前件 A^* 与待插值规则 r^i 和 r^j 前件 (A^i 和 A^j) 之间的距离关系, 来构造所求结论 B^* 与规则后件 (B^i 和 B^j) 之间的距离比例:

$$\frac{\tilde{d}(A^*, A^i)}{\tilde{d}(A^*, A^j)} = \frac{\tilde{d}(B^*, B^i)}{\tilde{d}(B^*, B^j)} \quad (2)$$

其中

$$\tilde{d}(A^*, A^i) = \sqrt{\tilde{d}_{i1}^2 + \tilde{d}_{i2}^2 + \dots + \tilde{d}_{im}^2}, \quad \tilde{d}_{it} = \tilde{d}(A_{it}^*, A_{it}^i), \quad t=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$\tilde{d}$ 表示两个隶属函数之间的模糊距离.

根据分解原理 (Resolution Principle)^[9], 两个模糊集之间的模糊距离定义为它们的 α -截集之间的一对下模糊及上模糊距离 (lower and upper fuzzy distance). 对于 $[0, 1]$ 区间中的某一 α , 下模糊距离 $\tilde{d}_L(A, B)$ 和上模糊距离 $\tilde{d}_U(A, B)$ 定义为

$$\tilde{d}_L(A, B) = D(\inf(A_\alpha), \inf(B_\alpha)), \quad \tilde{d}_U(A, B) = D(\sup(A_\alpha), \sup(B_\alpha)) \quad (4)$$

其中, D 表示 Minkowski 距离, $\inf(\cdot)$ 和 $\sup(\cdot)$ 分别是相应的 α 截集的下确界和上确界. 因此, 线性规则插值公式 (即式(2)) 可以重新表示为

$$\frac{\tilde{d}_L(A_\alpha^*, A_\alpha^i)}{\tilde{d}_L(A_\alpha^*, A_\alpha^j)} = \frac{\tilde{d}_L(B_\alpha^*, B_\alpha^i)}{\tilde{d}_L(B_\alpha^*, B_\alpha^j)}, \quad \frac{\tilde{d}_U(A_\alpha^*, A_\alpha^i)}{\tilde{d}_U(A_\alpha^*, A_\alpha^j)} = \frac{\tilde{d}_U(B_\alpha^*, B_\alpha^i)}{\tilde{d}_U(B_\alpha^*, B_\alpha^j)} \quad (5)$$

这使得 $\min\{B_\alpha^*\}$ 和 $\max\{B_\alpha^*\}$ 可以通过对两条用于插值的规则进行加权平均获得, 加权的对象是相应模糊集的 α -截集的临界值. 因此可得:

$$\min\{B_\alpha^*\} = \frac{w_{aL}^i \min\{B_\alpha^i\} + w_{aL}^j \min\{B_\alpha^j\}}{w_{aL}^i + w_{aL}^j}, \quad \max\{B_\alpha^*\} = \frac{w_{aU}^i \max\{B_\alpha^i\} + w_{aU}^j \max\{B_\alpha^j\}}{w_{aU}^i + w_{aU}^j} \quad (6)$$

其中权值由相应的下模糊和上模糊距离定义:

$$w_{aL}^i = \frac{1}{\tilde{d}_L(A_\alpha^*, A_\alpha^i)}, \quad w_{aL}^j = \frac{1}{\tilde{d}_L(A_\alpha^*, A_\alpha^j)}, \quad w_{aU}^i = \frac{1}{\tilde{d}_U(A_\alpha^*, A_\alpha^i)}, \quad w_{aU}^j = \frac{1}{\tilde{d}_U(A_\alpha^*, A_\alpha^j)} \quad (7)$$

结论的 α -截集由此可得:

$$B_\alpha^* = [\min\{B_\alpha^*\}, \max\{B_\alpha^*\}] \quad (8)$$

因此, 最终的插值结论可以通过分解原理获得:

$$B^* = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} B_\alpha^* \quad (9)$$

在实际应用中, 为确定插值结果, 选择具体 α 截集的数值及个数与算法所采用的模糊隶属函数有着密切的关系. 根据前文中提到的, 具有三角形或梯形的多边形模糊集由于其分段线性的特性及较低的计算复杂度被广泛使用. 因此在 KH 插值方法中, 通常根据多边形的特征点选择对应的 α 值, 比如对于三角形隶属函数的 3 个顶点, α 取值为 0 和 1.

3.2.2 多维输入的多规则 KH 方法

对于简单的线性问题, 基本的 KH 线性规则插值方法的一个显著优势在于它能够高效地为某一无法匹配任何规则的输入计算获得一个推理结果. 随后, 它被拓展用于处理更复杂情况下的稀疏规则插值, 例如涉及处理具有多条规则, 且每条规则具有多个前件变量的问题^[66, 68]. 由于 KH 插值假定的分段线性性质, 给定三角隶属函数, 插值结果 $B^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ 可以用其两个 α -截集 (当 α 为 0 或 1 时) 来确定, 从而使得结论的三个特征点计算如下:

$$b_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n w_t^i \times b_t^i}{\sum_{i=1}^n w_t^i} \quad (10)$$

其中相应的权值为

$$w_t^i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (a_{jt}^i - a_{jt}^*)^2}} \quad (11)$$

n 是用于插值的相邻于观测的规则数, m 是规则中的前件属性数, $t=1, 2, 3$. 对插值得到的模糊集 B^* 的这种计算正好反映了式(6)所表示的一般情况, 即: 当 $\alpha=0$ 时,

$$\min\{B_0^*\} = b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n w_1^i \times b_1^i}{\sum_{i=1}^n w_1^i}, \quad \max\{B_0^*\} = b_3^* = \frac{\sum_{i=1}^n w_3^i \times b_3^i}{\sum_{i=1}^n w_3^i} \quad (12)$$

当 $\alpha=1$ 时,

$$\min\{B_1^*\} = \max\{B_1^*\} = b_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_2^i \times b_2^i}{\sum_{i=1}^n \omega_2^i} \quad (13)$$

3.3 KH 方法的重要改进

KH 方法的显著缺点是,通过它获得的模糊集的隶属函数并不总是一个正规的模糊集,有时甚至不是有效的模糊集.对 KH 方法中存在的“非正规模糊集问题”的研究促进了许多技术的发展.下面简要列举几类具有代表性的 KH 改进算法.

3.3.1 基于修正 α -截集距离的插值算法

以下两种方法对 KH 线性规则插值算法的改进是通过修正 α -截集距离实现的,具体而言是利用模糊隶属函数的宽度来刻画 α -截集之间的距离.

(1) VKK 方法

VKK 方法^[61]的主要思想是修改了 KH 方法中对模糊集之间距离度量的定义.它通过其中心点之间的距离 $d_C(\cdot, \cdot)$ 和宽度 w 描述每个 α -截集,其定义如图 2 所示,其中上方表示 KH 方法中的下模糊和上模糊距离.模糊集之间的距离由一个向量表示,该向量包含一组基于中心点的 Euclidean 距离.该方法同样适用于具有多个前件属性的规则插值,通过 Minkowski 距离聚合不同前件属性上的距离,并通过计算算术平均值得到相应的 α -截集的宽度.但是,这种方法不考虑 α -截集宽度为 0 的情况,因此不适用于观测值表示为单点模糊集 (singleton fuzzy set) 的情形.

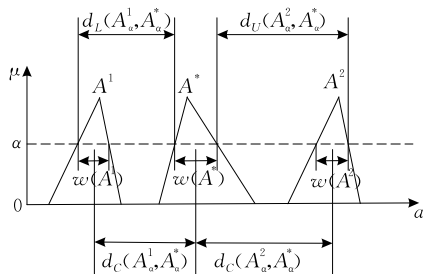


图 2 模糊 α -截集间的距离定义

(2) 利用隶属函数宽度的方法

近些年李霞等人提出一种模糊插值推理方法^[70],同样利用了隶属函数宽度的概念,用于解决 KH 方法不能保证推理结论正规性和凸性的问题.与其他 KH 改进算法在最后验证结论的正规性和凸性不同的是,该方法的基本思想是先假定推理结果是符合正规性和凸性的,然后求推理结果的核和宽度,这样就能保证其正规和凸的特性.该方法也被推广到多

维情况下,能很好地解决多维稀疏模糊规则库的推理问题.

3.3.2 MACI 方法

MACI (Modified α -Cut based Interpolation) 方法^[8]有效地解决了“非正规模糊集问题”,同时保持了 KH 方法的计算效率高的优点.该方法利用模糊集的向量表示与坐标变换的概念,其主要思想是它将输入输出空间的模糊集合进行坐标变换,将表示规则属性的模糊集在特定的坐标系中进行表示,而这种特定的坐标系不包含“非正规”的模糊集.然后在变换的坐标空间中对所得结论进行线性插值计算,最后将所得结论再转换回原坐标空间中.

MACI 方法利用特征点构成的向量定义每个模糊集,其实现过程可以简化为以下三步:

(1) 为输出变量空间选择适当的坐标系;

(2) 执行 KH 规则插值方法对变换后的模糊集进行推理;

(3) 将结论进行坐标逆变换为原始坐标空间中的模糊集合表示.

该方法能够应用于任意形状的模糊集.对于分段线性模糊隶属函数,MACI 利用模糊集的特征点向量描述该模糊集;对于非线性模糊隶属函数,其平滑函数预定义的 α -截集的端点被用来构造模糊集的代表向量.同 KH 方法一样,这种方法也不保持线性特性,但通过分段线性特性获得的结论优于原方法.由于其计算效率高且消除了“非正规模糊集问题”,MACI 方法还被进一步拓展至多维输入变量的规则插值过程中^[68].当规则前件和输入观测值如式(1)中所示,均有 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 个属性时,MACI 算法的多维扩展的基本原理与 3.2.2 节中 KH 算法在多维输入中的实现类似,即如式(11),利用欧氏距离将原始算法中在输入空间的计算过程进行聚合.然而该算法仅仅将输入变量扩展至多维情况,用于插值的规则仍为 2 条.

除了上述几类典型的 KH 改进算法以外,在国内的模糊插值推理研究中,钱皓等人^[69]把 KH 方法应用于高斯型隶属函数,利用模糊集顶点及拐点的距离比得到推理结果,并保证结论也是高斯型模糊集,从而进一步加强了 KH 线性规则插值方法的研究与推广应用.

3.4 基于多边形模糊集斜率的插值算法

基于多边形的模糊集是模糊规则插值方法最常使用的模糊集合,尤其是以三角形、梯形为代表,其显著的优点就是算法简单,易于实现且运算效率高.这类模糊隶属函数的关键参数即多边形的顶点,底

点和两腰斜率,故这些算法被命名为基于多边形模糊集斜率的插值算法,参看文献[48-50]等。由于多边形的顶点大多由模糊隶属函数的 α -截集来确定,比如三角形的两个底点和顶点分别是 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 的截集,因此这些算法均属于基于 α -截集的模糊插值推理方法。

在这类算法中,王天江等人^[49]提出一种线性插值推理方法,其基本思想是只要求规则后件及推理结果的 $\alpha=1$ 截集满足线性比例关系,而推理结果的左右边斜率分别为两规则前件相应斜率的平均值。该方法可适用于规则前件为多个变量的规则插值,并且保证了推理结果的凸性和正规性,然而它只适用于梯形隶属函数。相似的方法还有 HCL 插值法^[48]。赵洪文^[50]提出的“点-斜”模糊插值推理方法是 HCL 方法的推广,具有易理解、易操作的优点,但也仅限于梯形模糊集的情况。下面以 HCL 方法为例简述基于多边形模糊集斜率插值算法的原理。

HCL 插值法^[48]是一种基于 KH 线性规则插值算法的插值推理方法。二者的区别在于,HCL 方法对模糊集隶属函数的最高点的插值方法与 KH 基于 α -截集的处理过程不同,从而改进 KH 方法可能产生非正规的模糊集的问题。该算法可以保证如果模糊规则(例如: $A^1 \Rightarrow B^1$ 和 $A^2 \Rightarrow B^2$)以及观测值(A^*)是由三角隶属函数定义的,则插值结论也是三角形的。然而,这种方法是专门为三角形情况而设计的,因此无法推广到更一般的模糊集(如梯形)。

HCL 插值法计算三角形隶属函数的底边的方法与 KH 方法相同,但计算顶点的方法不同。下面将详细说明。图 3 描述了模糊规则插值问题的一种简单的典型代表,其中 $k_1, t_1, k, t, k_2, t_2, h_1, m_1, h, m, h_2, m_2$ 分别表示相应模糊集的斜率。确定 B^* 顶点的过程如下:

(1) 确定三角形隶属函数 B^* 的斜率 h 和 m 。令
$$k=k_1x+k_2y, \quad t=t_1x+t_2y \quad (14)$$
其中 x 和 y 是实数。

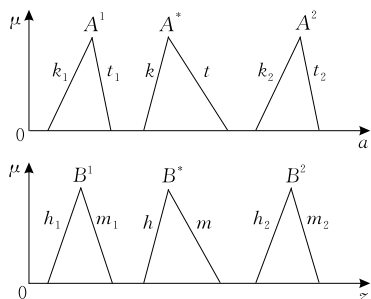


图 3 HCL 模糊规则插值

当 $k_1/t_1 \neq k_2/t_2$ 时,则通过同时求解(14)中的两式来计算唯一的 x 和 y 。令

$$h = |h_1x + h_2y|c, \quad m = -|m_1x + m_2y|c \quad (15)$$

当 $k_1/t_1 = k_2/t_2$ 时,则令

$$h = kc, \quad m = tc \quad (16)$$

其中 c 为常数。

(2) 通过求解下式确定顶点 b_2^* 的位置:

$$\frac{1}{b_2^* - \inf(B^*)} : \frac{-1}{\sup(B^*) - b_2^*} = h : m \quad (17)$$

即可得

$$b_2^* = \frac{m \cdot \sup(B^*) - h \cdot \inf(B^*)}{m - h} \quad (18)$$

其中 $\inf(\cdot)$ 和 $\sup(\cdot)$ 分别表示模糊集的上确界和下确界。

$S_K(B^*) =$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m S_K(A_j^*) \right) \times \left[\sum_{\substack{i=1, \\ \exists j: S_K(A_j^*) > 0}}^n w_i \times \frac{S_K(B^i)}{\sum_{j=1}^m S_K(A_j^*)} \right], \\ & \qquad \qquad \qquad \exists ij: S_K(A_j^i) > 0 \\ & \frac{\sum_{j=1}^m S_K(A_j^*)}{m}, \\ & \qquad \qquad \qquad \forall ij: S_K(A_j^i) = 0 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

3.5 基于几何相似推理的模糊规则插值方法

基于几何相似推理的模糊规则插值方法是基于 α -截集的方法中的具有代表性的一大子类。参看文献[37,46-47]。这些方法利用模糊集面积之间的相似比例进行推理。早期,卢正鼎、王天江、符海东等人^[46-47]通过考虑观测值与规则前件之间的几何相似性在结论与规则后件之间也应该存在,从而以输入观测所围成的面积与规则前件所围成的面积的比例,它们的重心的水平距离的比例,以及角度相似特征为插值依据。但他们仅讨论了梯形模糊集的情况。

同样利用模糊集面积进行推理的 CCL 规则插值^[37]为模糊插值推理提供了另一种有效的方法,它利用了规则中属性以及未匹配到任何规则的观测值的模糊集的面积的概念。其思想是保持模糊度的比(Ratio of Fuzziness, RF)的逻辑一致性。RF 由相关模糊集的面积决定。也就是说,它追求对应于观测值的(待)插值结果与观测的 RF 和用于插值的每条规则的结果与前件之间的 RF 的一致性。更具体地说,两个模糊值 A 和 B 之间的 RF 定义为

$$RF(A, B) = \frac{S(A)}{S(B)} \quad (20)$$

其中, $S(A), S(B)$ 分别表示 A 和 B 的模糊集的面积。

CCL 模糊规则插值方法提出了一种灵活的插值推理框架,它允许使用不同类型的隶属函数,包括各种多边形和高斯形状的函数.它还可以处理涉及多条模糊规则且含有多个前件变量的一般情况.为了简化描述的复杂性和保持一致性,下面仅介绍使用三角形模糊隶属函数的核心计算过程.

首先,待插值的后件模糊集 B^* 的隶属度取 1 的点 b_2^* 通过线性插值计算得:

$$b_2^* = \sum_{i=1}^n W_i b_2^i \tag{21}$$

其中 n 是用于插值的规则个数, W_i 是每条规则的权重,其值为

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^m w_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}},$$
$$w_{ij} = 1 - \left| \frac{a_{j2}^i - a_{j2}^*}{\max_{a_{j2}} - \min_{a_{j2}}} \right| \tag{22}$$

其中 $\max_{a_{j2}}$ 和 $\min_{a_{j2}}$ 用于归一化,分别代表 $\{a_{j2}^i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 内的最大值和最小值.

给定由两个 α -截集产生的三个特征点(当 $\alpha = 0, 1$ 时),三角形模糊集可以被分成两个较小的子三角形,如图 4 所示.对于具有许多特征点的更复杂的多边形模糊集,可以生成更多三角形甚至梯形的子多边形,但是计算的原理同下述对于三角形隶属函数的情况.由此模糊集 B^* 的左三角区域面积 $S_L(B^*)$ (即 b_2^* 点左侧的三角形模糊集的几何区域面积)和右三角区域面积 $S_R(B^*)$ 可由式(19)计算得出,其中 S_K 的下标中 $K \in \{L, R\}$. 该方程准确地揭示了 CCL 规则插值的基本思想,即从观测角度出发,通过对所

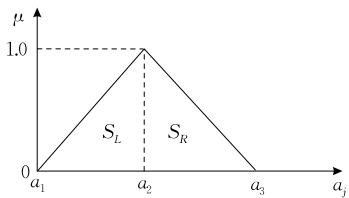


图 4 三角形模糊集的左侧和右侧面积

包含规则的 RF 的加权聚集,从而导出插值模糊集的面积.

最后,插值结果 B^* 的支撑集的左、右端点可由生成的三角形区域的面积导出,如下所示:

$$b_1^* = b_2^* - 2S_L(B^*), \quad b_3^* = b_2^* + 2S_R(B^*) \tag{23}$$

4 基于中间规则(变换)的模糊插值推理方法

继上一节对模糊规则插值第一大类的分析之后,本节详细综述第 2 类基于中间规则(变换)的模糊插值方法.首先概述其基本思想并对此类方法按特征进行细分,然后介绍了一些典型代表,包括一类最具代表性的算法族,即基于尺度和位移变换的规则插值方法及其衍生算法.

4.1 概述

作为另一大类的模糊规则插值方法,基于变换的方法近年来得到了更多的关注与研究.由于此类方法在计算插值结论模糊集的过程中,通常首先需要计算一条中间规则(intermediate rule),因此又被称为基于中间规则的模糊规则插值方法.此类方法一般分为两步执行(具体算法中可进行细分).第一步利用选择出的用于插值操作的规则构造一条中间规则,使得它的前件尽可能与观测值“接近”.第二步基于类比推理机制^[71-72],即根据中间规则的前件项与观测之间的相似性来转换中间规则的后件,以类似将中间规则的前件转换为给定的观测的方式,从而得出结论.表 3 汇总了该类各种算法,并根据其不同的特征进行分类.其中的一大子类,即基于尺度和位移变换的方法(scale and move Transformation based FRI, T-FRI),是近些年最流行的方法之一,首先由 Huang 和 Shen 提出^[15-16],并且在过去的二十年里,又对这一开创性的方法提出了许多后续发展和修改.代表的方法见表 4.本节将综述表 3 中一些典型算法.

表 3 基于中间规则(变换)的模糊规则插值方法

算法	特征
Wu 等人(1996) ^[73]	利用相似变换保证插值的有效性
Baranyi 等人(1995,1996a) ^[74-75] ; Baranyi 和 Kóczy(1996a) ^[76] ; Baranyi 等人(2004,1996b,1998) ^[77-79] ; Baranyi 和 Kóczy(1996b) ^[80]	采用广义函数概念进行内插和外插(extrapolation)
Kawaguchi 和 Miyakoshi(2000a,b,2001) ^[81-83] ; Kawaguchi 等人(1997) ^[84]	基于 B 样条的插值
Chen 等人(2016) ^[85] ; Chen 和 Shen(2017) ^[86] ; Huang 和 Shen(2006,2008) ^[15-16] ; Jin 等人(2014,2020) ^[17,87] ; Li 等人(2019a,2018b) ^[88-89] ; Naik 等人(2017b) ^[19] ; Shen 和 Yang(2011) ^[90] ; Yang 等人(2017) ^[18] ; Yang 和 Shen(2011) ^[91]	基于尺度和位移变换的规则插值(T-FRI)
Das 等人(2019) ^[92]	基于几何的线性模糊规则插值

表 4 基于尺度和位移变换的规则插值算法族

算法	特征
Huang 和 Shen(2006) ^[15]	T-FRI 的基本方法,用于处理两条给定的相邻规则,可以采用多种模糊隶属度函数(如复杂多边形、高斯或钟形),并且处理包含多个前件变量的问题
Huang 和 Shen(2008) ^[16]	扩展的 T-FRI: 同时支持包含多条模糊规则的内插和外插,每条规则包含多个前件项
Jin 等人(2014,2019) ^[17,93]	反向 T-FRI: 允许从已知的前件和后件中插值与后件直接相关的缺失前件值,支持包含多个前件模糊规则的反向内插与外插
Yang 等人(2017); Yang 和 Shen(2011) ^[18,91]	自适应 T-FRI: 能够在插值过程中出现矛盾结果时恢复系统一致性
Chen 等人(2016) ^[85]	粗糙模糊 T-FRI: 允许表示、处理和利用不同程度的知识不确定性
Chen 和 Shen(2017) ^[86]	基于区间值 II-型模糊集的 T-FRI
Naik 等人(2017b) ^[19]	动态 T-FRI: 有助于选择、组合和概括信息丰富的中间规则,以便在执行插值时完善当前的规则库
Li 等人(2017,2018b,a,2020) ^[88-89,94-95]	属性加权 T-FRI: 对规则的前件属性进行加权,并应用于分类和预测任务
Chen 等人(2019) ^[96]	基于 Takagi Sugeno Kang(TSK)模糊规则模型的 T-FRI
Li 等人(2005) ^[97]	类 T-FRI 的加权算法

在详细介绍基于中间规则的模糊规则插值技术之前,需要引入一个非常重要的概念. 这就是模糊集的代表值(Representative Value, Rep). 代表值在不同的文献中有许多变体,它也被赋予不同的名称,例如文献[16]中的代表值,文献[77]中的参考点(reference point),以及文献[98-99]中的特征值(characteristic value).

模糊集的代表值是一个精确的实数值,用来表达模糊集所包含的重要信息,例如模糊集在其论域中最具代表的总体位置以及它的几何形状. 在某些情况下,由于代表值没有统一的定义,则可以用该模糊集的去模糊化(defuzzified)后的值来定义代表值. 然而需要注意的是,在某一特定的模糊规则插值方法中,所有的代表值都是以相同的方式计算的.

给定一个任意多边形模糊集 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 其中 $a_i, i=1, 2, \dots, n$ 表示多边形的特征点,其代表值 $Rep(A)$ 定义如下:

$$Rep(A) = \sum_{i=1}^n w_i a_i$$

(24)

其中 w_i 是分配给特征点 a_i 的权重. 对于最简单的情况,称为平均代表值,其中所有点都取相同的权重值,即 $w_i = 1/n$. 对于第 2 节中图 1 描述的三角形模糊隶属函数 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $Rep(A)$ 在文献中通常简单地定义如下(尽管其重心也可作为备选方案):

$$Rep(A) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

(25)

对更复杂的模糊隶属函数(如复杂多边形、高斯型)的代表值的定义可以查阅文献[16].

除了其几何意义外,代表值另一重要作用就是简化了模糊集之间距离的定义. 两个模糊集 A 和 B 之间距离的定义可以简单的表示为

$$d(A, B) = |Rep(A) - Rep(B)|$$

(26)

与基于 α -截集距离的方法^[77]相比,该定义描述的距离是一个精确的距离. 对于在给定的不同模糊规则插值方法中,本文将具体指出如何定义该距离.

4.2 基于尺度和位移变换的模糊规则插值方法

(T-FRI)

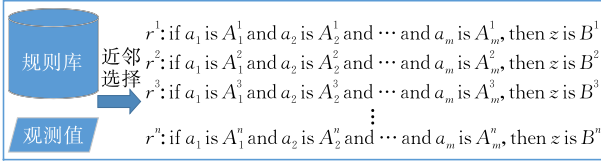
基于尺度和位移变换的模糊规则插值(scale and move Transformation-based FRI, T-FRI)是一种最通用、最先进的基于中间规则的模糊插值推理机制. 提出这一方法的关键目标之一是消除模糊规则插值早期工作中存在的一个重要的实际问题,即插值结果不能保证是凸的模糊集,甚至在某些情况下不能保证是有效的模糊集. 文献[15-16]介绍了 T-FRI 的基本思想,简而言之,该算法通过四步完成规则插值,即首先选择出用于插值的规则,然后用它们构造一条中间规则,第三步通过比较观测值与中间规则前件的相似性获得尺度和位移变换的参数,最后对中间规则的后件进行尺度位移变换得出结论.

给定稀疏规则库 R 和观测值 o^* , 它们分别采用式(1)中的形式, T-FRI 由以下四个步骤实现,并且分别总结在图 5 所示的四个阶段中.

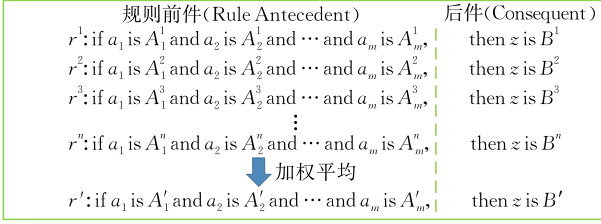
第一阶段:选择最近邻规则

作为 T-FRI 的预备阶段,当输入的观测值 o^* 与规则库中的任何规则都不匹配时,需要在第一阶段选择一定数量的规则,使得这些规则最接近观测值,并且用于后续阶段的插值推理. 在度量“接近度”时,需要用到基于距离的准则. 在 T-FRI 中,观测值 o^* 与规则 r^q 之间的距离,或任意两条规则 $r^p, r^q \in R$ 之间的距离,是通过计算它们之间对应属性的所有相应模糊值的聚合距离来确定的:

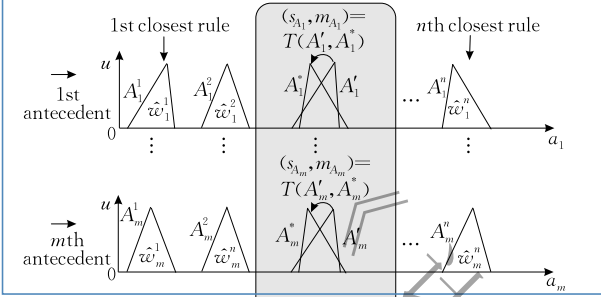
阶段一



阶段二



阶段三



阶段四

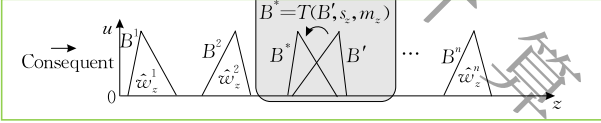


图 5 基于变换的 T-FRI 规则插值

$$d(v, r^q) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{j=1}^m d(A_j^v, A_j^q)^2} \quad (27)$$

其中 v 代表 o^* 或者 r^p (因此 A_j^v 表示 A_j^* 或者 A_j^p), 取决于上述定义的距离是观测值和规则之间的距离还是两条规则之间的距离. 因此, 与 o^* 最接近的 n 条规则就是此距离测量的最小的 n 条规则. 在计算关于上述定义元素之间的聚集时, 一对前件模糊集之间的距离计算如下:

$$d(A_j^v, A_j^q) = \frac{|Rep(A_j^v) - Rep(A_j^q)|}{max_{A_j} - min_{A_j}} \quad (28)$$

这是通过使用相应模糊集的代表值来实现的 (见第 4.1 节中代表值的定义), 该距离值是对绝对距离标准化的结果, 其中 max_{A_j} 和 min_{A_j} 分别表示属性 a_j 的最大值和最小值. 这种标准化是为了确保所有距离度量在不同的属性域上彼此兼容. 这一阶段如图 5 阶段一所示.

第二阶段: 构造模糊中间规则

在第一阶段中可以选择出与给定观测值最接近的, 具有最小距离的 n 条规则, 下面将构造一条模糊中间规则 r' , 作为 T-FRI 稍后执行基于尺度和位移变换过程的基础. 在 T-FRI 的大多数应用中, 为了

计算效率, n 取值通常为 2, 但通常是以牺牲插值精度为代价的^[100].

构造模糊中间规则 r' 的过程是分别计算 r' 的前件模糊集 A_j' , $j=1, \dots, m$ 以及相对应的后件模糊集 B' , 以得到如下形式的模糊中间规则 r' :

if a_1 is A_1' and a_2 is A_2' and $\dots$ and a_m is A_m' , then z is B' .

它是对第一阶段选择的 n 条最近邻规则的加权整合获得的. 令 $w_j^i, i \in \{1, \dots, n\}$ 表示第 i 条模糊规则的第 j 个前件属性对构造模糊中间规则的第 j 个前件 A_j' 所附加的权重, 计算如下:

$$w_j^i = \frac{1}{1 + d(A_j^i, A_j^*)} \quad (29)$$

其中 $d(A_j^i, A_j^*)$ 由式 (28) 计算得到. 对该权重在 n 条规则间进行归一化得到 $\hat{w}_j^i = \frac{w_j^i}{\sum_{i=1, \dots, n} w_j^i}$, 以便做加权平均使用.

因此, 模糊中间规则 r' 的第 j 个前件 A_j' 计算如下:

$$A_j' = \sum_{i=1, \dots, n} \hat{w}_j^i A_j^i + \delta_{A_j} (max_{A_j} - min_{A_j}) \quad (30)$$

其中 δ_{A_j} 是一个常量, 称为 A_j 的偏移因子, 目的是使得构造出的中间规则前件 A_j' 和对应的观测值 A_j^* 有相同的代表值. 其定义如下:

$$\delta_{A_j} = \frac{|Rep(A_j^*) - Rep(\sum_{i=1, \dots, n} \hat{w}_j^i A_j^i)|}{max_{A_j} - min_{A_j}} \quad (31)$$

类比于上述构造中间规则的前件属性, 其后件值可由此得出:

$$B' = \sum_{i=1, \dots, n} \hat{w}_z^i B^i + \delta_z (max_z - min_z) \quad (32)$$

其中 max_z 和 min_z 为结果属性的最大值和最小值. $\hat{w}_z^i$ 作为与每条规则的前件项相关的归一化权重 (即 $\hat{w}_j^i$) 的平均值, 并且后件属性的偏移因子 δ_z 也是前件属性偏移因子 $\delta_{A_j}, j=1, \dots, m$ 的代数平均, 分别计算如下:

$$\hat{w}_z^i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{w}_j^i, \quad \delta_z = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{A_j} \quad (33)$$

如图 5 阶段二中总结的这一工作, 模糊中间规则则由分别计算出的规则前件和后件构成.

第三阶段: 计算尺度和位移因子

在第二阶段构造出模糊中间规则 r' 后, 便可对其进行相应的变换得出与观测值对应的结论. 其理论依据是类比相似推理机制: 中间规则的前件与观测越相似, 其后件便与结论越相似. 在 T-FRI 方法

中,这种相似性是通过尺度和位移因子衡量的.作为一种基于变换的模糊规则插值方法,T-FRI中的变换过程 T 的目标是对中间规则的后件模糊集 B' 进行尺度和位移变换,从而获得最终的插值结论.该变换是通过类比将中间规则的前件属性 A'_j 变换为对应的观测值属性 A_j^* ,并保证变换后的形状和代表值与观测相一致.因此,在第三阶段,首先计算出进行尺度和位移变换的参数因子,该过程分为以下两步实现:

(1) 构造尺度因子,对中间规则前件进行尺度变换: $A'_j \rightarrow \hat{A}'_j$

为了实现这一点,首先确定所需的尺度因子 s_{A_j} .由于尺度(和随后的位移)因子的计算取决于所使用的模糊隶属函数,因此给定一个三角模糊集 $A'_j = (a'_{j1}, a'_{j2}, a'_{j3})$,尺度因子 s_{A_j} 由下式得出:

$$s_{A_j} = \frac{a_{j3}^* - a'_{j1}}{a'_{j3} - a'_{j1}} \quad (34)$$

它扩展或缩短了支撑集的长度: $A'_j: a'_{j3} - a'_{j1}$,使其与 A_j^* 支撑集的长度相同.为保证尺度变换后的模糊集 $\hat{A}'_j$ 与 A'_j 的代表值相等, $\hat{A}'_j = (\hat{a}'_{j1}, \hat{a}'_{j2}, \hat{a}'_{j3})$ 通过尺度因子的构造方式如下:

$$\begin{aligned} \hat{a}'_{j1} &= \frac{(1+2s_{A_j})a'_{j1} + (1-s_{A_j})a'_{j2} + (1-s_{A_j})a'_{j3}}{3}, \\ \hat{a}'_{j2} &= \frac{(1-s_{A_j})a'_{j1} + (1+2s_{A_j})a'_{j2} + (1-s_{A_j})a'_{j3}}{3}, \\ \hat{a}'_{j3} &= \frac{(1-s_{A_j})a'_{j1} + (1-s_{A_j})a'_{j2} + (1+2s_{A_j})a'_{j3}}{3} \end{aligned} \quad (35)$$

(2) 对尺度变换后的模糊集进行位移变换: $\hat{A}'_j \rightarrow A_j^*$,从而构造位移因子

位移因子 m_{A_j} 可由第一步中获得的尺度变换后的模糊集 $\hat{A}'_j$ 得出.如前所述,位移变换是通过移动 $\hat{A}'_j$ 的位置,使其与 A_j^* 相同,同时还需保证代表值不变.因此,位移因子可构造如下:

$$m_{A_j} = \begin{cases} \frac{3(a_{j1}^* - \hat{a}'_{j1})}{\hat{a}'_{j2} - \hat{a}'_{j1}}, & a_{j1}^* \geq \hat{a}'_{j1} \\ \frac{3(a_{j1}^* - \hat{a}'_{j1})}{\hat{a}'_{j3} - \hat{a}'_{j2}}, & \text{其他} \end{cases} \quad (36)$$

如图5阶段三中阴影部分着重描述的,这一阶段计算并保留所有规则前件的尺度和位移变换因子,以便在后续和最终过程中使用以获得结论值.

第四阶段:尺度和位移变换

在计算了需要的尺度和位移因子(即 s_{A_j} 和 m_{A_j} ,

$j=1, \dots, m$)之后,第四阶段将完成 T-FRI 过程,得到所需的结果值 B^* .这一阶段遵循了类比近似推理的机制,即相似观测导致相似结果.为此,后件属性的变换因子将聚合前件属性上的变换因子,这是通过计算代数平均来实现的:

$$s_z = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{A_j}, \quad m_z = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m m_{A_j} \quad (37)$$

这使得所求的插值结论模糊集 $B^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ 可通过类比第三阶段对中间规则的前件进行的尺度和位移变换获得,即有如下两步变换:

(1) 尺度变换, $B' \rightarrow \hat{B}'$. 类比式(35)获得尺度化的后件模糊集 $\hat{B}' = (\hat{b}'_1, \hat{b}'_2, \hat{b}'_3)$.

(2) 位移变换, $\hat{B}' \rightarrow B^*$.

在位移变换中,利用位移因子获得最终所需的插值结果 $B^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$:

$$\begin{aligned} b_1^* &= \hat{b}'_1 + m_z \gamma, \\ b_2^* &= \hat{b}'_2 - 2m_z \gamma, \quad \gamma = \begin{cases} \frac{\hat{b}'_2 - \hat{b}'_1}{3}, & m_z \geq 0 \\ \frac{\hat{b}'_3 - \hat{b}'_2}{3}, & \text{其他} \end{cases}, \\ b_3^* &= \hat{b}'_3 + m_z \gamma \end{aligned} \quad (38)$$

为突出尺度变换和位移变换的重要性,基于插值的结论模糊集可以用以下方式表示: $B^* = T(B', s_z, m_z)$.最后阶段四的工作如图5最下面一行所总结的.尽管上述对 T-FRI 算法基本原理的概述仅采用了三角形模糊集,该算法还可以处理具有复杂多边形、高斯和钟形模糊隶属函数的多个前件规则的内插和外插.

4.3 T-FRI 方法的衍生算法代表

由于 T-FRI 方法在实现模糊规则插值推理时表现出优良的特性,近些年已经涌现大量文献,从许多不同的角度来进一步改进它,如表4中汇总的 T-FRI 算法族.本节概述其中具有代表性的方法.

4.3.1 自适应的 T-FRI(2011^[91], 2017^[18])

自适应的 T-FRI 算法的提出是由于观察到在一系列 T-FRI 插值运算之后,插值结果可能存在不一致性.造成不一致的原因可能包括插值的规则和不精确的插值变换.自适应模糊插值增强了原始 T-FRI 算法的插值变换对缺陷规则的识别和修正能力,有利于消除某些不一致性.该算法是通过两个子系统来实现的:(1) 诊断子系统.它是由通用诊断引

擎(General Diagnostic Engine, GDE)构造的,其中不一致的插值结果记录在基于假设的信值修正系统(Assumption-based Truth Maintenance System, ATMS)^[101]中;(2)修正子系统.它是对传统数值插值理论进行模糊扩展,及其在近似计算中的应用.

自适应 T-FRI 的工作流程如图 6 所示.尽管从理论上讲,系统的不一致可能来自观测值、不正确的规则等多方面因素,在自适应 T-FRI 算法中,仅考虑插值过程中的中间规则导致的不一致结论.因此在该算法中,ATMS 收集记录下某一插值结论与后面模糊规则插值之间的依赖性,并将其输入到 GDE 中. GDE 是用于分离多个同步错误的系统,它通常与 ATMS 一起工作.在这里, GDE 将所有可能的不一致结论从这些冲突依赖关系中分离出来.最终由一个基于依赖指导的修正子系统通过将模糊推理中的错误从线性插值细化到分段线性插值,从而对不一致的模糊推理结论进行修正并返回输入到插值器中,完成自适应 T-FRI 的闭环工作.然而,这项工作主要集中在自适应 T-FRI 的实现上,它只涉及两条多前件属性的规则.此外,还需要进一步研究它是否能够处理外插的情况(因为原始 T-FRI 能够以与内插相同的方式处理外插).

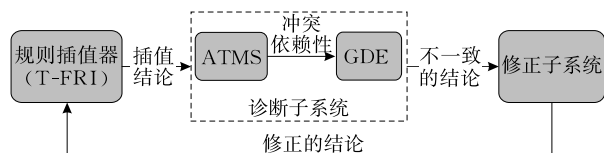


图 6 自适应 T-FRI 工作流程

4.3.2 反向的 T-FRI(2019^[93], 2020^[87])

传统的模糊规则插值(包括 T-FRI)通常以“前向”的方式执行,即在给定规则库和观测的所有前件属性的情况下,需要对结果进行插值推理.然而,可能会出现某种情况,当给定的观测值中缺少某些关键的前件属性时,同时该属性也可能参与到随后的插值过程中,因此该前件属性的缺失将会导致最终插值结论的推导失败.这一重要问题是通过 T-FRI 的一个改进来解决的,称为反向的 T-FRI,它提供了一系列的解决方案来处理单个前件值的缺失和多个前件属性缺失的问题.

对于单个前件值缺失的问题,反向 T-FRI 通过仿照实现原始 T-FRI 的四步计算过程(见第 4.2 节),从而反向计算对应于未知前件属性值的相关参数.不失一般性,将 T-FRI 对某一观测值相关的结论的插值推理用下式表示:

$$B^* = f_{\text{T-FRI}}(R = \{r^1, r^2, \dots, r^N\}),$$

$$(o^* = \{A_1^*, \dots, A_l^*, \dots, A_m^*\}) \quad (39)$$

即插值结论 B^* 通过 T-FRI 的规则插值过程,利用规则库 R 和具有全部前件属性的观测值 o^* 获得.具有单个前件值缺失(比如 A_l^* 缺失)的反向 T-FRI 因此类比上式可以有如下的形式:

$$A_l^* =$$

$$f_{\text{B-TFRI}}(R, B^*, (o_{\text{missing}}^* = \{A_1^*, \dots, A_{l-1}^*, A_{l+1}^*, \dots, A_m^*\})) \quad (40)$$

其中在求未知前件属性 A_l^* 时,除了需要规则库 R 和具有剩余前件属性的观测值 o_{missing}^* 以外,该观测值对应的已知结论也需要加入到计算过程中.此时 B^* 作为已知变量,而 A_l^* 为未知变量.但由于缺失属性只有一个,因此可以通过第 4.2 节 T-FRI 的四步插值过程的逆向计算,获得规则前件属性的模糊集值.

对于更一般的具有多个前件属性缺失的问题,反向 T-FRI 提出了两种方案来求缺失值.第一种方案是参数化方法,它是上述方法的直接推广.假设有 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_L^*$ 共 L 个前件属性未知,该方法首先将 $A_i^*, i \in [1, 2, \dots, L]$ 对应的用于插值过程的参数(比如式(29)中的 ω_j^i , 以及式(31)中的 δ_{A_j})离散化,然后便能获得某一组参数值,将这组参数代入 T-FRI 算法中得到一个插值结论,与已知的 B^* 进行比较,误差最小的组合即为最佳参数组合,最后利用最优参数构造缺失的规则前件属性.第二种方案被命名为反馈方法,该方法与参数化方法不同的是,首先离散化的不是缺失属性对应的参数,而是属性的模糊集值本身,从而获得缺失属性的一组估计,然后将其代入 T-FRI 算法中,计算获得插值结论并与已知的 B^* 进行比较,最终寻求误差最小的一组离散估计值即为所求的 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_L^*$.这两种方法均采用了参数估计与结果验证的思想.由于参数化方法中需要估计的参数组合比反馈方法更多,因此算法的计算复杂度更高.

反向的 T-FRI 算法保留了原始 T-FRI 所具有的许多重要性质,如处理多条具有多前件属性的规则插值的能力,以及保证了插值结果的凸性和正规性,从而有助于解决前件项缺失的问题,但它并不能完全消除这个问题,特别是当缺少的值的比例很大时.

4.3.3 动态 T-FRI(2017^[19])

现有的大多数基于变换的模糊规则插值机制都是针对静态稀疏规则库的.然而,由于模糊系统

的需求可能会随着时间的变化而变化, 缺乏并存或动态生成的规则, 使得静态规则库的使用可能会影响模糊插值推理的有效性. 在执行规则插值时, 基于变换的模糊规则插值方法通常生成大量模糊中间规则. 总体而言, 它们可以逐渐覆盖无法由原始稀疏规则库覆盖的区域, 从而为更新静态稀疏规则库提供有价值的信息. 受此启发, Naik 等人(2017b)^[19]提出了一个动态的 T-FRI 机制. 它通过改进和提取中间规则来丰富规则库, 进而通过进行更直接的规则匹配来获得结论, 从而提高模糊推理过程的效率.

动态 T-FRI 算法的具体工作流程如下:

(1) 正常利用 T-FRI 规则插值算法对输入观测值进行插值推理, 同时保留插值过程中构造生成的大量中间规则, 集中保存在中间规则库 R' 中;

(2) 将 R' 中的所有前件属性在多维(由于前件属性不止一个)立方空间中进行划分, 得到超立方体 H , 其中包含许多子立方体, 每一个对应由多维前件属性的某一取值构成的组合;

(3) 将处于非空子立方体 H^* ($H^* \subseteq H$) 中的规则输入到基于遗传算法的聚类算法中, 找出“最佳”聚类结果, 其中包括强子立方体 (H^1) 和弱子立方体 (H^0). 这里的强弱子立方体根据包含的中间规则数目的多少确定;

(4) 将弱子立方体 (H^0) 合并转化为强子立方体 (H^1);

(5) 最后选择仅包含足够中间规则的聚类结果, 将其合并至原始的稀疏规则库 R 中, 完成规则库的更新.

通过上述过程, 动态 T-FRI 能够在后续的推理过程中, 直接利用简单高效的 CRI 为之前出现过的相似观测值进行推理, 从而减少进行没有必要规则插值. 该方法还是一种灵活和通用的算法, 在动态扩充原始稀疏规则库的过程中, 并不限制使用任何特定的规则插值算法、适应度函数和规则合并方案, 只是在提出的方法中采用了 T-FRI 和遗传算法. 动态 T-FRI 算法对更新规则库和提高推理效率的现实意义是显而易见的. 然而, 通过使用更有效和高效的聚类和优化方法来替换当前实现中的相关过程, 仍然有可能进一步提高算法的效能.

4.3.4 高阶 T-FRI(2016^[85], 2017^[86])

大多数模糊规则插值方法的一个共同点是, 通常利用常规的 I-型模糊集定义规则和观测值中的

模糊隶属函数, 用于解释和处理模糊系统中存在的不确定性. 现有的方法中很少能够联合处理规则或观测中的一种以上形式的不确定性, 尤其在某些情况下, 对更复杂的模糊集进行合理的表示对模糊系统十分必要^[102]. 针对这一问题, 高阶的模糊规则插值方法应运而生, 它允许在 T-FRI 框架内表示和处理不同类型的不确定性. 这类算法首先用高阶形式对不确定性知识进行描述, 然后对这种模型进行高阶插值得到最终结论.

高阶的模糊规则插值利用了两种常见的不确定性表示方法来实现: (1) 基于粗糙模糊集的规则插值方法^[85]. 该方法用粗糙模糊近似表示不确定模糊隶属函数; (2) 基于区间值 II-型模糊集的方法^[86]. 其工作方式与基于粗糙模糊集的 T-FRI 相同. 在这两种方法中, 模糊集的代表值的概念起着与原始的基于 I-型模糊集的 T-FRI 一样不可或缺的作用. 从本质上讲, 这两种方法均为 T-FRI 规则插值算法^[15-16]的拓展, 它们分别用粗糙模糊集和区间值 II-型模糊集代替传统的 I-型模糊集, 即式(1)中规则的前件 ($A = \{a_j | j = 1, 2, \dots, m\}$) 和结论 (B) 属性以及观测值的属性 ($o = \{a_j^* | j = 1, 2, \dots, m\}$) 由这两类高阶模糊集来描述. 然后基于这种改进的模糊规则进行第 4.2 节中 T-FRI 的规则插值过程. 由于插值过程中元素所采用的取值不同, 插值算法也需要进行相应的改进. 比如, 区间值 II-型模糊隶属函数中存在额外的不确定性分别用上模糊隶属函数和下模糊隶属函数表述, 因此在第 3、4 步的变换过程中, 除了对模糊集进行尺度和平移变换, 还需要对下模糊隶属函数的高度进行进一步的变换. 另一种基于区间值 II-型模糊集的模糊规则插值方法可以参考文献 Chen 和 Lee(2011)^[41]. 这种方法需要对每个特定的不确定性表示进行相应的修改, 这不可避免地增加了计算复杂度. 对基于 T-FRI 改进的高阶算法, 如果所涉及的所有不确定性都能被 I-型模糊集充分捕获, 则高阶 T-FRI 机制将会退化成为原始的方法.

4.3.5 其他 T-FRI 相似算法

除了上述算法是对 T-FRI 的直接研究和改进外, 还有一些类似于 T-FRI 的方法, 如文献 Li 等人^[97]. 又如, 在文献^[14]中, 任意多边形模糊集的排序值(ranking values)被用来表示隶属函数的特征点, 而这些特征点又被用来在基于变换的模糊规则插值过程中扮演与 T-FRI 中代表值相似的角色. 此

外,该算法将 T-FRI 中涉及的尺度因子和位移因子分别替换为距离比(distance ratio)和偏移率(move rate),对所构造的中间规则进行变换,以获得最终的插值结果.

Chen 和 Ko(2008)^[98] 提出 T-FRI 的另一个变形,称之为 CK 方法. 该算法用特征值(characteristic values)代替代表值,不仅简化了对模糊集的表示,而且用于定义模糊集之间的距离. 对于任意多边形模糊集,CK 方法通过计算从一系列 α -截集中获得的每个特征点来导出所寻求的插值模糊集. 算法首先确定隶属度为 1 的点,用以帮助随后计算剩余点. 然后执行两个变换,即增量变换和比率变换(increment and ratio transformations),将中间规则的结果转化为最终插值结果. 转换这二者之间的相似度与中间规则的前件和观测值的相似度类似. 最近,作者改进了他们的工作,引入了两个增强的转换,即加权的增量变换和加权的比率变换(weighted increment transformation and weighted ratio transformation),来实现相应的加权模糊规则插值^[99]. 在这个加权算法中,每个规则前件变量的权重是通过机器学习算法自动获得的. 该方法是一个迭代过程,它被嵌套在加权插值过程中,同时需要利用插值的结果来构造适应度函数以更新当前权重,进而对 CK 方法中的增量变换和比率变换进行加权. 该方法的优点在于它可以处理多种类型的模糊隶属函数表示的模糊集,比如多边形、高斯和钟形隶属函数. 然而,在该方法中,虽然权重可以通过算法自动获得最优值,但它是针对特定问题定制的,每个规则前件属性的适应性函数都是预先确定的,从而限制了该技术的通用性.

4.4 基于广义函数的模糊规则插值方法

与上述 T-FRI 方法类似的是另一种方法,称为基于广义函数的算法. 作为基于变换的模糊规则插值方法之一,它自成一个子类,其中的典型代表参看文献[74-75]、文献[76]、文献[77-79]、文献[80]. 与基于 α -截集的插值算法不同,在给定未匹配的观测值的情况下,该方法是基于模糊关系的插值而不是使用 α -截集距离来推断结论. 此类算法通常需要两个主要步骤来实现. 下面简要概述这两步的原理,更多细节可参考上述文献.

给定由式(1)表示的两条模糊规则(例如, r^1 , r^2)和一个观测值(o^*),基于广义函数的方法的核心思想可以通过以下两个阶段来描述.

4.4.1 基于插值的推理规则的生成

第一个阶段的目的是创建一条中间规则 r' ,使 r' 的前件尽可能“接近”观测的前件(A^*). 这里的“接近”一词表示在观测值和中间规则之间确保至少存在部分重叠. 本阶段的实现过程可用下面的函数形式表示:

$$r' = f^{\text{Interpolation}}(r^1, r^2) \quad (41)$$

其中, $f^{\text{Interpolation}}$ 表示从一对规则到一组所有可能的规则集的映射. 有两类算法可用于实现该阶段的过程:

(1) 模糊关系插值(fuzzy relation interpolation), 包括任何类 solid cutting 的方法: Baranyi 等人(1995, 1996a)^[74-75]、Baranyi 和 Kóczy(1996a)^[76]、Baranyi 等人(1996b)^[78]、Baranyi 和 Kóczy(1996b)^[80], 以及一些基于固定点(fixed point law)或者固定值(fixed value law)的方法: Ding 等人(1989, 1992)^[103-104]、Mukaidono 等人(1990)^[105]、Shen 等人(1993, 1988)^[106-107].

(2) 语义关系插值(semantic relation interpolation), 其中包括任何的语义修正(semantic revision)的方法: Ding 等人(1989, 1992)^[103-104]、Mukaidono 等人(1990)^[105]、Shen 等人(1993, 1988)^[106-107]. 这些算法利用语义修正原理,描述基于插值的中间规则的前件与后件模糊集之间的关系.

4.4.2 基于单条规则的推理

第二个阶段即是利用在第一阶段生成的中间规则进行推理. 此阶段的过程通常可以表示为

$$B^* = f^{\text{Inference}}(r', A^*) \quad (42)$$

对于这一类方法中的不同模糊规则插值算法,实现单条规则推理的具体机制可能有所不同. 文献[103-104]、文献[105]、文献[106-107]中的任何方法都可以直接变换中间规则来计算所需的最终结果值.

此类方法的更多优势在于它可采用任意形状的模糊隶属函数,并且避免生成非正规的模糊结论. 以上主要分析总结了具有单个规则前件属性情况下的插值. 与基于 α -截集和 T-FRI 方法一样,基于广义函数的机制也被扩展到使用多个规则前件属性和模糊外插的规则插值应用中. 更多细节可以在文献[77]和其他衍生算法中查看. 这种方法的工作流程见图 7. 从概念上讲,这与 T-FRI 采取的基本方法非常相似,因此它们共同的缺点是,在某些使用复杂模糊集的应用中,其计算复杂度比基于 α -截集的方法更高.

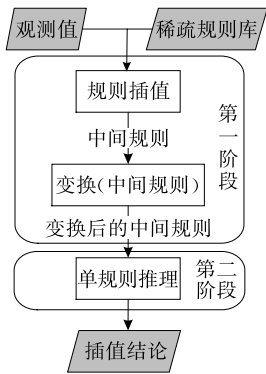


图 7 基于广义函数规则插值方法的流程图

4.5 基于几何的线性模糊规则插值

由前文综述的模糊规则插值算法可以看出,尽管国内外诸多学者提出各种各样不同的方法实现模糊插值推理,但目前并没有一种形式对规则插值过程的进行统一数学形式表示. Das 等人(2019)提出了一种初步的尝试方案:基于几何的线性模糊规则插值^[92]. 下面简要介绍其基本原理.

基于几何的线性模糊规则插值方法(Geometry based Linear Fuzzy Rule base Interpolation, GLFRI)属于第二大类的基于中间规则的算法. 该方法希望利用几何可视化从而对规则插值算法进行数学形式上的统一表示. GLFRI 首先构造一条中间规则,即相邻规则的线性聚合,然后通过中间规则进行几何变换得到最终的结论. 在第一步中,通过对规则前件和结论部分进行特定的数学运算,将所有的模糊规则转化为高维空间中的模糊集或模糊点. 然后将规则前件和结论所表示的模糊集或模糊点用模糊线段相连接,从而将模糊规则之间的关系用模糊线段几何表示. 中间规则则通过线性聚合待插值的模糊线段(即模糊规则)构造得到. 第二步通过对比观测值与中间规则的前件的差异计算相应的膨胀和收缩参数,最终利用这些参数变换中间规则的后件从而获得观测值对应的结论.

GLFRI 通过对模糊集的几何空间表示,不仅将模糊插值方法与传统经典插值技术相结合,而且能够提供插值过程的几何可视化表示. 然而该方法目前只考虑核集为单点的正规模糊集(比如三角形隶属函数),对于非正规或者非凸模糊集有待进一步研究.

4.6 模糊规则插值的其他思路

从前文第 3、4 节中综述的模糊规则插值方法可以看出,尽管实现模糊稀疏规则库下的插值推理算法层出不穷,它们基本上都是从 α -截集(非变换)或

中间规则(变换)的角度出发,寻求更先进的理论方法. 然而随着模糊规则插值技术的发展,在实际问题应用中遇到的一些问题可能同时出现在这两大类插值方法中. 比如表 1 和表 4 中列出的分别基于 α -截集的和基于中间规则的自适应规则插值算法,尽管如此,这些方法的出发点和解决思路仍存在很大差异.

在模糊规则插值最新的研究中, Li 等人(本文作者们)提出了一系列的属性加权插值推理算法,用于解决规则前件属性具有不同权重的规则插值问题. 这些方法分别是属性加权 T-FRI 规则插值(2018, 2020)^[88-89], 属性加权 KH 和 CCL 规则插值(2020)^[100]. 这三种方法分别属于上述两类规则插值方法,但它们实现的属性加权机制的核心思想相似. 下面总结其中的基本理论.

属性加权 T-FRI 规则插值算法是 T-FRI 算法^[15-16](见第 4.2 节)的拓展延伸. 在原始算法中,规则的前件属性被视为具有相同的重要性,因此未给属性赋予权值. 然而从现实决策中可以发现,不同的条件变量在决策的制定中贡献是不同的. 因此该属性加权算法需要实现权重评估计算和加权规则插值这两个步骤.

在属性加权 T-FRI 方法中,单一规则前件属性的权重仅由给定的稀疏规则库自动学习生成,不需要任何输入的观测值或其他相关信息. 该属性权值学习方法利用文献[89]所提出的被称为逆工程的算法,从给定的稀疏规则库中生成一个人工训练决策表. 其基本思想是将规则库中所有的规则表示为一种通用形式,使得规则中可能出现的属性缺失值被该属性能够采取的任意一个模糊值代替. 这些由统一形式表示的“规则”,无论是人工构造的还是原始规则库中的,都被用来评估单个属性的相对重要程度. 接着对各规则前件属性权重的评估计算是利用特征评估算法实现的,这些算法是从特征选择技术中提取和修改的. 在文献[89]中,一共采用五种特征评估算法,分别是基于单一特征评估的方法(基于特征选择的信息增益、Relief-F、Laplacian Score 和基于局部学习聚类的特征选择方法)和基于特征子集评估的方法(基于粗糙集的特征选择). 它们都可以实现对规则前件属性的权重学习,但在加权 T-FRI 方法的具体实践中,仅需要五种加权方案中的任意一种即可. 每一个最终学习到的权值与唯一的规则前件属性关联,无论它被包含在哪条规则中.

在获得了规则前件属性的权值后,需要将其用于指导规则插值算法. 对于属性加权 T-FRI 方法,属性权值被用于原始非加权算法的每一个步骤. 具体而言,这些权重与第 4.2 节 T-FRI 算法的四个阶段相融合:最近邻规则的选择、中间规则的构造、尺度和位移变换因子的计算以及结论的变换. 原始 T-FRI 方法中涉及到不同属性聚合的所有计算算术平均的步骤,都在属性加权 T-FRI 算法中通过对相应成分的加权聚合得以改进.

上述的属性权重学习方法是独立于任何模糊规则插值技术的. 因此,另外两种属性加权规则插值方法(属性加权 KH 和 CCL 规则插值)是分别对原始非加权的 KH 线性规则插值和 CCL 算法的加权扩展. 它们利用相同的方式学习生成规则前件属性的权值,然后类似于加权 T-FRI,在插值过程的所有计算步骤中与两种传统的方法结合构造属性加权方法. 这三类加权插值方法被用于经典的分类和回归问题中,获得了精度上的提高. 此外还得出一个重要的结论是,对于属性加权的算法,仅使用最少数目的规则(即两条)便能得到最优的效果,大大提升了算法的使用效率.

属性加权 T-FRI、KH、CCL 规则插值算法均实现了仅利用有限的稀疏规则库学习获得相应的规则前件属性权值,并采用相似的理论方法进行规则插值算法的加权拓展. 这使得在改进模糊规则插值技术的过程中冲破了受算法类型限制的阻碍,简化了操作,为其发展提供了新的思路.

5 模糊规则插值方法的评估与应用

第 3、4 节分别综述了模糊插值推理的两大类算法,为了系统的比较各种方法的优势与不足,本节首先总结模糊规则插值算法常用的评价指标,并对前文综述的代表性算法进行评估与比较. 作为基于模糊规则系统的推理机制,本节最后介绍规则插值方法在现实问题中的应用价值.

5.1 评估准则

无论是基于 α -截集还是基于中间规则的插值推理方法,都是通过在给定规则库中插值模糊规则来实现插值推理的目的,从而对未匹配的观测值生成推理结果. 从理论上讲,模糊规则插值本质上是一个映射^[26,108],它将输入的属性空间 $\mathcal{A}$ 和输出的属性空间 $\mathcal{Z}$ 联系起来,其中输入属性域 $\mathcal{A}$ 和输出

属性域 $\mathcal{Z}$ 中的模糊子集(由 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ 表示)分别表示规则前件属性的值域和规则后件的值域. 也就是说,给定一个规则库 $R, \forall r^i \in R$ 由式(1)表示,其所有 m 个前件属性的值满足 $\{A_1^i, A_2^i, \dots, A_m^i\} \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$, 且后件属性的值同样满足 $B^i \in \mathcal{F}(\mathcal{Z})$. 模糊规则插值算法追寻某一相关性 $I: \mathcal{F}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{Z})$, 使得赋予输入空间某一观测值 $A^* (= \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ 一个基于插值得出的结论 $I(A^*) = B^*$, 其中 $B^* \in \mathcal{F}(\mathcal{Z})$. 因此模糊规则插值方法需要满足映射函数的某些共同性质,这也形成了比较它们的一般准则.

下面汇总了文献中 11 个最常用的模糊规则插值方法的评价指标^[26,108-109].

I1. 结论的有效性. 插值结论总是得到一个有效的模糊集.

I2. 维持结论的凸性与正规性. 如果观测值是正规凸的模糊集,则插值结论也应该是正规凸的模糊集.

I3. 与规则库的兼容性. 对于规则库中所有的规则 $r^i \in R$, 以及输入空间中的所有观测值 $A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$: 如果 $A^* = A^i$, 则 $I(A^*) = B^* = B^i$.

I4. 连续性条件: 对于 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ s. t. 如果 $A, A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$, 以及 $d(A, A^*) \leq \delta$, 那么 $d(I(A), I(A^*)) \leq \epsilon$, 其中 $d(\cdot, \cdot)$ 表示某个距离度量标准.

I5. 维持分段线性(piece-wise linearity). 如果用于插值的模糊集是分段线性的,则插值结论应该是分段线性的.

I6. 维持介值性(“in between”). 如果 A^* 介于 A^i 和 A^j 中间,那么插值结论 $I(A^*)$ 应该介于 $I(A^i)$ 和 $I(A^j)$ 之间.

I7. 任意隶属函数的使用. 映射 I 适用于任何凸的和正规的隶属函数.

I8. 形状不变性. 如果规则前件属性中的所有模糊集都是同一类型的隶属函数,则插值的结论 $I(A^*)$ 也应该是该隶属函数表示的模糊集.

I9. 多规则的适用性. 映射 I 可以处理任意数量规则的模糊插值推理.

I10. 多维输入的适用性: 映射 I 适用于任何有限数量的输入变量.

I11. 外插扩展能力. 内插映射 I 能够扩展处理外插问题.

5.2 算法比较

在模糊规则插值算法的发展历史上,一些在早期阶段提出的方法,尤其是对基于 α -截集的方法,

包括具有开创性意义的 KH 线性插值机制^[9-10]及其相关的改进衍生算法,已经在基于上述的基本准则上被详细地分析,并与之前的工作进行了比较,详见

文献[108]、文献[109]. 因此,为避免重复,本文将着重分析比较近年来持续发展并流行的基于变换的方法. 表 5 给出了一些代表性算法的评估结果.

表 5 模糊规则插值代表算法的评估

算法	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10	I11
KH	×	×	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
	(当 I1 满足时)										
CCL	✓	✓	—	—	—	—	✓	✓	✓	✓	—
T-FRI	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
自适应 T-FRI	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	×
	(一阶分段线性)										
反向 T-FRI	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CK	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	—
动态 T-FRI	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
基于广义函数的方法	✓	✓	✓	✓	✓(*)	✓	✓(**)	—	—	✓	✓

注: ✓表示满足指定准则; ×表示不满足指定准则; —表示无法判断是否满足指定准则;
(*)表示使用三角形模糊集; (**)表示对该算法族内某些组合适用.

尽管通常在研究模糊规则插值方法时,不必满足所有 I1~I11 的评估准则,但是其中大部分关键性的指标必须达到以获得合理正确的结论. 在评价模糊规则插值方法的性能的同时,这些指标也指出了模糊插值推理技术的发展趋势,即修正现有方法的缺陷并且追求满足更多的性能标准. 由 5.1 节中 I1~I11 的定义可以发现,模糊规则插值算法可以从数学理论和适用性拓展的角度分别进行比较.

(1) 映射函数 $I: \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ 满足的数学性质: I1~I6, I8.

从前文可以看到,模糊规则插值算法从数学的角度上讲是实现了从规则前件的属性空间到结论属性空间的映射. 这些准则便从理论的角度评估规则插值方法的有效性与正确性. 由表 5 可以看出,最早提出的 KH 线性插值^[9]不能总是保证导出的模糊集是凸集(即准则 I2),尽管它们可能是正规的模糊集. 这使得后期出现了大量 KH 方法的衍生算法(参见第 3.3 节)对其进行改进. 这些准则也是模糊规则插值算法能够得出合理准确结论所需要满足的最基本的条件. 近些年提出的包括基于变换的方法在内的大多数方法都成功地实现这些关键标准(见表 5).

(2) 方法的适用性和拓展性: I7, I9~I11.

随着现实中的问题与数据越来越复杂,需要构建更为复杂和精确的模糊系统,使其具有更强的插值推理能力. 因此模糊规则插值算法也需要有更好的适用性和拓展性以满足不同应用领域的要求. 比如规则插值方法不能仅仅满足利用三角形或梯形等简单多边形的模糊隶属函数实现插值推理,许多实

际应用常常也采用高斯型的平滑函数(I7). 大多数基于变换的方法都能满足此标准. 此外,系统的复杂性也体现在高维的输入(I10)和对多于 2 条规则的插值处理(I9)等方面. 从表 5 可以看出, T-FRI 算法不仅能够很好地实现这些要求,同时能完成当输入的观测落在待插值规则的外侧,即外插(I11)情况时的插值推理,因此获得了广泛深入地研究. 然而从图 5 可以看出,由于 T-FRI 为实现更精确的插值推理,具有更细致的工作步骤,其计算复杂性也较 KH 线性插值等基于 α -截集的方法更高.

基于本文第 3、4 节对模糊规则插值相关方法的理论介绍以及上述的评估讨论,表 6 汇总了当前算法的优缺点及适用范围.

5.3 实际应用

模糊规则插值方法能够有效地增强基于模糊规则系统的近似推理能力,特别是针对不完备模糊规则库的情况. 自规则插值算法提出以来,尽管大多数的方法都着重于理论研究,近些年文献中也出现了将其应用到实际问题中的报道. 重要的是,基于模糊规则插值技术的模糊推理机制的有效性除了利用 5.1 节中的基于数学模型的评价指标进行评估以外,这些方法的实际应用价值也可以通过规则插值算法在现实问题中的应用来揭示.

模糊规则插值算法广泛应用在系统控制、模式识别、网络安全等多个领域,下面对文献中出现的成功的案例进行汇总.

(1) 系统控制

与经典模糊推理工具的许多实际应用一样,模糊插值推理增强了系统控制的能力,成功的例子包

表 6 模糊规则插值算法的优缺点及适用范围

算法	优点	缺点	适用范围
KH ^[9-10]	计算简单,效率高	可能导致结论是非正规或非凸模糊集	处理多前件变量,多规则的内插和外插
VKK ^[61]	计算简单,保证结论模糊集的正规凸性	无法解决规则属性为单点模糊集的插值	处理多前件变量的内插
MACI ^[8]	计算高效,保证结论模糊集的正规凸性	不保持线性特性	处理 2 条多前件变量规则的内插
基于多边形模糊集斜率的算法 ^[48-50]	算法简单,易于实现	推广性较差(不同算法仅针对特定形状的模糊集)	处理多前件变量的规则内插
CCL ^[37]	灵活性高,保证结论模糊集的正规凸性	复杂多边形模糊集规则插值的计算复杂度较高	适用于不同类型的隶属函数,处理多前件变量,多规则的内插
T-FRI ^[15-16]	保证结论模糊集的正规凸性,灵活性高,推广性强,应用广泛	计算复杂度较高	适用于不同类型的隶属函数,处理多前件变量,多规则的内插和外插
自适应 T-FRI ^[18,91]	同 T-FRI,且消除插值过程中产生是不一致性结论	同 T-FRI	处理 2 条多前件变量规则的内插
反向 T-FRI ^[87,93]	同 T-FRI,且处理前件属性缺失的问题	同 T-FRI	同 T-FRI
动态 T-FRI ^[19]	同 T-FRI,且通过动态更新规则库来提高推理效率	同 T-FRI	同 T-FRI
CK ^[98] 及其加权算法 ^[99]	保证结论模糊集的正规凸性,灵活性高	计算复杂度较高,推广性较差	适用于不同类型的隶属函数,处理多前件变量,多规则的内插
基于广义函数的算法 ^[77]	保证结论模糊集的正规凸性,灵活性高	计算复杂度较高	适用于不同类型的隶属函数,处理多前件变量的规则内插和外插
属性加权-KH ^[100] , -CCL ^[100] , -T-FRI ^[89]	同相应未加权的算法,且使用最少数目的规则,具有更高的推理精度	同原始未加权的算法	同原始未加权的算法

括用于:模拟自动引导车辆^[110]、移动机器人的监视导航控制^[111]以及基于一般行为的控制^[112-113].

(2) 网络安全分析

动态 T-FRI^[19]为方便选择、组合和推广信息丰富的、常用的插值得出的规则提供了可能,以便在执行插值推理操作的同时丰富现有的规则库.该算法为网络安全问题提供了有效的解决方案,其中包括网络安全分析、智能入侵检测^[19]和防火墙的增强(特别是针对 Microsoft Windows 防火墙)^[114].

(3) 模式识别

模糊规则插值在执行实际模式识别任务时也获得了较好的结果,例如使用加权的插值推理技术处理经典分类和回归问题^[38,88-89];计算机视觉与图像超分辨率重建^[33];以及一般疾病诊断,尤其在乳腺肿块风险分析^[115]和大肠息肉检测^[116]的具体应用中发挥潜在的作用.

(4) 大数据处理及其他

近年来,对于大数据的处理及其应用成为热门研究课题之一.作为大数据目前最流行的平台之一,MapReduce 是用于处理和生成大数据集的编程模型和实现相关应用的有效工具.为了管理由于大数据的多样性带来的不确定性,基于模糊规则的分类机制被引入 MapReduce 中.然而由于模糊规则集合本身可能存在的稀疏特性,Jin 等人(2018)^[117]

首次进行尝试,将 MapReduce 与模糊规则插值结合起来,提出一种基于动态模糊推理及插值的 MapReduce 分类系统,用于提高大数据模式下模糊推理的精度.

此外,模糊插值技术在函数逼近^[118-119]和学生学业成绩评价^[120]中也有进一步的应用.

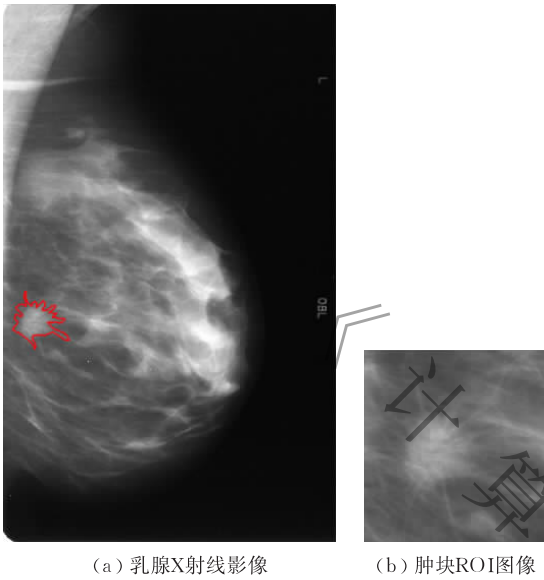
下面列举两个真实案例的实际应用结果.

(1) 用于乳腺 X 射线影像中肿块分类的基于模糊规则的计算机辅助诊断系统(CADx)

在模糊 if-then 规则中,由于前件和结论属性常采用具有语义含义的模糊集进行描述,因此基于模糊规则系统对结论的推理过程相比其他机器学习方法(如神经网络)更加清晰透明,容易解释.具有可解释性的 CADx 系统也是近年来人工智能技术在医学疾病检测与诊断领域迫切追求的.Li 等人(2020)^[115]利用属性加权的模糊规则插值方法构造了一个用于乳腺 X 射线影像肿块分类的 CADx 系统.这一应用的贡献主要有两个方面:一是当未知的肿块观测无法匹配规则库中的任何规则时,该系统能够为其推导出一个基于插值推理的结论,同时结合那些直接由规则匹配推理得出的结论,显著地提高了系统的分类精度;二是系统的诊断结果是具有可解释性的,这是因为用于推理的模糊规则是通过具有语义特性的肿块形态学和密度特征刻画的.这两点在真实乳

腺 X 射线影像数据库上的仿真实验结果分别举例如下.

在模糊规则插值诊断结果的可解释性方面,对于图 8 所示的乳腺 X 射线影像和其中所包含肿块的感兴趣区域(ROI)图像,该系统利用下面 2 条模糊规则,通过属性加权的 T-FRI 算法进行插值推理.



(a) 乳腺X射线影像

(b) 肿块ROI图像

图 8 由基于属性加权 T-FRI 插值推理的恶性肿瘤

Rule 1. If 密度度(F12) is *Large* and 凸性(F4) is *Medium-small* and 圆度(F3) is *Medium-small* and NRL 熵(F9) is *Medium-large* and NRL zero-crossing 计数(F11) is *Large* and 肿块强度均值(F16) is *Medium*, then 肿块 is 恶性.

Rule 2. If 密度度(F12) is *Medium-large* and 凸性(F4) is *Medium* and 圆度(F3) is *Medium* and NRL 熵(F9) is *Medium-large* and NRL zero-crossing 计数(F11) is *Large* and 肿块强度均值(F16) is *Medium*, then 肿块 is 恶性.

肿块特征密度度(F12)、凸性(F4)、圆度(F3)、NRL 熵(F9)、NRL zero-crossing 计数(F11)、肿块强度均值(F16)分别是从小图中提取出用于描述肿块形状、边缘以及密度的特征描述子,它们被用作规则的前件属性.根据特征数值的大小,相应模糊化后的隶属函数取值为“*Small*, ..., *Medium*, ..., *Large*”等语义值.

这 2 条规则的结论都是恶性.考虑到每个肿块特征所表示的物理含义(比如圆度反应肿块形状与圆形的相似度),利用这 2 条最近邻规则进行规则插值,可以得到如下的中间规则:

If 肿块 is 不十分似圆形规则的 and 肿块轮廓 is 不规则的 and 肿块密度 is 稍高, then 肿块 is 恶性.

最终的插值结果也表明观测的肿块为恶性肿瘤.从这个示例可以看出,通过语义丰富的模糊规则的插值推理,对乳腺肿块进行分类,可以清晰地解释诊断推理的过程.

在推理精度方面,基于属性加权模糊规则插值的 T-FRI 方法在两个真实乳腺 X 射线影像数据集上获得的 AUC(即 ROC 曲线下的面积)分别为 0.9614 和 0.9023.这一性能可与目前文献中在相同数据上得到的最优结果相比,它们的 AUC 值分别为 0.9650 和 0.8940.然而这些分类系统及其获得的结果并不容易明确的解释.更重要的是,当遇到更稀疏的规则库的情况时,属性加权的模糊规则插值方法较非加权的算法在性能改进方面将变得更加显著(详细实验结果可参考文献[115]).

(2) 图像超分辨率重建的应用

基于自适应网络的模糊推理系统(Adaptive-Network-based Fuzzy Inference System, ANFIS)是基于模糊规则推理机制的一种网络结构.它能够高效正确地完成推理任务的前提是有充足的训练数据.然而某些实际应用无法始终满足这一假设. Yang 等人(2019)^[33]提出了一种基于稀疏数据的 ANFIS 构造方法,实现 ANFIS 间的插值.该方法首先将待插值的 ANFIS 分解为一组模糊规则,然后以规则簇的形式进行规则插值,利用插值获得的中间规则构造新的 ANFIS.这一方法成功地解决了在数据匮乏时利用 ANFIS 进行推理的问题,它被应用在函数拟合以及一些经典的分类回归任务中.此外,ANFIS 插值方法被用于实现图像超分辨率重建.下面给出这一实际应用案例的结果.

图 9 展示了用于图像超分辨率重建的 ANFIS 插值方法及其对比算法的结果.可以看出,使用原始 ANFIS 得到的图像存在明显的噪声和不清晰的边缘,使用插值后的 ANFIS 可以得到明显的改善.定量性能指标是图像超分辨率重建文献中常用的峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)和结构相似度(Structure Similarity, SSIM).结果在各自图像的底部给出,与图像所示的结论一致.

6 总结与展望

本文综述了基于模糊稀疏规则库的规则插值方



图 9 图像超分辨率重建结果

法. 当输入的观测值未能与规则库中的任何规则匹配时, 传统的基于模糊规则的 CRI 推理方法无法得出合理有效的结论, 在仅有这种稀疏规则库的条件下, 模糊规则插值方法能够进行插值近似推理. 从理论上讲, 它弥补了因规则无法完全覆盖论域而导致不能正确推理的缺陷. 本文首先介绍了基于模糊规则的推理系统中常用的相关概念及符号表示. 在此基础上, 将文献中模糊规则插值算法分为基于 α -截集的和基于中间规则的两大经典类别, 分别介绍了其中具有代表性的方法. 汇总了对模糊规则插值算法评价的常用指标, 对前述代表算法进行了评估与讨论, 并且列举了模糊规则插值方法的实际应用案例, 从理论和应用角度分别评价了模糊插值推理技术在基于模糊规则的推理系统中的价值.

为促进模糊规则插值方法进一步深入发展, 可能需要开展以下工作:

(1) 多维的输入变量在解决实际问题时是一个常见的问题, 文献中有许多模糊规则插值方法能够解决包含多个前件属性的模糊规则的插值推理. 然而, 这些方法在执行时都假定规则中的前件属性对于插值具有同等的重要性. 然而不同的属性通常对决策过程的贡献不同(直观的例子比如决策树), 因此可能导致不准确甚至不正确的插值结果出现. 尽管已经提出一些方法^[14,38,88-89,100,121] 对不同的前件属性赋予不同的权重, 并且将其用于对插值推理过程进行加权处理, 但这些方法仍然存在权重学习算法复杂, 对模糊规则插值方法加权不够合理等问题. 这将是多输入系统的一个重点研究方向.

(2) 近年来出现有将模糊规则插值扩展到模糊集合的衍生拓展集合上的算法研究, 比如前文表 1 中属于第一大类的基于区间值 II-型模糊集的算法^[41,51-52] 和基于粗糙-模糊集的算法^[40,54], 以及属于第二大类的基于区间值 II-型模糊集的算法^[41,86] 和基于粗糙-模糊集的算法^[85]. 这两类模糊集都是对不确定知识的高阶表示, 用于更精确的解释和处理模糊系统中存在的不确定性. 尽管这些算法在表示和运算上比基于传统模糊集的规则插值算法具有较高的复杂度, 但它们提供了实现更准确推理的一种有效方案, 因此在某些对精度要求较高的系统中值得深入研究.

(3) 目前大部分提出的模糊规则插值算法都是基于 Mamdani 类型的模糊规则实现的. 最近出现一些算法将传统的基于中间规则的 T-FRI 方法扩展到建立 Takagi Sugeno Kang(TSK)模糊模型的插值推理机制^[33,96]. TSK 模糊推理模型由于其规则后件是由线性函数表示的, 因此在对连续值的预测问题中有很好的应用. 对稀疏模糊 TSK 规则插值方法的研究将会进一步促进模糊插值推理的实际应用.

(4) 模糊规则插值算法能够有效的获得正确合理的插值推理结论的前提条件之一是, 存在 n 条 ($n \geq 2$) 与输入观测值相关的模糊规则作为算法输入. 这 n 条规则一般是从规则库中选择出的与观测值最邻近的. 传统的方法是从整个规则库中与观测值进行相似度计算和选择. 然而模糊规则可能存在分布不均匀的情况, 例如选择出的 n 条规则可能差异很小, 相互之间本身存在很高的相似性, 这将很难反映出规则库的整体情况. 利用这样的 n 条近邻规则对观测值进行插值推理可能产生有偏估计. 选择出的近邻规则是实现模糊规则插值的重要前提和基础, 然而文献中鲜有对近邻规则选取的深入研究, 这也将是下一步探索的方向之一.

(5) “维数灾难”问题一直也是基于模糊规则的推理系统需要解决的重要难题. 系统输入的前件属性增加, 并且与每个前件变量相对应的模糊语义值增多都会提高系统的精度, 但规则库中的模糊规则数量会同时呈指数增长, 从而很大程度上增加了系统的计算复杂性. 模糊分层推理模型为解决该问题提供了一种有效的途径, 它由多层连接的低维模糊系统组成, 使得每个子系统的输入极大的减少. 如何将分层模型与模糊规则插值结合从而实现稀疏规则库上的高效插值推理将十分值得期待.

参 考 文 献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353
- [2] Ross T J. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2005
- [3] Terano T, Asai K, Sugeno M. *Applied Fuzzy Systems*. Boston, USA: Academic Press, 2014
- [4] Zimmermann H. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 2011
- [5] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1973, (1): 28-44
- [6] Mamdani E H, Assilian S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Human-Computer Studies*, 1999, 51(2): 135-147
- [7] Baranyi P Z, Tikk D, Yam Y, et al. A new method for avoiding abnormal conclusion for α -cut based rule interpolation// *Proceedings of the 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference*. Seoul, Korea, 1999: 1383-1388
- [8] Tikk D, Baranyi P. Comprehensive analysis of a new fuzzy rule interpolation method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(3): 281-296
- [9] Kóczy L, Hirota K. Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1993, 9(3): 197-225
- [10] Kóczy L, Hirota K. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases. *Information Sciences*, 1993, 71(1): 169-201
- [11] Burkhardt D G, Bonissone P P. Automated fuzzy knowledge base generation and tuning// *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Diego, USA, 1992: 179-188
- [12] Koczy L T, Hirota K. Size reduction by interpolation in fuzzy rule bases. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B(Cybernetics)*, 1997, 27(1): 14-25
- [13] Tan Y, Shum H, Chao F, et al. Curvature-based sparse rule base generation for fuzzy rule interpolation. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2019, 36(5): 4201-4214
- [14] Chen S-M, Adam S I. Weighted fuzzy interpolated reasoning based on ranking values of polygonal fuzzy sets and new scale and move transformation techniques. *Information Sciences*, 2018, 435: 184-202
- [15] Huang Z, Shen Q. Fuzzy interpolative reasoning via scale and move transformations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(2): 340-359
- [16] Huang Z, Shen Q. Fuzzy interpolation and extrapolation: A practical approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(1): 13-28
- [17] Jin S, Diao R, Quek C, Shen Q. Backward fuzzy rule interpolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22(6): 1682-1698
- [18] Yang L, Chao F, Shen Q. Generalized adaptive fuzzy rule interpolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 25(4): 839-853
- [19] Naik N, Diao R, Shen Q. Dynamic fuzzy rule interpolation and its application to intrusion detection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 26(4): 1878-1892
- [20] Kovács S, Kóczy L T. Approximate fuzzy reasoning based on interpolation in the vague environment of the fuzzy rule base as a practical alternative of the classical CRI// *Proceedings of the 7th International Fuzzy Systems Association World Congress*. Prague, Czech Republic, 1997: 144-149
- [21] Kovacs S, Koczy L T. Approximate fuzzy reasoning based on interpolation in the vague environment of the fuzzy rulebase// *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems*. Budapest, Hungary, 1997: 63-68
- [22] Kovács S, Kóczy L T. The use of the concept of vague environment in approximate fuzzy reasoning. *Fuzzy Set Theory and Applications*, Tatra Mountains Mathematical Publications, Mathematical Institute Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovak Republic, 1997, 12: 169-181
- [23] Bouchon-Meunier B, Delechamp J, Marsala C, et al. Analogy and fuzzy interpolation in the case of sparse rules// *Proceedings of the 2nd International Conference on Soft and Intelligent Computing*. Budapest, Hungary, 1999: 132-136
- [24] Bouchon-Meunier B, Dubois D, Marsala C, et al. A comparative view of interpolation methods between sparse fuzzy rules// *Proceedings of the Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*. Vancouver, Canada, 2001: 2499-2504
- [25] Bouchon-Meunier B, Marsala C, Rifqi M. Interpolative reasoning based on graduality// *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2000 Cat. No. 00CH37063)*. San Antonio, USA, 2000: 483-487
- [26] Jenei S. Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities revisited — An axiomatic approach. *Soft Computing*, 2001, 5(3): 179-193
- [27] Jenei S, Klement E-P, Konzel R. Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities — The multiple-dimensional case. *Soft Computing*, 2002, 6(3-4): 258-270
- [28] Yam Y, Wong M L, Baranyi P Z. Interpolation as mappings between Cartesian spaces// *Proceedings of the International Conference on Intelligent Technologies*. Bangkok, Thailand, 2000: 459-466
- [29] Yam Y, Kóczy L T. Representing membership functions as points in high-dimensional spaces for fuzzy interpolation and extrapolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 761-772
- [30] Yam Y, Kóczy L T. Cartesian representation for fuzzy interpolation// *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, USA, 1998: 2936-2937
- [31] Yam Y, Kóczy L T. Fuzzy interpolation with Cartesian representation and extensibility functions// *Proceedings of the Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*. Vancouver, Canada, 2001: 2852-2857

- [32] Yam Y, Kreinovich V, Nguyen H T. Extracting fuzzy sparse rules by Cartesian representation and clustering//Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Nashville, USA, 2000: 3778-3783
- [33] Yang J, Shang C, Li Y, et al. ANFIS construction with sparse data via group rule interpolation. IEEE Transactions on Cybernetics, DOI: 10.1109/TCYB.2019.2952267
- [34] Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013
- [35] Huang D-M, Tsang E C C, Yeung D S. A fuzzy interpolative reasoning method//Proceedings of the 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Shanghai, China, 2004: 1826-1830
- [36] Ughetto L, Dubois D, Prade H. Fuzzy interpolation by convex completion of sparse rule bases//Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Antonio, USA, 2000: 465-470
- [37] Chang Y-C, Chen S-M, Liao C-J. Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy-rule-based systems based on the areas of fuzzy sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, 16(5): 1285-1301
- [38] Chen S-M, Chen Z-J. Weighted fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on piecewise fuzzy entropies of fuzzy sets. Information Sciences, 2016, 329: 503-523
- [39] Chen S-M, Chang Y-C, Chen Z-J, Chen C L. Multiple fuzzy rules interpolation with weighted antecedent variables in sparse fuzzy rule-based systems. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2013, 27(5): 1359002
- [40] Chen S-M, Cheng S-H, Chen Z-J. Fuzzy interpolative reasoning based on the ratio of fuzziness of rough-fuzzy sets. Information Sciences, 2015, 299: 394-411
- [41] Chen S-M, Lee L-W. Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on interval type-2 fuzzy sets. Expert Systems with Applications, 2011, 38(8): 9947-9957
- [42] Cheng S-H, Chen S-M, Chen C-L. Fuzzy interpolative reasoning based on ranking values of polygonal fuzzy sets and automatically generated weights of fuzzy rules. Information Sciences, 2015, 325: 521-540
- [43] Cheng S-H, Chen S-M, Chen C-L. Adaptive fuzzy interpolation based on ranking values of polygonal fuzzy sets and similarity measures between polygonal fuzzy sets. Information Sciences, 2016, 342: 176-190
- [44] Kovács S. Extending the fuzzy rule interpolation “FIVE” by fuzzy observation//Reusch B, ed. Computational Intelligence, Theory and Applications. Dortmund, Hungary: Springer, 2006: 485-497
- [45] Yang L, Shen Q. Closed form fuzzy interpolation. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 225: 1-22
- [46] Lu Zheng-Ding, Fu Hai-Dong. New approach for interpolative reasoning with multi-dimensional sparse fuzzy rules. Journal of Chinese Computer Systems, 2004, 25(8): 1468-1472 (in Chinese)
(卢正鼎, 符海东. 一种新的多维稀疏规则模糊插值推理方法. 小型微型计算机系统, 2004, 25(8): 1468-1472)
- [47] Wang Tian-Jiang, Lu Zheng-Ding, Li Fan. Fuzzy interpolative reasoning based on geometric similarity. Computer Sciences, 2004, 31(9): 169-171+175 (in Chinese)
(王天江, 卢正鼎, 李凡. 基于几何相似的模糊插值推理. 计算机科学, 2004, 31(9): 169-171+175)
- [48] Hsiao W-H, Chen S-M, Lee C-H. A new interpolative reasoning method in sparse rule-based systems. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 93(1): 17-22
- [49] Wang Tian-Jiang, Lu Zheng-Ding. A linear interpolative reasoning approach under multi-dimensional fuzzy rules. Computer Sciences, 2004, 31(6): 173-176 (in Chinese)
(王天江, 卢正鼎. 多变量规则的线性插值推理方法. 计算机科学, 2004, 31(6): 173-176)
- [50] Zhao Hong-Wen. Fuzzy interpolative reasoning based on “point-slope” in sparse rule base. ShuXue XueXi Yu YanJiu, 2010, (11): 90-91 (in Chinese)
(赵洪文. 稀疏规则条件下的“点-斜”模糊插值推理方法. 数学学习与研究, 2010, (11): 90-91)
- [51] Chen S-M, Barman D. Adaptive weighted fuzzy interpolative reasoning based on representative values and similarity measures of interval type-2 fuzzy sets. Information Sciences, 2019, 478: 167-185
- [52] Chen S-M, Adam S-I. Adaptive fuzzy interpolation based on ranking values of interval type-2 polygonal fuzzy sets. Information Sciences, 2018, 435: 320-333
- [53] Bai Y, Wang D. Calibrate parallel machine tools by using interval type-2 fuzzy interpolation method. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 93: 3777-3787
- [54] Chen S-M, Zou X-Y, Barman D. Adaptive weighted fuzzy rule interpolation based on ranking values and similarity measures of rough-fuzzy sets. Information Sciences, 2019, 488: 93-110
- [55] Chen S-M, Adam S I. Adaptive fuzzy interpolation based on general representative values of polygonal fuzzy sets and the shift and modification techniques. Information Sciences, 2017, 414: 147-157
- [56] Mendel J M, John R I, Liu F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(6): 808-821
- [57] Kóczy L T, Hirota K, Gedeon T D. Fuzzy rule interpolation by the conservation of relative fuzziness. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 2000, 4(1): 95-101
- [58] Koczy L T, Hirota K, Muresan L. Interpolation in hierarchical fuzzy rule bases//Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Antonio, USA, 2000: 471-477

- [59] Kóczy L T, Hirota K. Ordering, distance and closeness of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 59(3): 281-293
- [60] Kóczy L T, Hirota K. Rule interpolation by α -level sets in fuzzy approximate reasoning. *Journal BUSEFAL*, Automne, URA-CNRS, 1991, 46: 115-123
- [61] Vass G, Kalmár L, Kóczy L T. Extension of the fuzzy rule interpolation method//*Proceedings of the International Conference on Fuzzy Sets Theory Applications*. Liptószetmiklós, Czechoslovakia, 1992: 1-6
- [62] Tikk D. Investigation of Fuzzy Rule Interpolation and the Universal Approximator Property of Fuzzy Controllers [Ph. D. dissertation]. Department of Telecommunications and Telematics, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary, 1999
- [63] Yam Y, Baranyi P, Tikk D, Kóczy L T. Eliminating the abnormality problem of α -cut based interpolation//*Proceedings of the 8th IFSA World Congress*. Taipei, China, 1999: 726-766
- [64] Tikk D, Kóczy L T, Moser B. Stability of interpolative fuzzy KH-controllers. Multi-dimensional case//*Proceedings of the Tempus JEP Modify Symposium*. Budapest, Hungary, 1997: 8
- [65] Tikk D, Baranyi P, Yam Y, Kóczy L T. Stability of a new interpolation method//*Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Tokyo, Japan, 1999: 7-9
- [66] Tikk D, Joó I, Kóczy L, et al. Stability of interpolative fuzzy KH controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 125(1): 105-119
- [67] Wong K W, Gedeon T, Tikk D. An improved multidimensional α -cut based fuzzy interpolation technique//*Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence in Science and Technology (AISAT 2000)*. Hobart, Australia, 2000: 16-20
- [68] Wong K W, Tikk D, Gedeon T D, Kóczy L T. Fuzzy rule interpolation for multidimensional input spaces with applications: A case study. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(6): 809-819
- [69] Qian Hao, Tian Yi-Hui, Wang Tao. New method of fuzzy interpolative reasoning based on Guassian-type membership function. *Journal of Liaoning University of Technology (Natural Science Edition)*, 2009, 29(2): 136-140 (in Chinese)
(钱皓, 田一慧, 王涛. 基于高斯型隶属函数新的模糊插值推理方法. *辽宁工业大学学报(自然科学版)*, 2009, 29(2): 136-140)
- [70] Li Xia, Li Rui-Hua, Shi Yan. Fuzzy interpolative-type reasoning method using width of membership function. *Computer Engineering and Applications*, 2011, 47(11): 139-141 (in Chinese)
(李霞, 李瑞华, 石岩. 利用隶属函数宽度的模糊插值推理方法. *计算机工程与应用*, 2011, 47(11): 139-141)
- [71] Bouchon-Meunier B, Valverde L. A fuzzy approach to analogical reasoning. *Soft Computing*, 1999, 3(3): 141-147
- [72] Turksen I B, Zhao Zhong. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1988, 18(6): 1049-1056
- [73] Wu Z, Masaharu M, Shi Y. An improvement to Kóczy and Hirota's interpolative reasoning in sparse fuzzy rule bases. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1996, 15(3): 185-201
- [74] Baranyi P, Gedeon T D, Kóczy L T. A general method for fuzzy rule interpolation; Specialized for crisp triangular and trapezoidal rules//*Proceedings of the EUFIT'95*. Aachen, Germany, 1995: 99-102
- [75] Baranyi P, Gedeon T D, Kóczy L T. Rule interpolation by spatial geometric representation//*Proceedings of the IPMU*. Granada, Spain, 1996: 483-488
- [76] Baranyi P, Kóczy L T. Multidimensional fuzzy rule inter-and extrapolation based on geometric solution//*Proceedings of the 7th International Power Electronics and Motion Control Conference*. Budapest, Hungary, 1996: 443-447
- [77] Baranyi P, Kóczy L T, Gedeon T D. A generalized concept for fuzzy rule interpolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(6): 820-837
- [78] Baranyi P, Gedeon T D, Kóczy L T. A general interpolation technique in fuzzy rule bases with arbitrary membership functions//*Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Information Intelligence and Systems. Beijing, China, 1996: 510-515
- [79] Baranyi P, Mizik S, Kóczy L T, et al. Fuzzy rule base interpolation based on semantic revision//*Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. San Diego, USA, 1998: 1306-1311
- [80] Baranyi P, Kóczy L T. A general and specialized solid cutting method for fuzzy rule interpolation. *Journal BUSEFAL*, URA-CNRS, Université Paul Sabatier, 1996: 13-22
- [81] Kawaguchi M F, Miyakoshi M. A fuzzy rule interpolation technique based on bi-splines in multiple input systems//*Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Antonio, USA, 2000: 488-492
- [82] Kawaguchi M F, Miyakoshi M. Fuzzy spline functions and nonlinear interpolation of if-then rules//*Proceedings of the International Conference on Soft Computing*. Alberta, Canada, 2000: 785-792
- [83] Kawaguchi M F, Miyakoshi M. Fuzzy spline interpolation in sparse fuzzy rule bases. *A New Paradigm of Knowledge Engineering By Soft Computing*. Singapore, 2001: 95-120
- [84] Kawaguchi M F, Miyakoshi M, Kawaguchi M. Linear interpolation with triangular rules in sparse fuzzy rule bases//*Proceeding of the IFSA World Congress*. Prague, Czech Republic, 1997: 138-143
- [85] Chen C, Parthalán N M, Li Y, et al. Rough-fuzzy rule interpolation. *Information Sciences*, 2016, 351: 1-17

- [86] Chen C, Shen Q. Transformation-based fuzzy rule interpolation using interval type-2 fuzzy sets. *Algorithms*, 2017, 10(3): 91, 20
- [87] Jin S, Peng J, Li Z, Shen Q. Backward fuzzy rule interpolation. *Information Sciences*, 2020, 506: 99-112
- [88] Li F, Li Y, Shang C, Shen Q. Fuzzy knowledge-based prediction through weighted rule interpolation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(10): 4508-4517
- [89] Li F, Shang C, Li Y, et al. Fuzzy rule based interpolative reasoning supported by attribute ranking. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(5): 2758-2773
- [90] Shen Q, Yang L. Generalisation of scale and move transformation-based fuzzy interpolation. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2011, 15(3): 288-298
- [91] Yang L, Shen Q. Adaptive fuzzy interpolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, 19(6): 1107-1126
- [92] Das S, Chakraborty D, Kóczy L T. Linear fuzzy rule base interpolation using fuzzy geometry. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2019, 112: 105-118
- [93] Jin S, Shen Q, Peng J. Transformation based backward fuzzy rule interpolation with multiple missing antecedent values. *Backward Fuzzy Rule Interpolation*. Singapore: Springer, 2019: 75-89
- [94] Li F, Shang C, Li Y, Shen Q. Feature ranking-guided fuzzy rule interpolation//Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems(FUZZ-IEEE). Naples, Italy, 2017: 1-6
- [95] Li F, Li Y, Shang C, Shen Q. Improving fuzzy rule interpolation performance with information gain-guided antecedent weighting. *Soft Computing*, 2018, 22(10): 3125-3139
- [96] Chen T, Shang C, Yang J, et al. A new approach for transformation-based fuzzy rule interpolation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(12): 3330-3344
- [97] Li Y-M, Huang D-M, Zhang L-N. Weighted fuzzy interpolative reasoning method//Proceedings of the 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou, China, 2005: 3104-3108
- [98] Chen S-M, Ko Y-K. Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on α -cuts and transformations techniques. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(6): 1626-1648
- [99] Chen S-M, Ko Y-K, Chang Y-C, Pan J S. Weighted fuzzy interpolative reasoning based on weighted increment transformation and weighted ratio transformation techniques. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(6): 1412-1427
- [100] Li F, Shang C, Li Y, et al. Interpolation with just two nearest neighbouring weighted fuzzy rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(9): 2255-2262
- [101] DeKleer J. An assumption-based TMS. *Artificial Intelligence*, 1986, 28(2): 127-162
- [102] Fu X, Shen Q. Fuzzy compositional modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(4): 823-840
- [103] Ding L, Shen Z, Mukaidono M. A new method for approximate reasoning//Proceedings of the 13th International Symposium on Multiple-Valued Logic. Guangzhou, China, 1989: 179-185
- [104] Ding L, Shen Z, Mukaidono M. Revision principle for approximate reasoning, based on linear revising method//Proceedings of the 2nd International Conference on Fuzzy Logic and Neural Networks(Iizuka'92). Iizuka, Japan, 1992: 305-308
- [105] Mukaidono M, Ding L, Shen Z. Approximate reasoning based on revision principle//Proceedings of the NAFIPS'90. Toronto, Canada, 1990: 94-97
- [106] Shen Z, Ding L, Mukaidono M. Methods of revision principle //Proceedings of the 5th IFSA World Congress. Seoul, Korea, 1993: 246-249
- [107] Shen Z, Ding L, Mukaidono M. Fuzzy resolution principle //Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Multiple-Valued Logic. Palma de Mallorca, Spain, 1988: 210-215
- [108] Tikk D, Johanyák Z C, Kovács S, Wong K W. Fuzzy rule interpolation and extrapolation techniques: Criteria and evaluation guidelines. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2011, 15(3): 254-263
- [109] Johanyák Z C, Kovács S. Survey on various interpolation based fuzzy reasoning methods. *Production Systems and Information Engineering*, 2006, 3(1): 39-56
- [110] Kovács S, Kóczy L T. Application of an approximate fuzzy logic controller in an AGV steering system, path tracking and collision avoidance strategy. *Fuzzy Set Theory and Applications*, Tatva Mountains Mathematical Publications, Mathematical Institute Slovak Academy of Sciences, 1999, 16: 456-467
- [111] Vincze D, Kovács S. Using fuzzy rule interpolation based automata for controlling navigation and collision avoidance behaviour of a robot//Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Computational Cybernetics. Stara Lesn, Slovakia, 2008: 79-84
- [112] Kovács S, Kóczy L T. Application of interpolation-based fuzzy logic reasoning in behaviour-based control structures//Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE Cat. No. 04CH37542). Budapest, Hungary, 2004, 3: 1543-1548
- [113] Bartók R, Vászárhelyi J. Fuzzy rule interpolation based object tracking and navigation for social robot//Jármai K, Bolló B, eds. *Vehicle and Automotive Engineering 2 (VAE 2018)*. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75677-6_31
- [114] Naik N, Diao R, Shang C, et al. D-FRI-WinFirewall: Dynamic fuzzy rule interpolation for windows firewall//Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on

Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). Naples, Italy, 2017: 1-6

[115] Li F, Shang C, Li Y, Shen Q. Interpretable mammographic mass classification with fuzzy interpolative reasoning. Knowledge-Based Systems, 2020, 105279(191): 1-13

[116] Nagy S, Sziová B, Kóczy L T. The effect of image feature qualifiers on fuzzy colorectal polyp detection schemes using KH interpolation-towards hierarchical fuzzy classification of coloscopic still images//Proceedings of the 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). Rio de Janeiro, Brazil, 2018: 1-7

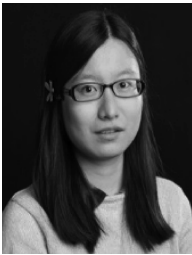
[117] Jin S, Peng J, Xie D. A new MapReduce approach with dynamic fuzzy inference for big data classification problems. International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence, 2018, 12(3): 40-54

[118] Wong K W, Gedeon T D. Petrophysical properties prediction using self-generating fuzzy rules inference system with modified alpha-cut based fuzzy interpolation//Proceedings of the 7th International Conference of Neural Information Processing ICONIP (2000). Taejon, Korea, 2000: 1088-1092

[119] Berecz A. Fuzzy rule interpolation based tool life modeling using RBE-SI and FRIPOC//Proceedings of the 2009 5th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics. Timisoara, Romania, 2009: 11-16

[120] Johanyák Z C. Student evaluation based on fuzzy rule interpolation. International Journal of Artificial Intelligence, 2010, 5(A10): 37-55

[121] Chen S-M, Chang Y-C. Weighted fuzzy rule interpolation based on GA-based weight-learning techniques. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 19(4): 729-744



LI Fang-Yi, Ph. D. Her research interests include fuzzy interpolative reasoning, machine learning, and image classification.

LI Ying, Ph. D., professor. Her research interests include image processing, computation intelligence, and signal processing.

YANG Jing, Ph. D. candidate. Her research interests include fuzzy system, deep learning.

Background

This paper addresses the challenging problem of fuzzy rule interpolation (FRI), in the area of computational intelligence in general and that of fuzzy systems in particular. FRI deals with intelligent approximate reasoning with imprecisely described sparse knowledge. It has become a maturing research topic, with a wide range of theoretical approaches proposed over the past three decades, involving different practical applications. Whilst a diversity of FRI algorithms have been developed there lacks a systematic introduction to

this important topic in the literature. This paper presents a survey of representatives of seminal and state-of-the-art FRI techniques, offering a comparative overview of the underlying approaches in a unified presentational framework.

This work is funded by the National Natural Science Foundation of China (No. 61871460), the Shannxi Provincial Key R&D Program (No. 2021KWZ03), and the New Generation of Artificial Intelligence Major Project of the Ministry of Science and Technology of China (No. 2020AAA0106900).