

用平面六边形割角的细分曲面生成方法

韩 臻

(北京交通大学 计算机科学与技术学院 北京 100044)

摘 要 平面六边形是一种更契合自然并具有独特优点的多边形,找到一种方便实用的平面六边形细分格式是细分曲面研究领域中的基础工作之一.本文提出了一种平面六边形细分方法,对任意初始凸多面体网格,只用平面六边形进行割角细分,可以使得细分曲面光滑、保凸、具有插值性质,且细分过程中新增的面片都是平面六边形.我们将该方法简称为平面蜂窝细分.论文给出了平面蜂窝细分的拟线性四点格式几何规则及其细分矩阵,其几何意义直观,相应的算法简单、可行且数值稳定.论文分析了细分曲面的收敛性和光滑性,给出了 C^1 光滑性条件及其证明.为了提高细分曲面的光滑性,传统的方法是使边数不同的多边形面片按等比例收缩,该方法对于平面蜂窝细分没有预期效果并且无法处理三角形特殊面;论文给出了一种新方法,获得的割角参数使得细分曲面更加光滑,且可以统一处理三角形、四边形等特殊面,从而避免特殊点/面带来的局限性.论文还提出了平面蜂窝细分方法的一种推广和一种自然边界处理方法,并讨论了平直边界和退化情形下尖锐特征生成的方式,可用于细分任意可定向初始网格.文中给出了一些细分曲面的例子,并与经典的细分方法进行了比较,验证了新方法的有效性和具有的优点.

关键词 细分曲面;六边形网格;平面六边形;保凸;割角;割角参数;特殊点/面

中图法分类号 TP391 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2024.01615

A Method of Generating Subdivision Surfaces with Planar Hexagon Corner-Cutting

HAN Zhen

(School of Computer Science & Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract Research on subdivision surfaces has achieved significant results and has been applied in various fields, such as smooth surface modeling in animation and architectural geometric design. Among them, constructing various feasible subdivision schemes is a fundamental work in the research of subdivision surfaces. Hexagon is a polygon that is more compatible with a nature and elegant appearance. Some scholars have proposed subdivision schemes based on hexagons. But, these hexagon-based subdivision schemes either have poor smoothness and computational complexity or produce non-coplanar vertices in the facet. There are also problems of discontinuity, self-intersection, or inability to subdivide at extraordinary points/faces, especially triangular facets. However, the planarity of the mesh faces is as important as smoothness in some applications, for example in architecture. It is worth looking forward to a convenient planar hexagonal subdivision scheme. On the other hand, the construction of subdivision curves can be perfectly summarized as a sequence of corner cutting operations, which is geometrically intuitive, flexible, convex-preserving, and computationally stable. The non-uniform corner cutting subdivision curve method proposed by Gregory and Qu (referred to as the G-Q algorithm) is a classic method. With this method, for any initial polyline on the plane, by sequentially cutting all

the corners formed by the polyline (the cutting parameters satisfy the corresponding smoothness conditions), a C^1 smooth limit curve can be obtained. Each segment of the initial polyline has a point preserved on the limit curve, and the tangent line of the limit curve at that point is the initial polyline at that point. This method can be extended to describe the generation of spatial surfaces as follows: for any convex polyhedron in space, by sequentially cutting all the corners of the polyhedron, a C^1 smooth limit surface can be obtained. Each initial face has a point preserved on the limit surface, and the tangent plane of the limit surface at that point is the initial face at that point. However, no method has yet achieved this generalization. In this paper, we propose a planar hexagonal subdivision scheme called Planar Honeycomb Subdivision (PHS) for any convex polyhedral. Through only corner-cutting by planes, PHS can generate interpolatory and convexity preserving smooth surfaces, and every new facet produced in the subdivision procedure is a planar hexagon. We present PHS's quasilinear four-point scheme and its subdivision matrix with an obvious geometric significance. The algorithm is simple, viable, and stable. We analyze PHS's convergence and smoothness, give the conditions for generating C^1 surfaces and its proof. We observed that the conventional method using a constant shrinking rate of the polygons is ineffective to generate smoother surfaces for PHS and put forward a new idea to determine the corner-cutting parameters with the unified form. The new method is effective even for triangles and refrains from the peculiarities due to the extraordinary faces/vertices. We also give methods for generating a natural boundary or a flat boundary, generalize PHS to arbitrary orientable topology meshes, and discuss a method for generating sharp features in degenerate polygons. In the paper, there are several examples compared with the classical subdivision surfaces. The results show that the new method is valuable and possesses some advantages.

Keywords subdivision surface; hexagonal meshing; planar hexagon; convexity preserving; corner-cutting; corner-cutting parameters; extraordinary vertices/faces

1 引 言

细分曲面的研究已经有很多成果,并应用到了很多领域,例如:动画中的光滑曲面建模^[1]、建筑中的建筑几何设计^[2]等.其中,构造各种可行的细分格式是细分曲面研究的一项基础性工作.

一些经典的细分格式,例如,基于四边形网格的 Catmull-Clark 细分^[3]和 Doo-Sabin 细分^[4],基于三角形网格的 Loop 细分^[5]、蝶形细分^[6]和 $\sqrt{3}$ 细分^[7]等,拓扑和几何规则清晰直观,除了在其相应的特殊点或特殊面^①附近需要特殊处理、形状不易控制之外^[8],方法简单易行.

六边形是一种更契合自然并具有独特优点的多边形^[9,10],已有学者提出了一些基于六边形的细分格式^[11,12,9].但这些六边形细分格式或者存在光滑性较差、计算复杂,或者细分产生的六边形的顶点不共面等缺陷.在特殊点/面,特别是三角形特殊面处,

存在不连续、自交叉或不能细分等问题.然而,网格面片的平面性与曲面的光滑性在一些应用中都非常重要.例如,在建筑几何设计中,拼接曲面的小面片通常都需要是平面的.

另一方面,细分曲线的构造可以完美地归结为逐次割角操作,几何上非常直观灵活、保凸且计算稳定^[13-19].Gregory 和 Qu 在文献^[16]中提出的非一致割角细分曲线方法是其中的经典方法(简称 G-Q 算法),该方法对于平面上任意的初始折线段,仅通过逐次割去折线形成的所有角(割角参数满足相应的光滑性条件),就能获得 C^1 光滑的极限曲线,每一段初始折线上存在一个点保留在极限曲线上,极限曲线在该点的切线就是该点所在初始折线.该方法推广到空间曲面生成的问题描述如下:对于空间中的任意凸多面体,仅通过逐次割去凸多面体的所有

① 特殊点/面(extraordinary vertices and faces)是相对于规则点/面而言的,也叫做“奇异点/面”或“不规则点/面”.

角而获得 C^1 光滑的极限曲面,每一个初始面片上存在一点保留在极限曲面上,极限曲面在该点的切平面就是该点所在初始面片.然而,尚没有一种方法实现了这一推广.

本文给出了一种几何直观的平面六边形割角细分曲面方法,称为平面蜂窝细分方法(Planar Honeycomb Subdivision, PHS),实现了对 G-Q 算法的上述推广.对于初始凸多面体网格,该方法逐次细分产生的新面片都是六边形,并且其六个顶点共面.新方法比已有的平面六边形细分方法光滑性好,且计算量减少了一半以上.

我们给出了平面蜂窝细分方法的几何规则,详细分析了规则的几何意义,并将规则用一种拟线性的空间四点格式统一表示,给出了相应的细分矩阵.分析并证明了平面蜂窝细分方法的收敛性和 C^1 光滑性条件.

为了提高细分曲面的光滑性,传统的做法是使不同边数的 n 边形面片的收缩比例 σ_n 都取相同的值(例如,对于基于六边形的细分方法,收缩比例一般是 $\sigma_6 = 1/3$),使得细分时各面片的收缩速度保持一致.这一方法对于平面蜂窝细分是无效的,特别是对于三角形面片是绝对无效的(当要求 $\sigma_3 = 1/3$ 时,细分曲面的连续性和 C^1 光滑性遭到破坏),这也是基于六边形的细分方法在处理三角形特殊面片时一直存在的问题.我们发现了一种有效的新方法:产生 n 边形新顶点的割边比例参数 $u_{(n)}$ 取值保持一致,可以提高细分曲面的光滑性.新方法对所有的 n 边形,包括三角形,都可以确定出有效的参数,从而避免了特殊点/面导致的局限性.

本文还给出了平面蜂窝细分方法的一种推广,同时给出了一种基于边界面的自然边界处理方法,并讨论了平直边界和退化情形下尖锐特征生成的方式,可用于细分任意的可定向拓扑网格.

文中给出了平面蜂窝细分方法的一些细分例子,分别与基于六边形、四边形和三角形的典型细分方法进行了比较,验证了新方法的有效性和具有的一些优点.

2 六边形细分曲面的相关工作

基于六边形的细分方法,其规则顶点的价^①为 3,规则面为六边形.任意初始凸多面体网格顶点的价一般各不相同(≥ 3),类似于文献[9]中的网格转换方法,对所有价不为 3 的顶点可以作一次平面割

角(不割去边)预处理,就能得到顶点价全为 3 的凸多面体,并可尽量保留期望的网格模型形状.割角后,对应一个 n 价顶点产生一个平面 n 边形新面;新增 n 个价 3 顶点,去掉了原 n 价顶点;与其相邻的各面边数增加 1,其余不相邻的面不变.割角的具体大小,会影响曲面的局部形状,但预处理只需开始时做一次,不影响后面的逐次细分过程,相对自由的选择可以使得交互设计时有更多的灵活性.

对于任意的可定向拓扑网格,如果不要求多边形是平面多边形,也可以类似处理得到顶点价为 3 的网格(有边界时,边界上的顶点价可以为 2).

所以,我们假设初始网格顶点价都是 3,但初始面片的边数可以任意.基于六边形的细分方法,除了初始多边形面片收缩而成的新面片边数不变之外,其他新产生的面片都是六边形.

已有的六边形细分格式主要有两类.文献[20]把这两类方法分别称为保凸细分(convexity-preserving subdivision)和蜂窝细分(honeycomb subdivision),其细分的拓扑规则分别如图 1(b)和(c)所示,其中(b)(c)中的虚线表示初始网格.

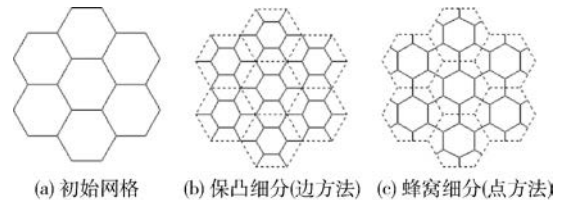


图 1 六边形细分的两种拓扑规则^[20]

保凸细分方法以 1 分 4 的方式进行逐次细分,如图 1(b)所示,将 1 个初始六边形细分成 4 个小六边形(图 1(b)中的实线六边形),其中没有虚线穿过的 1 个小六边形由原六边形收缩而成,可称为“面-面”,另外 3 个由 6 个小的半边六边形(由虚线分割成的四边形)与相邻的另外半边六边形拼合而成,或者说,是以原六边形的每条边(图 1(b)的虚线边)产生一个小六边形,可称为“边-面”.蜂窝细分方法则是以 1 分 3 的方式细分,除了中间收缩而成的小六边形外,另外 2 个由 6 个小六边形的 $1/3$ 部分拼合而成,或者说,是以原六边形的每个顶点(图 1(c)的虚线网格顶点)产生一个小六边形,可称为“点-面”.本文按照这两类拓扑规则的特点分别简称之为“边方法”和“点方法”.

① 顶点的价(valances of vertices)是该顶点连接的其他顶点数(即含该顶点的边数),也叫做“顶点的度数”.

2.1 边方法

文献[11]最早提出了一种边方法,也是最早的一种六边形细分格式.对于初始凸多面体网格,其几何规则简述如下:

(1)过每条边 E 作一平面 F_E ,其法向是该边相邻两面法向的平均值;

(2)对应原 n 边形面 F ,由(1)产生的 n 个面相交产生一个多面体 Δ ,找到该多面体在 F 之外离 F 最近的顶点,作该顶点与 F 的垂线,过其中点作 F 的平行面,与多面体 Δ 相交得到细分后的 n 边形新面-面;

(3)平面 F_E 上边 E 的两个端点,其相邻的两个新面-面在 F_E 上各有 2 个顶点,这 6 个点构成一个六边形新边-面.

该方法保凸,细分产生的新边-面都是共面六边形,并且初始顶点都在细分曲面上.但是,其规则(2)中的计算复杂,而且,在多次细分后, n 个平面的法向趋近相同,数值稳定性不好.文献[11]的方法及其一些改进方法都不能避免这些缺点.该方法生成的极限细分曲面还会存在平面面片或线段,文献[21]研究了该问题及一些改进方法.

文献[22]提出了一种 Hermite 型的边方法.对于任意凸多面体(顶点的价都是 3),看作是极限细分曲面的切平面包络,称为控制网格(如图 2(a)所示).在每一个多边形面片 F 内部取一点 P ,连接控制网格中每 3 个相邻面的 P 点形成对偶的三角形网格,称为插值网格(如图 2(b)中的三角形实线所示),点 P 是极限细分曲面的插值点.

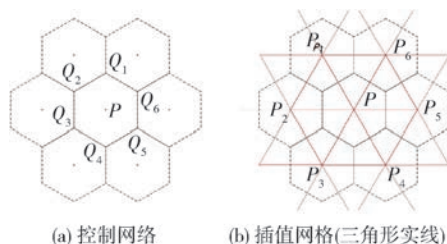


图 2 控制网格(a)和插值网格(b)示意图

Hermite 型边方法是 Hermite 细分曲线^[18]的一种推广,其几何规则如下:

(1)如图 3(a)所示,对应原 n 边形面 F ,设其顶点为 Q_j ,则细分后的新面-面的第 j 个顶点 q_j 由下式计算得到:

$$q_j = \alpha Q_j + (1 - \alpha)P, \text{ 其中 } \frac{1}{3} < \alpha < 1.$$

细分后,面上的插值点 P 保持不变;

(2)如图 3(b)所示,对应原顶点 Q_1 ,其相邻 3 个面片得到的新面-面分别记为 $[q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6]$ 、 $[q_{11} q_{12} q_{13} q_{14} q_{15} q_{16}]$ 和 $[q_{21} q_{22} q_{23} q_{24} q_{25} q_{26}]$.因为,边 $q_1 q_2$ 和 $q_{24} q_{25}$ 都平行于 $Q_1 Q_2$,所以 $q_1 q_2$ 和 $q_{24} q_{25}$ 共面,记该平面为 $(q_2 q_1 q_2 q_5 q_{24})$.平面 $(q_2 q_1 q_2 q_5 q_{24})$ 、 $(q_1 q_6 q_1 q_4 q_{13})$ 和 $(q_{13} q_{12} q_2 q_6 q_{25})$ 的交点 Q_1' 就是替代 Q_1 的新顶点,则平面六边形 $[q_2 q_1 Q_1' q_{25} q_{24} Q_2']$ 就是细分后对应原边 $Q_1 Q_2$ 的新边-面;

(3)在平面四边形 $[q_2 q_1 q_{25} q_{24}]$ 内部任意取一点作为新边-面 $[q_2 q_1 Q_1' q_{25} q_{24} Q_2']$ 的插值网格顶点.

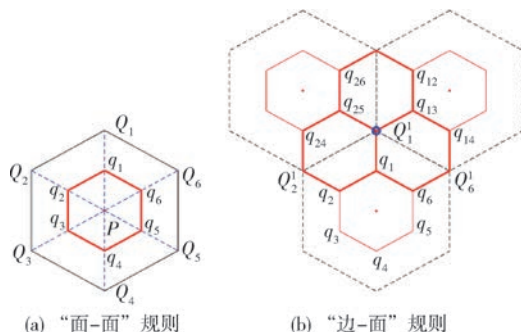


图 3 Hermite 型边方法几何规则示意图

Hermite 型边方法也保凸,细分产生的新边-面也都是共面六边形.其计算比^[11]简单,更容易实现相对稳定的三平面求交算法,几何直观上是一种纯粹的割边算法.细分过程中选择的插值点最终都在细分曲面上,插值点形成的细分网格是三角形网格,很方便交互设计中的形状控制.相应的控制网格面片是插值点上的切面,形成六边形网格(除了初始多面体的固定数量的其他多边形之外).但是,由于特殊点/面的影响,例如正四面体初始网格,固定参数的细分过程中会产生控制网格重叠甚至自交叉的问题^[23].文献[23]提到,可以在初始阶段对特殊的多面体顶角选择合适的割角操作,或者在细分过程中采用合适的非定常参数,来避免重叠或自交叉.

另有一类边方法,放弃了共面的要求.例如,文献[24]提出了一种基于三次半盒样条的边方法,其几何规则如下:

(1)如图 4(a)所示,对应原六边形 F ,设其顶点为 Q_j ,则细分后的新面-面的第 j 个顶点 q_j 由下式计算得到:

$$q_j = \frac{1}{2}Q_j + \frac{1}{8}(Q_{j-1} + Q_{j+1} + Q_{j-2} + Q_{j+2}),$$

其中下标 j 按 $mod(6)$ 计算;

(2)如图 4(b)所示,对应原顶点 Q_1 ,细分后得到的松弛控制点 Q_1' 由下式计算:

$$Q_1^1 = \frac{1}{4}(Q_1 + Q_2 + Q_6 + Q_{12}),$$

则空间六边形 $[q_2 q_1 Q_1^1 q_{25} q_{24} Q_2^1]$ 就是细分后对应原边 $Q_1 Q_2$ 的新边-面,通常其 6 个顶点不共面.

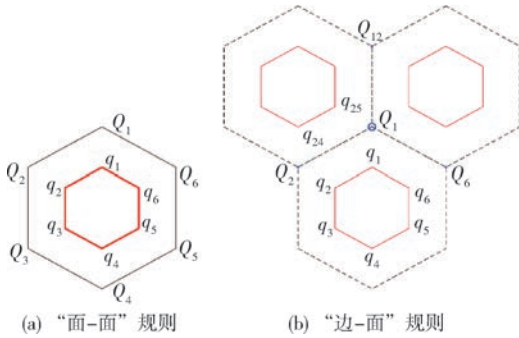


图 4 半盒样条边方法几何规则示意图

文献[25]基于该方法研究了同时考虑对偶三角形网格的 Hermite 细分方法. 文献[26]研究了基于一般半盒样条的这类方法,特别是在特殊面周边的细分情况,指出在三角形和四边形特殊面邻域存在重叠和自交叉的现象,并给出了在初始阶段手动调整细分参数以减缓这种现象的一些经验.

放弃共面要求的这类方法的优点是基于样条,几何规则是线性的,便于计算和实现. 但其缺点也很明显,细分产生的新六边形一般不是平面的,不保凸,细分曲面可能存在非期望的皱褶,影响其光滑性,特别是在特殊区域附近这个问题更为突出.

2.2 点方法

点方法,在几何上可以看作是割角细分,尽管大多数方法产生的“割面”不是平面多边形. 对于价全为 3 的初始多面体,它们的几何规则通常比边方法要简单,只需给出原多边形内收缩的新面-面顶点的几何规则即可,如图 5(a)所示,多边形 $[q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6]$ 就是新面-面,如果对应的原面-面是平面的,则新面-面亦是,否则就不是平面的. 依次连接原顶点相邻的 6 个新顶点(分属相邻的 3 个新面-面)就形成了新点-面,如图 5(b)所示,六边形 $[q_1 q_6 q_{13} q_{12} q_{25} q_{24}]$ 就是对原顶点 Q_1 的新点-面,新点-面全是六边形,但通常不是平面的.

文献[9]提出了一种规则简单的点方法,其几何规则如下:

(1)对应原六边形 F ,设其顶点为 Q_j ,如图 6(a)所示,则细分后新面-面的第 j 个顶点 q_j 由下式计算得到

$$q_j = a(Q_j + Q_{j+1}) + b(Q_{j-1} + Q_{j+2}) + c(Q_{j-2} + Q_{j+3}),$$

其中 $2a + 2b + 2c = 1$,下标 j 按 $mod(6)$ 计算. 对于正六边形,为了保持对称性,应取 $c = a - 1/3$;为了有较好的光滑性,可以取如下的一组参数: $a = \frac{7}{18}$,

$b = c = \frac{1}{18}$. 若引入六边形的质心 M ,则 q_j 可以由 Q_j, Q_{j+1} 和 M 的加权平均表示;

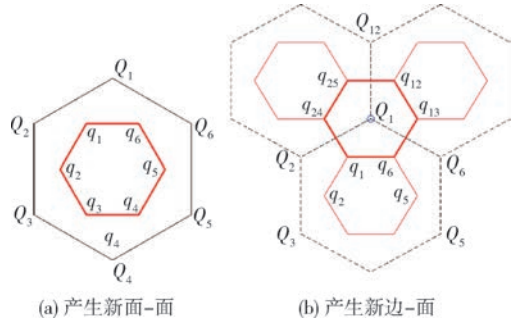


图 5 点方法细分示意图

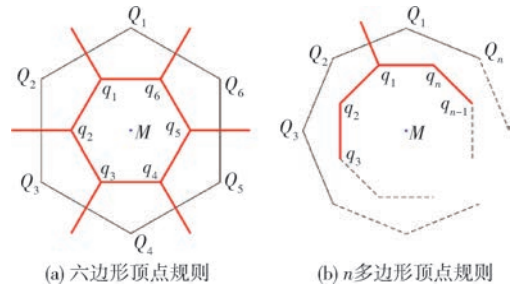


图 6 文献[9]点方法几何规则示意图

(2)对应 $n(n \neq 6)$ 边形特殊面 nF ,设其顶点为 Q_j ,如图 6(b)所示, M 是 nF 的质心点,则细分后的第 j 个新顶点 q_j 由下式计算得到:

$$q_j = \omega \frac{Q_j + Q_{j+1}}{2} + (1 - \omega)M$$

其中 $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}\cos(\pi/n)}$,下标 j 按 $mod(n)$ 计算.

该方法除了产生的点-面不是平面的缺点之外,对于特殊面,特别是 $n=3$ 的时候,细分曲面会产生尖点、褶皱或自交叉.

文献[12]提出了一种称为蜂窝细分的点方法,对于每个多边形面片,引入了一个面中心控制点 V ,当它取质心 M 时就等价文献[9]的方法. 蜂窝细分因此可以看作是文献[9]这类方法的推广,其几何规则如下:

(1)对应原 n 边形 F ,设其顶点为 Q_j ,则细分后新面-面的第 j 个新顶点 q_j 由下式计算得到:

$$q_j = b_n \frac{Q_j + Q_{j+1}}{2} + (1 - b_n)V, \text{其中 } b_n \in [0, 1]$$

为了对称性,可取 $b_n = 2/3$;

(2) 细分后新面-面的面中心控制点 V^1 由下式计算:

$$V^1 = a_n M + (1 - a_n) V, \text{ 其中 } a_n \in [0, 1]$$

类似于 $\sqrt{3}$ 细分,可取 $a_n = (4 - \cos(2\pi/n))/9$;

(3) 细分后对应原价为 m 的顶点 Q_1 的新点-面的面中心控制点 V_1^1 由该顶点及其相邻的 m 个顶点 q_{1i} 和 m 个面的中心控制点 V_{1i} 加权平均计算得到:

$$V_1^1 = (1 - c_m) Q_1 + c_m \sum_{i=1}^m (\alpha_i Q_{1i} + \beta_i V_{1i});$$

其中 $c_m, \alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) = 1$, 可取

$$\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2m}, c_m \text{ 用以调节极限曲面的形状.}$$

蜂窝细分曲面产生的新点-面一般也不是平面的,特殊面的处理比较生硬,而且对中心控制点的选取比较敏感,同样存在褶皱等不光滑的问题.

文献[27]提出了一种称为蜂窝割角细分的点方法.该方法基于 $\sqrt{3}$ 细分,利用射影几何中点和面的对偶关系,将 $\sqrt{3}$ 细分的三角形网格转化为其对偶空间中的六边形网格,前者的顶点(规则情况下价为 6)对应对偶空间中一个六边形,前者的三角形面对应对偶空间中网格的一个顶点(价为 3).在对偶空间中对价为 3 的顶点进行割角,如图 7(a)所示,图中的虚线三角形就是割面,由相邻两个三角形割面相交产生的点 F_m^{1*} 和 F_i^{1*} 就是细分后的顶点(原对偶空间三角形网格的三角形).每个割面三角形上有 6 个这样的交点,形成新点-面,它是一个平面六边形(原对偶空间价为 6 的顶点).

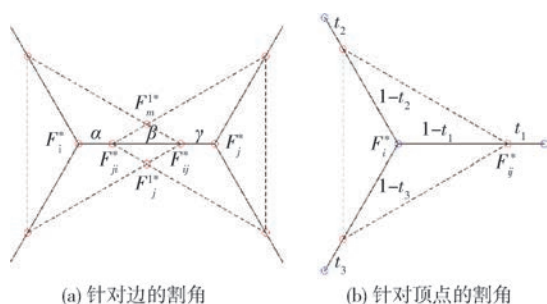


图 7 对偶空间中割角示意图

文献[27]给出了两种细分格式来确定割角三角形.一种是在边 $F_i^* F_j^*$ 上取两点 F_{ij}^* 和 F_{ji}^* 分别作为对应顶点 F_j^{1*} 和 F_i^{1*} 三角形割面的一个顶点,如图 7(a)所示,这两点把所在边分为三段,其比例记为 α, β, γ , 满足 $\alpha + \beta + \gamma = 1$.另一种格式,对应顶点 F_i^{1*} , 三角形割面的三个顶点分别在三条边上按比例参数

t_1, t_2, t_3 确定,如图 7(b)所示,取 $t = t_1 = t_2 = t_3$ ($t \in (0, 0.5)$), 则割面平行于与 F_i^* 相邻的 3 个原顶点构成的面,记 $deg_F(F_i^*)$ 为顶点 F_i^* 相邻 3 个面的边数最小者,为了顺应 $\sqrt{3}$ 细分按 1/3 比例收缩的性质,当 $deg_F(F_i^*)$ 是 4, 5, 6 时, t 分别取为 $1/\sqrt{6}, 0.23$ 和 0. 该文献给出了用这两种格式选用不同的典型参数的实验结果,得到的细分曲面不大理想,而且当 $deg_F(F_i^*) = 3$ 时,方法会失败.

文献[27]没有分析给出细分后 F_m^{1*} 由 F_i^* 等原顶点恰当表示的细分几何规则,没有给出其细分矩阵,也没能论证蜂窝割角细分的收敛性和光滑性.为了保证细分曲面的光滑性,文献[27]采用了六边形网格蜂窝割角细分与其射影几何对偶空间中的三角形网格 $\sqrt{3}$ 细分相结合的策略,在每 1, 2 次蜂窝割角细分后转换回到对偶三角形网格作 1 次 $\sqrt{3}$ 伞状算法进行磨光.蜂窝割角细分保证细分过程的保凸性, $\sqrt{3}$ 伞状算法通过全局能量优化逐个调整顶点位置来保持凸性和光滑性. $\sqrt{3}$ 伞状算法虽然有较好的曲面形状改善效果,但其计算量大,有时候收敛较慢.给出的实验结果显示,极限曲面形状虽有改善,但仍不够理想.另外,文献[27]也没有充分讨论特殊面,特别是三角形面片的细分规则,这也是导致蜂窝割角细分产生的极限曲面不够理想的另一个主要原因.

3 平面蜂窝细分格式

对于顶点价全为 3 的凸多面体,六边形细分方法只有初始网格存在的固定数量的非六边形面片是特殊面,点方法细分过程中割角产生的新点-面都是六边形.本文认为面才是点方法中几何结构的核心,而不是边或点.文献[27]提出的以边(图 7(a))或者以顶点(图 7(b))选择割角参数的方式,没有充分考虑网格面片的边数对割角参数选择的关键影响.实际上,为保证收敛性和光滑性,对于三角形和四边形这样的非六边形面片来说,割角参数应受到特殊的限制.

作为一种点方法,本文提出的平面蜂窝细分,以面为几何结构核心,合理选取割角参数,并通过构造新顶点由旧顶点拟线性表达的计算公式给出其细分的几何规则.

3.1 平面蜂窝细分的几何规则

对于网格中每个多边形(按右手法则定义方向)

的每一条边引入两个割角参数 $\alpha_{(n_k)j}^{(l)}$ 、 $\beta_{(n_k)j}^{(l)}$, 其中: 上标 (l) 表示第 l 次细分, 下标 (n_k) 表示第 k 个 n 边形, 下标 j 表示 n 边形的第 j 边. 为方便起见, 在没有歧义的情况下: (1) 上标通常被省略, (n_k) 通常简写成 (n) ; (2) 在讨论某个 n 边形的细分时, 割角参数被简写成 α_j, β_j ; (3) 当 n 边形的各边割角参数取相同值时, 割角参数被简写成 $\beta_{(n)}$. 文中其他符号的上下标含义类同.

平面蜂窝细分是一种点方法, 几何规则如下:

(1) 在价全为 3 的凸多面体的每条边上取两点, 分别作为该边两个端点的割角三角形的割角点, 如图 8 所示, 针对平面凸 $n (\geq 5)$ 边形面 F , 设 F 的顶点为 Q_j , 取割角参数 α_j, β_j 满足条件:

$$\alpha_j, \beta_j \in [0, 1), 1 - \alpha_j - \beta_j > 0 \quad (1)$$

则割角点 $E_{j,j\pm 1}$ 可表示为(下标 j 按 $mod(n)$ 计算):

$$\begin{cases} E_{j,j+1} = \beta_j Q_{j+1} + (1 - \beta_j) Q_j \\ E_{j+1,j} = \alpha_j Q_j + (1 - \alpha_j) Q_{j+1} \end{cases} \quad (2)$$

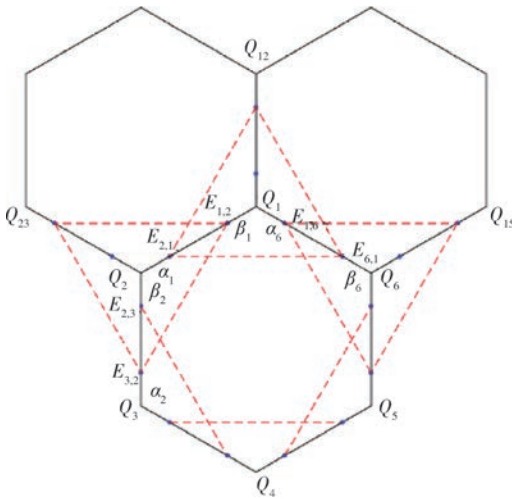


图 8 平面蜂窝细分割角点示意图

(2) 如图 9 和图 10 所示, 设 u_j, v_j 是割边 $E_{j+1,j}E_{j-1,j}$ 和 $E_{j,j+1}E_{j+2,j+1}$ 的交点 q_j 将这两边分割的比例参数, 则细分后新面-面的第 j 个顶点 q_j 由下式计算得到:

$$\begin{aligned} q_j = \frac{1}{2} \{ & [(1 - \beta_{j-1})u_j] \cdot Q_{j-1} + \\ & [\beta_{j-1}u_j + \alpha_j(1 - u_j) + (1 - \beta_j)(1 - v_j)] \cdot Q_j + \\ & [(1 - \alpha_j)(1 - u_j) + \beta_j(1 - v_j) + \alpha_{j+1}v_j] \cdot Q_{j+1} + \\ & [(1 - \alpha_{j+1})v_j] \cdot Q_{j+2} \} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 设空间点 $E_{j,j\pm 1}$ 由其三维坐标列向量表示, 则 u_j, v_j 是下列线性方程组(4)的解:

$$\begin{aligned} (E_{j-1,j} - E_{j+1,j})u_j + (E_{j,j+1} - E_{j+2,j+1})v_j = \\ = (E_{j,j+1} - E_{j+1,j}) \end{aligned} \quad (4)$$

新面-面 $[q_1 q_2 \dots q_n]$ 由细分前的平面 n 边形 F 收缩而成, 保持平面性.

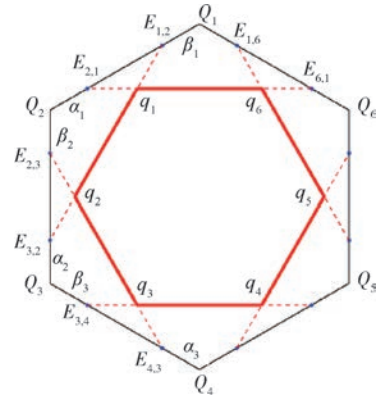


图 9 平面蜂窝细分几何规则示意图

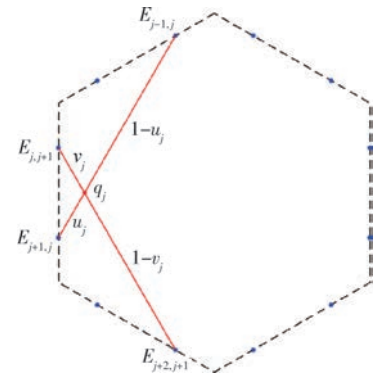


图 10 u_j, v_j 计算示意图

(3) 如第 2.2 节的图 5 所示, 细分后对应原顶点 Q_1 的新点-面是六边形 $[q_1 q_6 q_{13} q_{12} q_{25} q_{24}]$. 如图 8 所示, 该六边形的 6 个顶点在同一个割角三角形上, 所以共面.

由公式(1)的条件可知, 图 10 中的割边分割比例参数 $u_j, v_j \in (0, 1)$, 从而使细分后的新顶点都在原凸多边形的内部.

本方法的几何规则保证了细分过程中产生的所有新面片都是平面多边形, 其所有操作均是用平面割去凸多面体的角. 用平面切割一个凸多面体剩下的一定仍是凸多面体, 所以本方法保凸, 且新增的割角多边形都是平面六边形.

方程组(4)的解存在唯一, 采用数值稳定的全主元消去法可得到数值解. 实际上, 如图 10 所示,

$$\begin{aligned} q_j = u_j E_{j-1,j} + (1 - u_j) E_{j+1,j} \\ = v_j E_{j+2,j+1} + (1 - v_j) E_{j,j+1} \end{aligned} \quad (5)$$

由公式(5)得到关于待定参数 u_j, v_j 的方程组(4).

因为, $E_{j+1,j}, E_{j-1,j}, E_{j,j+1}, E_{j+2,j+1}$ 四点共面, 根据四点共面的充要条件有:

$$\det \begin{pmatrix} E_{j+1,j} & E_{j-1,j} & E_{j,j+1} & E_{j+2,j+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} = 0$$

可以推导出方程组(4)的增广矩阵的行列式也为 0; 又因为 $E_{j+1,j}, E_{j-1,j}, E_{j,j+1}, E_{j+2,j+1}$ 四点不共线, 所以方程组(4)的系数矩阵的秩为 2. 因此, 方程组(4)有唯一解 $u_j, v_j \in (0, 1)$. 根据公式(5), 本文取 q_j 等于其后面两个式子的平均值, 并用公式(2)代入, 就得到细分几何格式(3), 这是一个四点格式.

由公式(3)可得到细分矩阵如下:

$$\mathbf{S}_{(n)} = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s_{3,2} & s_{3,3} & s_{3,4} & s_{3,5} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{n-2,n-3} & s_{n-2,n-2} & s_{n-2,n-1} & s_{n-2,n} \\ s_{n-1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{n-1,n-2} & s_{n-1,n-1} & s_{n-1,n} \\ s_{n,1} & s_{n,2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_{n,n-1} & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} s_{j,j-1} = (1 - \beta_{j-1})u_j \\ s_{j,j} = \beta_{j-1}u_j + \alpha_j(1 - u_j) + (1 - \beta_j)(1 - v_j) \\ s_{j,j+1} = (1 - \alpha_j)(1 - u_j) + \beta_j(1 - v_j) + \alpha_{j+1}v_j \\ s_{j,j+2} = (1 - \alpha_{j+1})v_j \end{cases} \quad (6)$$

$j=1, 2, \dots, n$, 下标按 $\text{mod}(n)$ 计算.

由于 $s_{i,j}$ 依赖 u_j, v_j , 从而依赖于原顶点, 所以, 细分矩阵 $\mathbf{S}_{(n)}$ 的元素一般情况下不是定常的, 但下列等式恒成立:

$$\frac{1}{2}(s_{j,j-1} + s_{j,j} + s_{j,j+1} + s_{j,j+2}) = 1 \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, n; n \geq 5.$$

3.2 四边形和三角形面的几何规则

3.2.1 四边形的几何规则

因为平面蜂窝细分是一种四点格式, 所以四边形的几何规则与公式(3)相同, 其细分矩阵为

$$\mathbf{S}_{(4)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,4} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & s_{3,4} \\ s_{4,1} & s_{4,2} & s_{4,3} & s_{4,4} \end{pmatrix}.$$

其中, $s_{i,j}$ 的计算同公式(6), 恒等式(7)也成立 ($j = 1, 2, 3, 4; n = 4$).

但是, 四边形与 $n(\geq 5)$ 边形相比有如下的特殊性: 当其中一对对角的 4 个割角参数全部为 0 时, 这两个角的割角线重合为四边形的一条对角线, 从而一次细分就把原四边形完全割去, 该四边形直接收缩为线段, 如果另 4 个割角参数也全为 0 的话, 则收缩为一个点. 这时细分过程可以继续, 但细分曲面上会形成线段或尖点.

因此, 需要对割角参数在条件公式(1)的基础上附加一个限制条件: 两对角的 4 个割角参数不能全部为 0, 即

$$\begin{cases} (\beta_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\beta_3)^2 + (\alpha_4)^2 \neq 0 \\ (\beta_4)^2 + (\alpha_1)^2 + (\beta_2)^2 + (\alpha_3)^2 \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

3.2.2 三角形的几何规则

对于三角形面, 细分的割角方法不变, 但由于只有 3 个顶点, 四点细分规则公式(3)中的靠边两点 Q_{j-1} 和 Q_{j+2} 重合, 所以细分规则可由下式表示:

$$q_j = \frac{1}{2} \{ [(1 - \beta_{j-1})u_j + (1 - \alpha_{j+1})v_j] \cdot Q_{j-1} + [\beta_{j-1}u_j + \alpha_j(1 - u_j) + (1 - \beta_j)(1 - v_j)] \cdot Q_j + [(1 - \alpha_j)(1 - u_j) + \beta_j(1 - v_j) + \alpha_{j+1}v_j] \cdot Q_{j+1} \} \quad (9)$$

其中 u_j, v_j 也满足方程组(4), 其细分矩阵为

$$\mathbf{S}_{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} t_{j,j-1} = (1 - \beta_{j-1})u_j + (1 - \alpha_{j+1})v_j \\ t_{j,j} = \beta_{j-1}u_j + \alpha_j(1 - u_j) + (1 - \beta_j)(1 - v_j) \\ t_{j,j+1} = (1 - \alpha_j)(1 - u_j) + \beta_j(1 - v_j) + \alpha_{j+1}v_j \end{cases} \quad j=1, 2, 3, \text{下标按 } \text{mod}(3) \text{ 计算, 成立恒等式:}$$

$$\frac{1}{2}(t_{j,j-1} + t_{j,j} + t_{j,j+1}) = 1.$$

相比于四边形, 三角形更加特殊: 由于三角形面没有对角线, 在割角时很容易一下子把整个面片割去, 破坏保凸性和插值性质, 产生过割角的问题, 导致细分曲面在其局部产生皱褶、空洞或自交叉等缺陷. 所以, 针对三角形面片, 割角参数的选取应有更严格的限制. 这是以往基于六边形细分方法在处理三角形面片时遇到困难且没有讨论清楚的一个根本问题.

从几何直观上看, 该限制就是: 要保证割角后, 原三角形面片内有一个小三角形面没有被割去, 从而保证细分收缩后的三角形新面-面不会退化成线段或一个点, 也不会与相邻的新点-面交叉. 如图 11

(a)所示,该条件可描述为

三角形割角限制条件: 细分后三角形的三条有向边 $\vec{q_j q_{j+1}}$ 分别与有向线段 $\vec{E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}}$ 同向且长度不为 0 ($j=1,2,3$, 下标按 $mod(3)$ 计算)。

根据公式(5),有

$$\vec{q_j q_{j+1}} = (1 - v_j - u_{j+1}) \cdot \vec{E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}},$$

所以,“三角形割角限制条件”等价于:

$$1 - v_j - u_{j+1} > 0, j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

其中下标 j 按 $mod(3)$ 计算。

等价条件公式(10)关于割角参数 α_j, β_j 的限制是隐式的,且与原三角形的顶点相关。不过,虽然是隐式的,却有一些简单的方法能预先选定满足该条件的割角参数。

例如,如图 11(b)所示,取定满足条件公式(1)的 5 个割角参数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 和 β_3 , 则第 3 边上的割角点 $E_{1,3}$ 可选为 $E_{3,1}$ 和 E_* 两点之间的内部点,从而存在对应的 α_3 使得割角满足上述限制条件。

一种简单的常用方法是采用对称割角策略,即取各边的两个割角参数相等: $\alpha_j = \beta_j$ ($j=1,2,3$)。如图 12(a)所示,当三条边上的 β_j 都是 $1/3$ 时,收缩的小三角形新面-面退化为一点,这时细分过程可以继续,但细分曲面上会形成尖点;当 β_j 都小于 $1/3$ 时,就会过割角,面片产生自交叉现象。

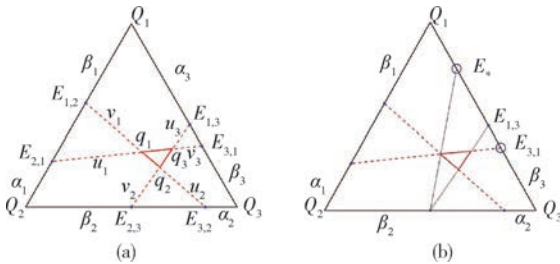


图 11 三角形割角参数选取示意图

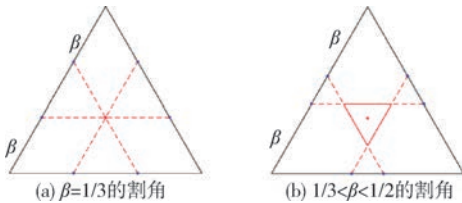


图 12 三角形对称割角策略示意图

另外,根据条件公式(1),要求 $\beta_j \in [0, 1/2)$ 。所以,对称割角策略下(如图 12(b)所示),三角形割角参数满足以下条件:

$$\frac{1}{3} < \beta_{(3_k)_j}^{(D)} < \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (11)$$

时,条件公式(10)成立。

3.3 平面蜂窝细分是割角细分曲线方法的推广

Gregory 和 Qu 提出了一种仅通过将折线的尖角不断割角产生光滑曲线的细分方法^[16],是经典的割角细分曲线方法。本文的平面蜂窝细分方法仅通过将凸多面体的顶点角不断割角而产生光滑曲面,是割角细分曲线方法的推广。

在曲面情形下,考虑细分网格中的任意一个平面凸 n 边形,其边界可以看作平面上的凸折线,如图 13 所示,当割角参数 $\tilde{\alpha}_j^{(D)}, \tilde{\beta}_j^{(D)}$ 满足

$$\inf_{j \rightarrow \infty} (1 - \tilde{\alpha}_j^{(D)} - \tilde{\beta}_j^{(D)}) = \tilde{\delta} > 0 \quad (12)$$

时,割角细分曲线 C^0 收敛,并在各边上留下一个插值点。

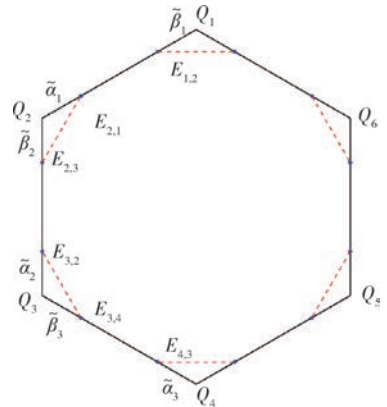


图 13 Gregory-Qu 割角细分示意图

对照平面蜂窝细分的割角方式(如 3.1 节图 9 所示),易知两者的割角参数满足如下关系:

$$\alpha_j^{(D)} = 1 - \tilde{\beta}_j^{(D)}, \beta_j^{(D)} = 1 - \tilde{\alpha}_j^{(D)}.$$

所以,满足条件公式(1)的 $\alpha_j^{(D)}, \beta_j^{(D)}$ 所对应的 $\tilde{\alpha}_j^{(D)}, \tilde{\beta}_j^{(D)}$ 满足:

$$\sup_{j \rightarrow \infty} (1 - \tilde{\alpha}_j^{(D)} - \tilde{\beta}_j^{(D)}) = -\tilde{\delta} < 0 \quad (13)$$

公式(13)与公式(12)对偶,当割角参数满足公式(12)的条件时,割角细分生成插值点在边上的细分插值曲线,当割角参数满足公式(13)时,割角细分生成插值点在面上的细分插值曲面。因此,平面蜂窝细分是 G-Q 算法在空间中生成细分曲面的一种推广,对于空间中的任意凸多面体,实现了仅通过逐次割去凸多面体的所有角而获得光滑的极限曲面,每一个初始面片上存在一点保留在极限曲面上,极限曲面在该点的切平面就是该点所在初始面片。

4 平面蜂窝细分的实现

4.1 算法设计

设初始凸多面体顶点的价全为 3,它有 M_i 个 i

边形面, $i=3, 4, \dots, m$.

平面蜂窝细分的实现, 首先从三角形面开始选择割角参数, 其次是四边形, 然后是其多边形. 对于边数大于等于 5 的多边形, 割角参数只需满足条件(1)式. 细分时一般会采用对称割角策略, 这时条件(1)式就简化为

$$0 \leq \beta_{(n_k)_j}^D < \frac{1}{2} \quad (14)$$

四边形的割角参数取值条件则简化为

$$0 < \beta_{(4_k)_j}^D < \frac{1}{2} \quad (15)$$

三角形的割角参数取值条件是(11)式.

在依次选择割角参数的过程中, 如果一个面有一条边, 其相邻面已经选定过割角参数, 则该边上的割角参数就直接采用之前已选的值.

算法(对称割角策略)实现见附录 B.

4.2 平面蜂窝细分曲面举例

为了展示平面蜂窝细分方法割角参数选择的灵活性, 本小节的例子试验了对称割角策略下随机选取割角参数的情况. 对任意细分层次中的任意边, 都随机选取满足条件式(11)、(15)和(14)的割角参数 $\beta_{(n_k)_j}^D$, 即细分过程中每条边上的割角参数都是随机选取的不同值. 割角参数 β 越大的地方, 割去的角越小, 相邻的面收缩更慢, 由此可以得到形状各异的细分曲面.

(1) 正四面体初始网格有 4 个顶点、4 个正三角形面. 随机选取不同的 $\beta_{(3_k)_j}^D \in (1/3, 1/2)$, $\beta_{(6_k)_j}^D \in [0, 0.5)$, 图 14 是试验的结果(细分 6 次).

(2) 正方体初始网格有 8 个顶点、6 个正方形面. 随机选取不同的 $\beta_{(4_k)_j}^D \in (0, 0.5)$, $\beta_{(6_k)_j}^D \in [0, 0.5)$, 图 15 是试验的结果(细分 6 次).

(3) 足球初始网格有 60 个顶点、12 个正五边形面和 20 个正六边形面. 每次随机选取不同的 $\beta_{(5_k)_j}^D$, $\beta_{(6_k)_j}^D \in [0, 0.5)$, 图 16 是试验的结果(细分 6 次).

(4) 随机生成一个 54 个顶点、29 个面的凸多面体, 如图 17(a)所示, 作为初始网格, 其中有 2 个三角形、1 个四边形、5 个五边形、20 个六边形和 1 个七边形面. 每次随机选取不同的 $\beta_{(3_k)_j}^D \in (1/3, 1/2)$, $\beta_{(4_k)_j}^D \in (0, 0.5)$, $n \geq 5$ 时 $\beta_{(n_k)_j}^D \in [0, 0.5)$, 图 17(b)(c)是细分 6 次后的结果.

从图 14~17 可以看出, 平面蜂窝细分方法是可行的, 产生的细分曲面达到了 C^1 光滑、保凸, 且内切于初始凸多面体. 在参数接近临界值时, 可能会形成较尖锐的点或边.

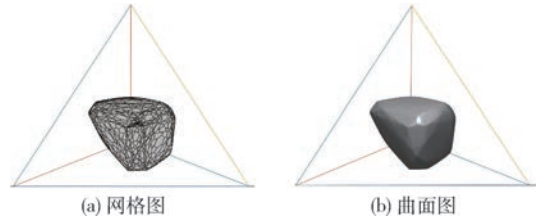


图 14 正四面体细分 6 次的细分图($\beta_{(3)}, \beta_{(6)}$ 随机)

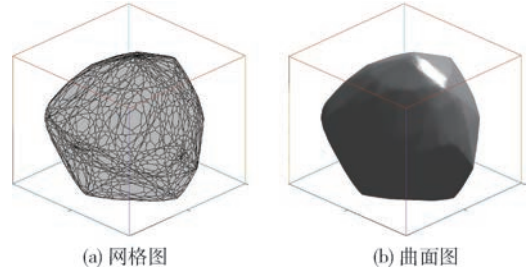


图 15 正方体细分 6 次的细分图($\beta_{(4)}, \beta_{(6)}$ 随机)

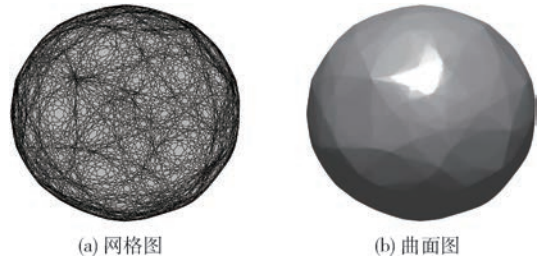


图 16 足球细分 6 次的细分图($\beta_{(5)}, \beta_{(6)}$ 随机)

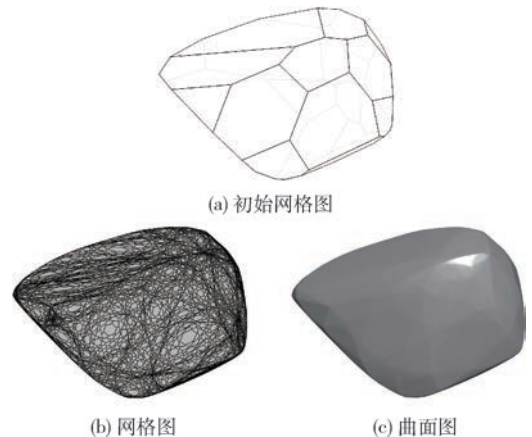


图 17 一个任意凸多面体细分 6 次的细分图

割角参数的不同取值对极限曲面的形状有较大的影响, 可以在交互设计中灵活地利用这一特点, 构造形状各异的曲面, 如图 14、15 所示, 对于正四面体和正方体这类网格面片较少且对称的初始网格, 这个现象更加突出. 而对于网格面片较多的初始网格, 如图 16、17 所示, 极限曲面受初始形状控制的程度越大, 在初始网格预处理时可以利用这一点来产生更尖锐的点或边.

5 收敛性和光滑性

5.1 收敛性和 C^1 光滑性

定理 1. 对于任意的平面凸 n 边形 $F^{(0)}$, 当割角参数满足条件式(1), $n=4$ 时还满足条件式(8), $n=3$ 时还满足条件式(10), 且满足:

$$\inf_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ l=1,2,\dots,\infty}} (1 - \alpha_j^{(l)} - \beta_j^{(l)}) = \delta > 0 \quad (16)$$

其中 l 是细分迭代次数, 则由 $F^{(0)}$ 细分 l 次后收缩而成的面 $F^{(l)}$ 仍是凸 n 边形且位于 $F^{(l-1)}$ 的内部, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $F^{(l)}$ 收敛到面内的一个点.

证明. 定理 1 的证明见附录 A.

定理 2(C^0 连续性). 对于任意的价 3 凸多面体初始网格, 当细分过程中所有割角参数都满足定理 1 的条件时, 平面蜂窝细分方法收敛, 其生成的极限曲面 C^0 连续.

证明. 定理 2 的证明见附录 A.

对于第 l_0 次细分网格中的任一平面凸 n 边形 $F^{(l_0)}$, 记 $F^{(l)}$ ($l > l_0$) 是其继续细分后收缩而成的面-面, $G_j^{(l)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 是与 $F^{(l)}$ ($l \geq l_0$) 相邻的 n 个平面凸多边形. $F^{(l)}$ ($l \geq l_0$) 有相同的单位法向量, 记为 \vec{N}_0 , 记 $G_j^{(l)}$ 的单位法向量为 $\vec{N}_j^{(l)}$, 所有法向量朝向凸多面体的外部.

定理 3. 当细分过程中所有割角参数都满足定理 1 的条件时, 有

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \vec{N}_j^{(l)} = \vec{N}_0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

证明. 定理 3 的证明见附录 A.

定理 4(C^1 光滑性). 对于任意的价 3 凸多面体初始网格, 当细分过程中所有割角参数都满足定理 1 的条件时, 平面蜂窝细分方法生成的极限曲面 C^1 光滑, $F^{(l)}$ 所在平面就是 $F^{(l)}$ 极限收敛点的切面.

证明. 定理 4 可由定理 1~3 直接得到.

当平面凸 n 边形的割角参数采用定常对称参数, 即对于所有的 l, k, j , 从网格面片中的三角形开始确定各边的割角参数如下:

$$\alpha_{(n_k)_j}^{(l)} = \beta_{(n_k)_j}^{(l)} = \beta_{(n)}.$$

则条件式(1)和(16)等价于 $0 \leq \beta_{(n)} < 1/2$, 条件式(8)等价于 $0 < \beta_{(4)} < 1/2$, 条件式(10)等价于 $1/3 < \beta_{(3)} < 1/2$. 所以由定理 4 得到:

定理 5(定常对称参数 C^1 光滑性条件). 对于任意的价 3 凸多面体初始网格, 当细分过程采用满足表 1 取值范围的定常对称割角参数时, 平面蜂窝细分方法生成的极限曲面 C^1 光滑.

表 1 平面蜂窝细分定常对称割角 C^1 光滑性条件

多边形边数 n	* 割角参数 $\beta_{(n)}$ 取值范围
3	(1/3, 1/2)
4	(0, 1/2)
≥ 5	[0, 1/2)

根据定理 4 和定理 5, 对于所有凸多边形, 包括非六边形的特殊面, C^1 光滑性条件及其存在符合条件的可选参数, 保证了平面蜂窝细分曲面在特殊面处的连续性和光滑性. 特别是对于三角形特殊面, 之前的方法都没有很好地解决过这一问题^[26].

容易看出, 细分过程可以取一致的定常割角参数 $\beta_{(n)} = \beta$ ($n \geq 3$). 当初始多面体不包含三角形和四边形面时, 定常割角参数 $\beta \in [0, 1/2)$; 当初始多面体不包含三角形但包含四边形面时, 定常割角参数 $\beta \in (0, 1/2)$; 当初始多面体包含三角形面时, 定常割角参数 $\beta \in (1/3, 1/2)$. 但一致定常的参数生成的细分曲面光滑效果并不会更好.

5.2 正多边形情形下对称割角细分 C^2 光滑性讨论

由于平面蜂窝细分是一种非线性格式, 获得一般情况下 C^2 光滑的割角参数选取条件是困难的. 本节考察了正 n 边形的细分情况.

当采用对称割角策略时, 容易推导出正 n 边形 G_n 细分一次后, 其边的收缩比例为

$$a_n = \left[1 - 2(1 - \beta_{(n)}) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right] / \cos \frac{\pi}{n} \quad (17)$$

其中 $\beta_{(n)}$ 是 G_n 内的割角参数, 从而其面积的收缩比例为

$$\sigma_n = (a_n)^2 \quad (18)$$

这时, 新顶点的割边比例参数 $u_j = v_j = u_{(n)}$, 可以推导出:

$$u_{(n)} = \frac{1 - 2\beta_{(n)}}{1 - \beta_{(n)}} \cdot \frac{1}{(2\cos(\pi/n))^2} \quad (19)$$

为了提高细分曲面的光滑性, 很多文献采用的思路是使不同边数的 n 边形面片的收缩比例 σ_n 相同, 即边收缩比例 a_n 相同, 例如, 都取为六边形的收缩比例 $\sigma_6 = 1/3$, 但这种方法对于平面蜂窝细分并没有预期的效果.

当 $\beta_{(6)} = 0$ 时, 根据公式(17), $a_6 = 1/\sqrt{3}$, 相同的收缩比例要求

$$a_n = \frac{1 - 2(1 - \beta_{(n)}) \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

容易推导出:

$$\beta_{(3)} = 2/3 + 1/(3\sqrt{3}) > 1/2,$$

$$\beta_{(4)} = 1/\sqrt{6} \approx 0.40825,$$

$$\beta_{(5)} = (3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3})/(2\sqrt{15}) \approx 0.22876,$$

$$\beta_{(n)} \leq \beta_{(7)} \approx -0.27440 < 0;$$

其中, $\beta_{(3)}$ 不满足收敛性条件, 即对于三角形面片来说, 对称割角策略不存在收缩为 $1/3$ 的可能性. 要想使得三角形面片与六边形面片有相同的收缩比例, 需要采用 $\beta_{(6)} < 0$ 的对称割角参数. 而 $\beta_{(n)} < 0$ 时, 可能会过割角, 导致细分网格自交叉.

当 $n=4, 5$ 时, 虽然有满足相同收缩比例 $1/3$ 的割角参数, 但细分曲面没有达到预期的效果^[27], 如图 18 和图 19 所示, 分别是正方体 ($\beta_{(4)} \approx 0.40825$, $\beta_{(6)} = 0$) 和足球 ($\beta_{(5)} \approx 0.22876$, $\beta_{(6)} = 0$) 细分 6 次的结果.

可以看出: 要求不同边数的面片有相同的收缩比例对平面蜂窝细分曲面的光滑性的提高并没有作用. 特别是对于三角形面片, 甚至没有满足条件的可选参数, 而对于 $n(>6)$ 边形可能会过割角.

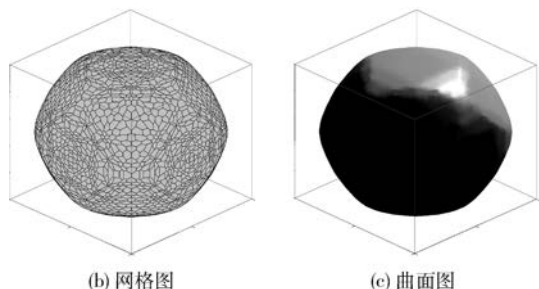


图 18 正方体细分曲面 ($\beta_{(4)} = 0.40825$, $\beta_{(6)} = 0$, 细分 6 次)

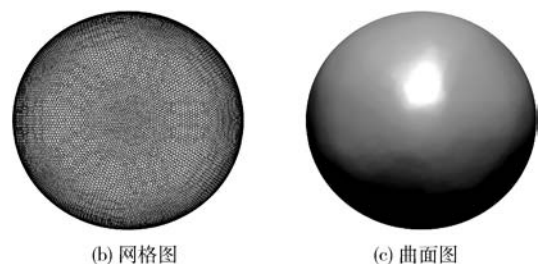


图 19 足球细分曲面 ($\beta_{(5)} = 0.22876$, $\beta_{(6)} = 0$, 细分 6 次)

本文发现, 由公式 (19) 表示的新顶点的割边比例参数 $u_{(n)}$ 相同才是改善光滑性的关键. 这是因为平面蜂窝细分是一种四点格式, 新的顶点是相关边的 4 个割点的加权平均值, 如下式 (20) 所示:

$$q_j = \frac{1}{2} [u_j E_{j-1,j} + (1-u_j) E_{j+1,j} + v_j E_{j+2,j+1} + (1-v_j) E_{j,j+1}] \quad (20)$$

对于正 n 边形对称割角策略, $u_j = v_j = u_{(n)}$ 由 (19) 式确定. 当细分过程中 u_j, v_j 取定常值时, 四点公式

(20) 是定常的, 从而能够产生光滑性更好的极限曲面.

设初始网格多边形中边数的最大值为 N , 令 $N_0 = \max(N, 6)$, 根据式 (19), 确定割角参数的一种简单方法是取 $\beta_{(N_0)} = 0$, 得到

$$u_{(N_0)} = \frac{1}{(2\cos(\pi/N_0))^2}.$$

令 $u_{(n)} = u_{(N_0)}$, $n = 3, 4, \dots, N_0$, 可推导得到

$$\beta_{(n)} = \frac{1 - \tau_{(n)}}{2 - \tau_{(n)}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \quad (21)$$

其中 $\tau_{(n)} = \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/N_0)}\right)^2$, $n = 3, 4, \dots, N_0$.

当 $N_0 \rightarrow \infty$, 取 $\beta_{(\infty)} = 0$ 时, $u_{(\infty)} = 0.25$, 公式 (21) 给出的 $\beta_{(3)} = 3/7$, $\beta_{(4)} = 1/3$, 都满足收敛性条件. 所以, (21) 式给出的 n 边形割角参数都能满足收敛性条件, 即使 $n=3$ 时也是.

通常取 $N_0 = 6$, 则 $\beta_{(6)} = 0$, $u_{(6)} = 1/3$, 这时 $\beta_{(3)} = 0.4$, $\beta_{(4)} = 0.25$, $\beta_{(5)} = (3 - \sqrt{5})/(9 - \sqrt{5}) \approx 0.11294$, 就可以使得 $u_{(3)}, u_{(4)}, u_{(5)}$ 和 $u_{(6)}$ 都为 $1/3$, 从而产生更光滑的细分曲面.

图 20 是 $\beta_{(4)} = 0.25$, $\beta_{(6)} = 0$ 时正方体细分 6 次的结果; 图 21 是 $\beta_{(5)} = 0.11294$, $\beta_{(6)} = 0$ 时足球细分 6 次的结果. 分别与图 18 和图 19 相比, 可以看出满足条件式 (21) 的细分曲面达到了更高的光滑性.

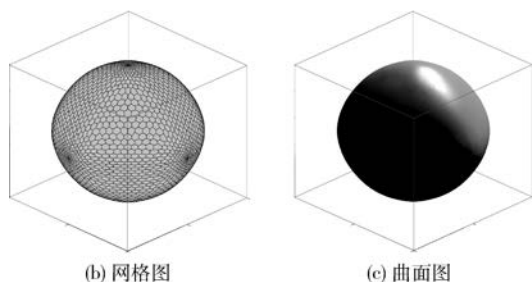


图 20 正方体细分曲面 ($\beta_{(4)} = 0.25$, $\beta_{(6)} = 0$, 细分 6 次)

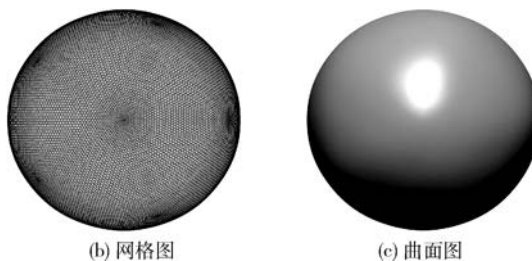
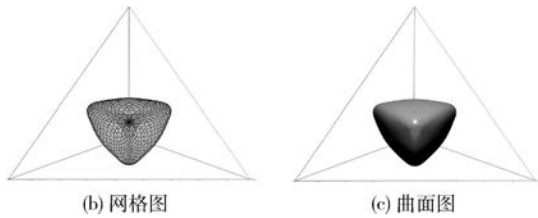


图 21 足球细分曲面 ($\beta_{(5)} = 0.11294$, $\beta_{(6)} = 0$, 细分 6 次)

图 22 是 $\beta_{(3)} = 0.4$, $\beta_{(6)} = 0$ 时正四面体细分 6 次的结果, 可以看出细分曲面也较光滑.

综上所述, 对于包括三角形特殊面在内的所有

图 22 正四面体细分曲面($\beta_{(3)} = 0.4, \beta_{(6)} = 0$, 细分 6 次)

多边形,都存在由式(21)确定的割角参数,能够保证平面蜂窝细分在特殊面附近也能形成更加光滑的曲面,从而避免了特殊面处不连续或不够光滑的问题。

一般地,平面蜂窝细分方法每次细分时各边上的两个割角参数可以选取符合条件的不同值,好处是在曲面设计时通过灵活的参数变化可以生成形态各异的细分曲面,坏处是细分格式不是定常(或称静态)的. 想要避免非定常引起的复杂性和不确定性,我们可以取这组光滑性较好的割角参数为定常参数: $\beta_{(3)} = 0.4, \beta_{(4)} = 0.25, \beta_{(5)} = 0.11294, \beta_{(n)} = 0 (n \geq 6)$,从而获得一个定常(静态)的细分格式. 这是因为,基于六边形的点方法,经一次细分后,所有非六边形网格面片的相邻面片都是六边形,从而网格的每一条边至少有 1 个相邻的六边形. 根据算法,当 $\beta_{(6)}$ 取 0 时实际上确定了 $\beta_{(n)} = 0 (n \geq 7)$;而与三角形、四边形或五边形相邻的边,其割角参数分别是 0.4、0.25 和 0.11294,都是确定值。

6 与其他细分方法的比较

6.1 与其他六边形细分方法比较

文献[11]提出的边方法和文献[9]提出的点方法(参见第 2 节)是最有代表性的两种六边形细分格式^[20]. 以正四面体初始网格为例,本文方法与它们进行比较。

图 23 是三种方法分别细分 1、2、3、6 次后的网格图(从左至右排列),图 23(a)是文献[11]的边方法,(b)是文献[9]的点方法,(c)是本文的平面蜂窝细分方法. 图中的粗实线网格是正四面体初始网格,选取了方位角 $A_z = 60^\circ$ 、俯仰角 $E_l = 35^\circ$ 的图。

图 23 显示,文献[11]的边方法保凸、顶点插值且细分六边形是平面的,但光滑性较差、极限曲面会有线段或平面片. 文献[9]的点方法极限曲面的光滑性较好,但细分产生的六边形一般不是平面的,从而不能保凸;在特殊面(例如三角形)附近,光滑性条件限定下的细分会产生“过割角”、自交叉和波浪形褶皱等问题. 平面蜂窝细分方法保凸、网格面片都是平

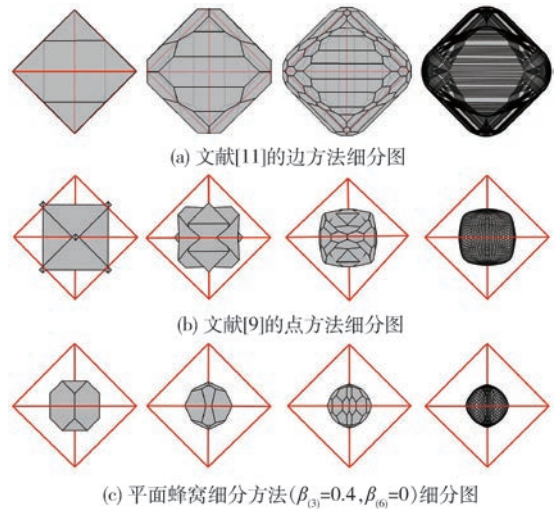


图 23 三种方法的逐次细分图

面的,光滑性较好(不会产生线段和平面片),且相切于初始面片,具有另两种方法各自才有的优点,而没有它们的缺点。

基于文献[9]的点方法推广的其他一些方法,例如文献[12]和[26],都不可避免地产生了基础格式细分网格多边形不是平面的、在三角形等特殊面处细分效果差甚至失败的问题. 所以,与这类方法相比,平面蜂窝细分方法同样在这两方面具有优势。

也有一些基于文献[11]的边方法的改进方法,例如文献[21],通过引入与主格式对偶的推顶点格式(pushing scheme),并交替使用这两种格式的方式可以避免细分曲面产生线段,但失去了原方法细分六边形的平面性,细分曲面依旧不够光滑,复杂度也没有降低。

关于计算量,通过估算三种方法每个新点计算所需的乘除法运算次数来比较。

文献[9]的点方法可以归为一般的线性加权平均细分方法,最多只需要 6 次乘除法,计算量最少。

对于平面蜂窝细分方法,方程组(4)式的求解需要 6 次乘除法,加上(3)式的 9 次乘法,共有 15 次乘除法。

文献[11]的边方法,需要求六边形 F 各边形成的 6 个面相交产生的多面体 D ,找到该多面体在 F 之外离 F 最近的顶点,作该顶点与 F 的垂线,过其中点作 F 的平行面,与多面体 D 相交得到细分后的 6 个新顶点,平均每个新点的计算包括求解一个 3 个未知数的线性代数方程组、一个点到平面的距离、一条线与平面的交点,其计算量至少有 29 次乘除法以及 $1/6$ 次开根号运算。

本文提出的平面蜂窝细分方法在计算每个新点

时比通常的线性加权平均细分方法多了 9 次乘除法,而少于文献[11]的边方法的 50%。通常的线性加权平均细分方法虽然计算量小,但产生的细分网格六边形不是平面的,相比于同样能产生平面六边形细分网格的边方法^[11],平面蜂窝细分方法不仅在光滑性方面更好,而且计算量少了一半以上。

6.2 与基于四边形或三角形的细分方法比较

基于四边形的细分方法中,最经典的是 Catmull-Clark 细分^[3],基于三角形的,最经典的是 Loop 细分^[5]。本文以正四面体初始网格和正方体初始网格为例,将平面蜂窝细分方法与它们进行比较。

图 24 是平面蜂窝细分与 Catmull-Clark 方法的比较,其中图(a)依次是 Catmull-Clark 方法细分 1、2、4 次后的网格图和细分 4 次的曲面图,(b)是平面蜂窝细分 1、3、6 次后的网格图和细分 6 次的曲面图。因为基于六边形的细分通常收缩较慢,所以对应的细分次数要多一些,其好处是细分层次之间的变化较缓,便于细节的展示和处理。图 24 中,正四面体图的方位角 A_z 为 124° 、俯仰角 E_l 为 0° ,正方体图的方位角 A_z 为 20° 、俯仰角 E_l 为 65° 。

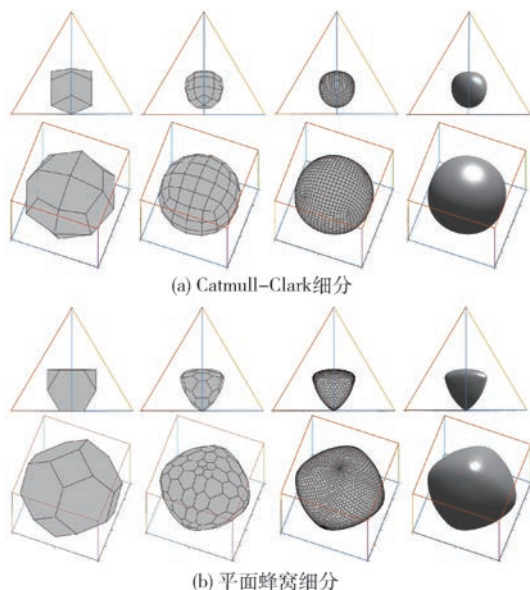


图 24 与 Catmull-Clark 方法的比较

图 25 是平面蜂窝细分与 Loop 方法的比较,其中图(a)依次是 Loop 方法细分 1、2、4 次后的网格图和细分 4 次的曲面图,(b)是平面蜂窝细分 1、3、6 次后的网格图和细分 6 次的曲面图。

由于 Loop 方法要求初始网格都是三角形,不能对正方体网格直接进行细分,需要先对四边形面片做三角化预处理,这里试验了两种能保持整体初始正方体形状的常用处理方法。一种是增加每个四

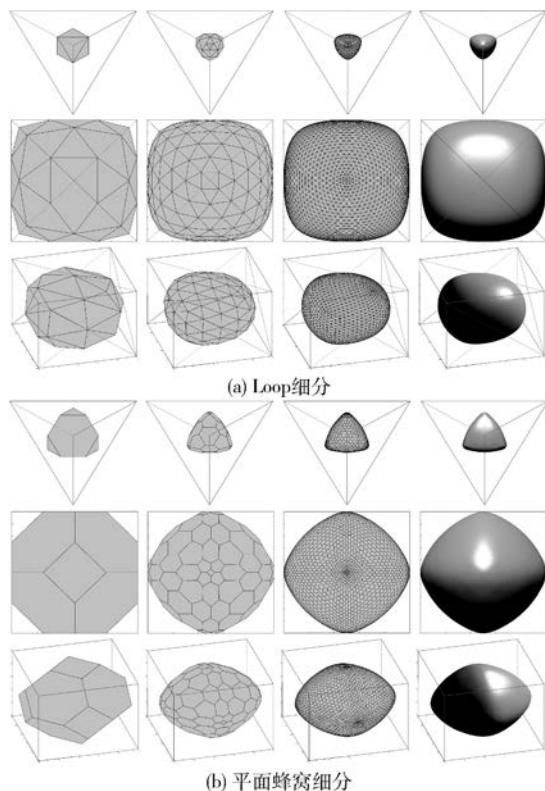


图 25 与 Loop 方法的比较

边形的中心点为初始顶点,形成 14 个顶点、24 个三角形面的初始网格(图 25(a)的中间那排图);另一种是尽量对称地在每个四边形面中添加一条对角线把四边形分为 2 个三角形,形成 8 个顶点、12 个三角形面的初始网格(图 25(a)的底下那排图)。图中,正四面体图的方位角 A_z 为 0° 、俯仰角 E_l 为 90° ,两种正方体图的方位角 A_z /俯仰角 E_l 分别是 $0^\circ/90^\circ$ 、 $75^\circ/35^\circ$ 。

从图 24 和图 25 可以看出本文提出的平面蜂窝细分方法在以下方面具有优势:

(1)平面蜂窝细分方法有明确的几何意义,它的全部细分操作都是用平面切割凸多面体的角,细分产生的新面片都是平面凸六边形,从而保凸。而 Catmull-Clark 方法细分中会产生非平面的四边形面片,不保凸。Loop 方法细分网格都是三角形,因此细分面片是平面的,但其保凸性难以验证。

(2)平面蜂窝细分极限曲面内切于初始凸多面体、保持了适当的大小。而 Catmull-Clark 和 Loop 方法的极限曲面收缩严重,特别是 Loop 方法对于正四面体的细分,极限曲面远离了初始凸多面体。此外,Loop 方法对于非三角形初始网格的三角化是敏感的,正方体网格的两种三角化生成完全不同的细分曲面。第一种极限曲面虽没有收缩,但在初始正方

体的每个面上留下了相当平缓的平面片;第二种极限曲面仍有收缩,且破坏了对称性.

(3)平面蜂窝细分能够保持正四面体和正方体初始网格相应的三角和四方的特性.而 Catmull-Clark 方法对于正四面体初始网格失去了三角的特性. Loop 方法因需要三角化不能直接细分正方体,且不同的三角化方法造成的影响较大.

(4)平面蜂窝细分以自适应多边形边数的非均匀网格避免了特殊点/面的不利影响.而 Catmull-Clark 和 Loop 方法网格相对均匀,都会受到特殊点/面的影响,曲面过于圆润而模糊了特征.

Catmull-Clark 和 Loop 方法与[9]的点方法一样是线性平均方法,计算每个新点的计算量比平面蜂窝细分方法少.但每一轮细分时,Catmull-Clark 方法需要计算的新点数量是上一层粗网格的顶点数+边数+面数, Loop 方法是顶点数+边数,平面蜂窝细分这类六边形点方法是 $2 * 边数$,后者通常数量更少,同时也产生相对更少的新边和新面.这也导致六边形点方法网格收敛会慢一些,好处是可以保持更详细的细分层次^[12].

7 边界处理

7.1 自然边界

对于单连通、面片不交叉的非封闭可定向初始网格,其边界由若干条无交叉的封闭折线构成.为简单起见,本文考虑边界只有一条封闭折线的情况.

平面蜂窝细分的初始网格中内部顶点价全为 3,从而边界顶点的价为 2 或 3.图 26 是非封闭六边形网格拓扑的一个例子,其中粗线是封闭的折线边界 Γ ,点 Q_2 和 Q_3 分别是价为 2 和 3 的边界顶点的例子.

位于边界 Γ 上的边称为边界边,有边界边的面称为边界面. n 边形边界面可能会有 1 至 $(n-1)$ 条边界边,例如,图 26 中①~⑤号的六边形面分别有 1 至 5 条边界边.

平面蜂窝细分的每个初始面片都收敛到 1 个点,边界面也是如此,所以考虑边界面的细分极限形成的边界是自然的,只需保证初始边界面在细分过程中一直保持为边界面,则其收敛的极限点就在极限曲面的边界上.边界面的数量随着细分层次的增加而增加,最终全部的边界面收敛成曲面的边界曲线,可以称这样的边界是自然边界.

平面蜂窝细分方法细分时产生面-面和点-面两

种新面,与封闭初始网格相比,边界的处理就归结到边界顶点对应的新点-面产生与否,以及如何产生.

显然,价为 2 的边界顶点不需要产生新点-面.价为 3 的边界顶点需要以适当的方式产生新点-面.

如果价为 3 的边界顶点一直不产生新点-面的话,若干次细分后,边界面会从网格中分离出去,最后收敛到一个孤立的点.因为,每做一次细分,边界面的边界边数量会增加,如图 27(a)所示,有 3 条边界边的③号边界面经一次细分后成为有 4 条边界边的④号边界面,当边界边数达到该边界面的总边数时,该面就分离出去了.

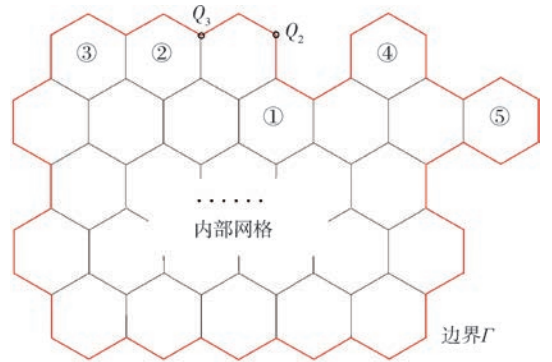


图 26 非封闭网格拓扑示意图

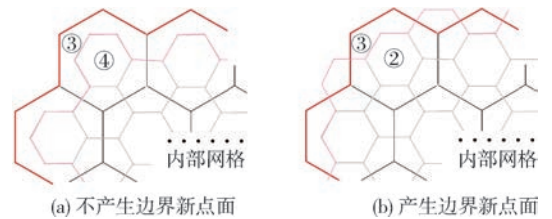


图 27 边界顶点新点面产生与否示意图

反之,如果每次细分时价为 3 的边界顶点都产生新点-面的话,若干次细分后,边界面会变成网格内部的面,不再在边界上.因为,每做一次细分,边界面的边界边数量会减少,如图 27(b)所示,有 3 条边界边的③号边界面经一次细分后变成只有 2 条边界边的②号边界面,当边界边数为 0 时,该面就成了网格内部的面.

综上所述,为了使得初始边界面(实际上是由其收缩生成的新面-面)在细分过程中一直是边界面,我们的策略是奇数次细分时不产生边界新点面,偶数次细分时产生边界新点面.这样,初始网格中除了只有 1 条内部边连接整个网格的 n 边形边界面在第一次细分时离开网格之外,其它边界面会一直在边界上.只有 1 条边与整个网格相连的 n 边形有 $(n-1)$ 条边界边,如图 26 中的⑤号边界面所示,它基本

是独立的,作为极限曲面的边界可以预先排除,必要的话,可对初始网格做预处理予以保留.

自然边界平面蜂窝细分算法简述如下:

(1)根据算法 1(见附录 B)确定网格中所有边上的割角点,计算所有网格面片的内部新点,得到所有的新面-面和对应内部顶点的新点-面.

(2)当偶数次细分时,依次遍历边界 Γ 上的边界边,设当前处理的边界边为 $edge_j$,

Case 1: $edge_j$ 的两个端点价全为 2,返回.

Case 2: $edge_j$ 的两个端点价全为 3,边界外对应该边有两条确定的割角线段,求其交点,记为 $edge_j$ 的边界外新点.

Case 3: $edge_j$ 的两个端点价分别为 2 和 3,边界外对应该边有一条确定的割角线段,在其上求出关于 $edge_j$ 与其边界内新点对称的点,作为 $edge_j$ 的边界外新点.

然后,得到对应价为 3 的边界顶点的新点-面.

(3)组织更新边界 Γ_{new} .

图 28 和图 29 给出了自然边界平面蜂窝细分的两个例子,自左至右分别是初始网格、细分 2 次、6 次的网格图和细分 6 次的曲面图.

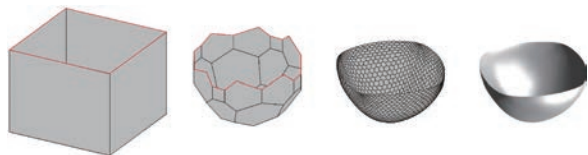


图 28 缺一个面的正方体非封闭网格细分图

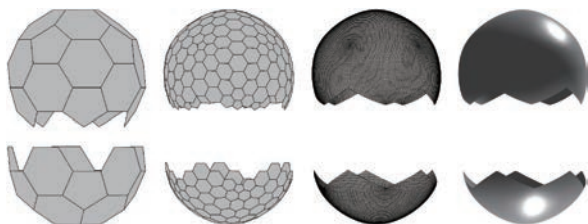


图 29 足球大、小两部分非封闭网格细分图

图 28 的初始网格是正方体去掉一个面(图中上面那个正方形,其 4 条边是边界),有 8 个顶点和 5 个正方形面,其中 4 个边界顶点和 4 个边界面.图 29 是把足球初始网格按上下分成一大一小两部分作为初始网格分别进行细分的结果,大者有 55 个顶点(其中 15 个边界顶点)、26 个面,小者有 40 个顶点(其中 20 个边界顶点)、16 个面,两者有共同的 10 个边界面,它们的细分曲面在边界面处(将边界面重叠在一起)是无缝对接的.

由于自然边界是以多边形边界面来表示的,所以有限次细分后的边界会存在多边形角,这时,可以截掉边界面上突出的角来获得具有光滑边界曲线的曲面图.图 28 最右边的曲面图,采用了边界面中线作为边界截线.图 29 最右边的曲面图,则是截掉所有顶点价为 2 的边界角的结果.

自然边界处理方法在细分过程中保持了网格面片都是六边形(除了初始网格中固定数量的非六边形)的优点,原细分格式可以直接使用,无需引入其他特别的处理.另一个优点是:有共同边界面的两张初始网格,只要两者边界面的细分方式及其割角参数都相同,两细分曲面就有相同的边界且有相同的切面,从而在拼接处切平面连续.

7.2 平直边界

大多数基于六边形的其他细分方法在处理开曲面边界时,采用半多边形剪裁或用 B-样条控制多边形剪裁六边形的方法^[26],细分过程中不断产生半多边形或辅助的五边形、四边形或三角形,边界网格不再是由六边形为主组成的结构,边界的细分需采用相应的专门格式,其好处是能产生平直的边界曲线.平面蜂窝细分也可以参考这类方法来生成开曲面的平直边界.

与自然边界方法不同,平直边界曲线的产生对于初始网格的边界一般也要求是平直的,如图 30 所示,边界面一般有六、五、四边形和三角形,图中分别以①~④号面片为例,边界顶点的价都为 3.

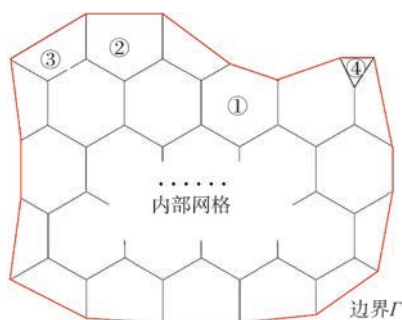


图 30 平直边界初始网格拓扑示例图

由于平面蜂窝细分是一种割角算法,为了保留边界边,应在奇数次细分时产生边界新点面,偶数次细分时不产生边界新点面,这正好与 7.1 节的自然边界生成方法相反.另外,在产生边界新点面时应采用半多边形处理方法,以保持边界顶点价为 3 的条件.平面蜂窝细分平直边界处理方法使得最终极限曲面的边界是受初始边界控制的相对平直的边界曲线,而初始边界面片则会收敛到极限曲面内部的点.

图 31 是平面蜂窝细分产生平直边界曲线的一个例子. 初始网格是足球用平面截取的大半部分, 如图 31 的左图所示, 共有 50 个顶点和 26 个面, 其中有 10 个边界顶点, 边界面有 5 个四边形和 5 个六边形, 另有 6 个内部五边形和 10 个内部六边形. 右边的三个图一次是细分 1 次、4 次的网格图和细分 6 次的曲面图.

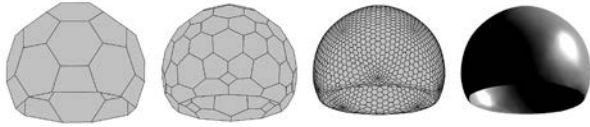


图 31 足球大半部分平直边界细分图

8 平面蜂窝细分方法的推广

8.1 退化情况及尖锐特征处理

生成尖锐特征需要考虑退化凸多边形网格面片的细分方式. 平面凸 n 边形的退化有两种情形:

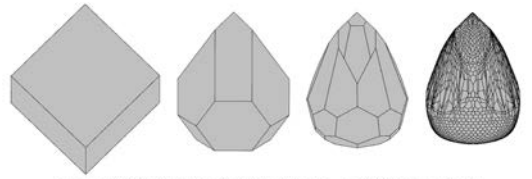
- (1) 凸 n 边形的若干内角为 180° 或 0° ;
- (2) 凸 n 边形的若干顶点重合为一点;

本文称退化所涉及的顶点为退化点, 与退化点相连的边称为退化边.

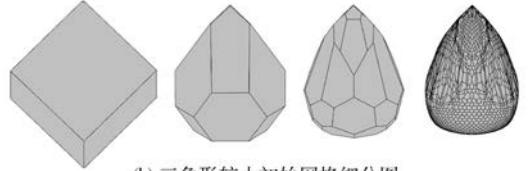
把退化的凸 n 边形仍然当作凸 n 边形对待, 为使细分过程中所有顶点保持价 3 的性质, 从而保证平面蜂窝细分方法可以进行, 只需要退化边的相应割角参数不为 0 即可, 在对称割角策略下就是要求退化边的割角参数 $\beta > 0$, 平面蜂窝细分算法无需改动就可以产生一些尖锐特征.

如图 32(a) 所示, 左图是正方体其中一个顶点 (图中最上面的那个顶点) 作为 3 个顶点重合的退化三角形的初始网格, 它有 10 个顶点 (其中 8~10 号顶点重合), 有 1 个退化为点的三角形, 3 个退化的五边形 (这 3 个五边形各有 2 个顶点重合, 图中显示的是四边形) 和 3 个正方形. 图 32 右边依次是平面蜂窝细分方法细分 1、2、6 次的网格图, 其中三角形的割角参数保持为 0.4, 其他退化边割角参数 $\beta = 0.25$. 细分图显示退化顶点及其附近产生了明显的尖锐特征, 在退化的顶点处形成了尖锐点, 与尖锐点相连的有 3 条锐边, 并形成了平面片. 如何只产生尖锐点或锐边, 需要进一步的研究.

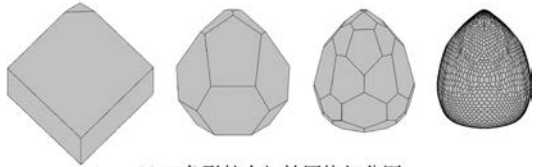
作为比较, 图 32(b) 和 (c) 是小三角形非退化时的细分效果, (b) 的三角形较小 (按边长的 $1/50$ 割去正方体最上面的那个角构成初始网格), (c) 的三角



(a) 三角形退化为点初始网格产生尖锐特征细分图



(b) 三角形较小初始网格细分图



(c) 三角形较大初始网格细分图

图 32 产生尖锐点的细分图

形较大 (按边长的 $1/5$ 割角), 左图是它们初始网格, 都有 10 个顶点 (无重合顶点), 1 个三角形 (非退化), 3 个五边形 (非退化) 和 3 个正方形. (b)(c) 都生成 C^1 光滑的细分曲面, 但可以看出: 随着三角形越小, 该处的尖锐特征就越明显, 直至趋向图 32(a) 中的细分曲面.

8.2 模型特征及体积保持

对于模型设计来说, 一般可以分为两步进行: 第一步是给出尽可能接近预期的初始网格, 第二步是用细分方法细化. 生成的曲面整体上受初始网格的影响更大一些.

对于平面蜂窝细分, 初始网格的控制通过极限曲面保凸并内切于初始网格来实现. 其次, 可以通过灵活选取不同的割角参数 (满足定理 1 的条件) 在初始网格的控制内生成形状各异的 C^1 光滑的凸曲面. 本文第 4.2 节的一些例子说明了这一点.

应用中一般希望割角参数是定常的, 可以使得细分层次之间的细分效果 (例如小面片的收缩比例) 相同, 这时平面蜂窝细分可以选择符合表 1 所列条件的割角参数生成模型曲面, 其形状会更多地受到初始网格的控制和影响. 为了获得预期的模型曲面, 需要尽可能体现预期要求的初始网格, 或者将最初的粗初始网格预处理为精初始网格. 对于凸多面体粗初始网格的预处理, 可以通过割角处理实现, 这与平面蜂窝细分方法的基本操作 (割角) 保持一致, 因而也容易实现.

以正四面体粗初始网格为例, 随机选取割角参数的细分图例见图 14, 定常割角参数 ($\beta_{(3)} = 0.4$,

$\beta_{(6)}=0$)的细分图例见图 22~图 25(分别显示了 4 个不同的角度)所示. 如果模型预期保留接近正四面体顶点的极限曲面, 可以把正四面体(粗初始网格)的 4 个顶点处的尖角用期望点所在平面割去, 得到一个精初始网格, 如图 33 左列所示, 网格有 12 个顶点, 4 个三角形面和 4 个六边形面, 从上到下分别是按边长的 $1/3$ 、 $1/10$ 、 $1/50$ 和 0 进行割角, 其中 0 割角的图 33(d)是三角形退化为点、六边形退化为三角形的特殊情形.

细分割角参数取 $\beta_{(3)}=0.4$ 、 $\beta_{(6)}=0$, 在六边形退化边和接近退化边处取 $\beta_{(6)}=0.25$. 图右边三列, 依次是平面蜂窝细分方法细分 2、4 和 6 次的网格图.

图 33(a)~(c)的细分极限是 C^1 光滑曲面, 但在对应初始正四面体的边处, 随着割去的顶点角变小而变得越来越尖锐, 直至割去的顶点角退化为一个点的时候, 细分曲面趋向于图 33(d), 即初始的正四面体. 图 33(d)每次细分后整体曲面保持了原正四面体的形状(包括特征边), 但每个三角形面随着平面蜂窝细分会细分成越来越小的面片.

图 33 显示, 对于凸多面体初始网格, 平面蜂窝细分方法可以符合模型特征及体积保持的要求. 体积的上限就是原初始凸多面体的体积. 由于平面蜂窝细分保持凸多面体的凸性和面片平面性, 而凸多面体的体积有确定的简单算式, 所以平面蜂窝细分模型体积的计算是容易的.

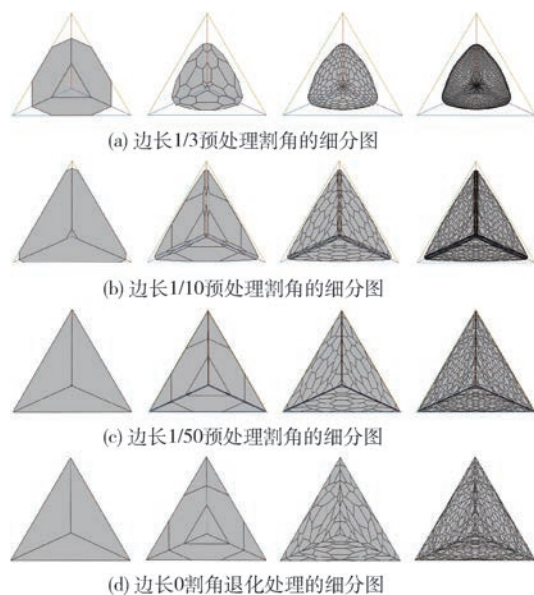


图 33 正四面体保持模型特征及体积的细分图

8.3 用于任意可定向拓扑网格的推广方法

对于任意可定向拓扑网格, 经适当的预处理后, 可以得到顶点价全为 3(部分边界顶点价可以为 2)

的网格(简称为“价 3 网格”). 例如, 对于任意的可定向三角形网格, 利用射影几何中点和面的对偶关系, 可将三角形网格中价为 n 的点转化为对偶空间中的一个 n 边形面, 将三角形面转化为对偶空间中一个价为 3 的顶点. 一种简单的方法^[9]是: 取每个三角形的中心点为新网格的顶点, 将围绕价为 n 的原顶点相邻的 n 个三角形中心点依次连接形成新网格的一个 n 边形面, 由此得到一个价 3 网格.

对于任意的价 3 网格, 可以进行基于六边形点方法的拓扑细分, 细分后的原 n 边形收缩为小的 n 边形面-面, 每个顶点对应产生一个新的六边形面-面. 除了三角形面片之外, 其网格面片多边形一般不是平面的, 不能直接使用平面蜂窝细分方法.

如 3.1 节图 10 所示, 平面蜂窝细分的新点是面片内相邻两条割边线段的交点, 当面片是平面凸多边形时, 这两个线段共面不共线、并在面内交叉, 其交点存在唯一, 平面蜂窝细分可以一直进行下去. 对于一般的空间多边形, 这两条割边线段一般不相交, 然而它们存在一对最近点, 取这对最近点的中点作为细分后的新点, 其他步骤不变, 就得到了平面蜂窝细分的一种推广方法, 可用于任意价 3 网格的细分. 容易看出, 当两割边线段有交点时, 这对最近点同为此交点, 所以这种推广是自然的, 算法结构基本不变, 简要描述如下:

如图 10 所示, 设割边线段 $E_{j+1,j}E_{j-1,j}$ 和 $E_{j,j+1}E_{j+2,j+1}$ 的一对最近点为 q_{j1} 和 q_{j2} , 令

$$\begin{aligned} q_{j1} &= u_j E_{j-1,j} + (1-u_j) E_{j+1,j}, \\ q_{j2} &= v_j E_{j+2,j+1} + (1-v_j) E_{j,j+1}, \end{aligned}$$

其中 $u_j, v_j \in [0, 1]$ 是待求的比例参数.

可以先求出 $E_{j+1,j}E_{j-1,j}$ 和 $E_{j,j+1}E_{j+2,j+1}$ 所在两直线的一对最近点的比例参数 u_j, v_j , 当两条直线不平行时, 它们是方程组(4)的最小二乘解, 即下列方程组的唯一解:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T (E_{j,j+1} - E_{j+1,j}) \quad (22)$$

其中 \mathbf{A} 是 3×2 的已知矩阵, 由下式给出:

$$\mathbf{A} = (E_{j-1,j} - E_{j+1,j}, E_{j,j+1} - E_{j+2,j+1}).$$

当 u_j 或 v_j 不在 $[0, 1]$ 区间内时, 用通常的方法确定割边线段哪 1 个或哪两个端点为最近点, 从而求出 q_{j1} 和 q_{j2} ; 当两割边线段平行时, 取各自的中点为 q_{j1} 和 q_{j2} .

细分后的新点 q_j 就取这对最近点的中点:

$$q_j = \frac{1}{2} (q_{j1} + q_{j2}).$$

易知,当方程组(4)有唯一解时,方程组(22)与其等价,即得到的是同一个解.所以,推广的平面蜂窝细分方法用于凸多面体初始网格时,结果与平面蜂窝细分相同,能保持细分网格的平面性和保凸性;但对于非凸初始网格,细分产生的网格一般不是平面的.

图 34~38 给出了推广的平面蜂窝细分方法用于任意可定向拓扑初始网格的几个例子.

图 34 是一个环面的细分结果,左边是初始网格,由 120 个顶点 60 个六边形面组成.图 35 是一个马鞍面的细分结果,左边的初始网格由 74 个顶点 27 个六边形面组成.图 34 和 35 的右边,依次是细分 1、4 次的网格图和细分 4 次的曲面图.

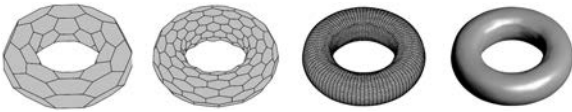


图 34 环的细分图

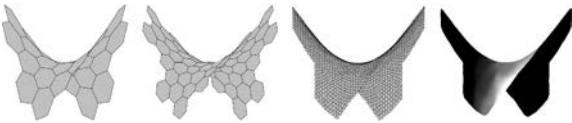


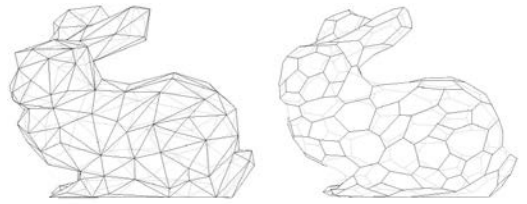
图 35 马鞍面的细分图

图 36 是一个兔子模型的细分结果.兔子的初始三角网格模型取自 CAD 模型数据库 ABC-Dataset^[28],由 148 个顶点 292 个三角形面组成,如图 36(a)左图所示.采用对偶的方法将其转化为价 3 初始网格,如图 36(a)右图所示,它有 292 个顶点、148 个多边形面,其中 3 个三角形、14 个四边形、40 个五边形、51 个六边形、22 个七边形、12 个八边形、5 个九边形和 1 个十边形.

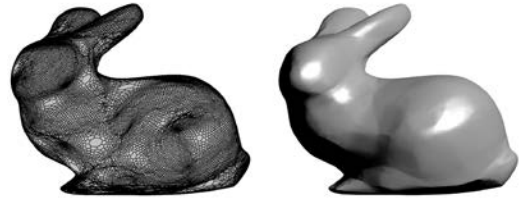
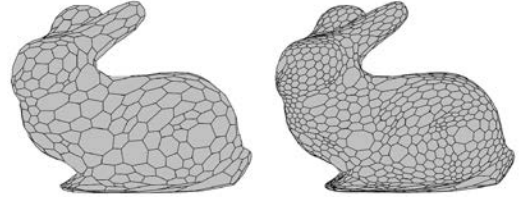
取 $\beta_{(3)} = 0.4, \beta_{(4)} = 0.25, \beta_{(5)} = (3 - \sqrt{5}) / (9 - \sqrt{5}) \approx 0.11294, \beta_{(6)} = \beta_{(7)} = \beta_{(8)} = \beta_{(9)} = \beta_{(10)} = 0$,图 36(b)是依次细分 1、2、5 次的网格图和细分 5 次的曲面图.

图 37 和图 38 是一个狐狸模型细分结果的侧面和正面图.初始三角网格由 313 个顶点 622 个三角形面组成,如图 37(a)和 38(a)左图所示^[28].价 3 初始网格如图 37(a)和 38(a)右图所示,它有 622 个顶点、313 个多边形面,其中 2 个三角形、42 个四边形、67 个五边形、109 个六边形、48 个七边形、40 个八边形、4 个九边形和 1 个十一边形.

取 $\beta_{(3)} = 0.4, \beta_{(4)} = 0.25, \beta_{(5)} = 0.11294,$

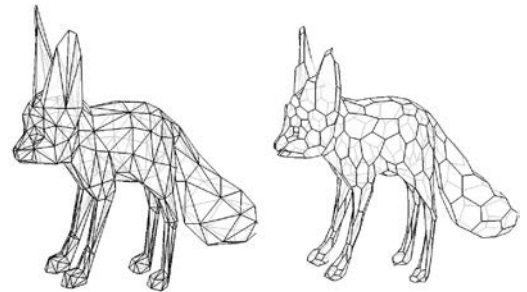


(a) 初始网格图(左:三角网格;右:价3网格)

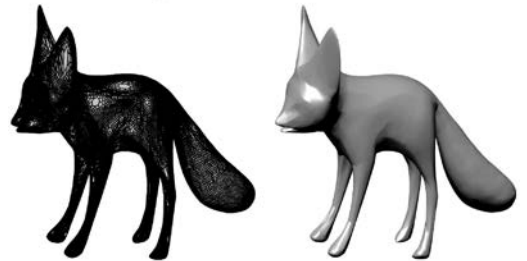
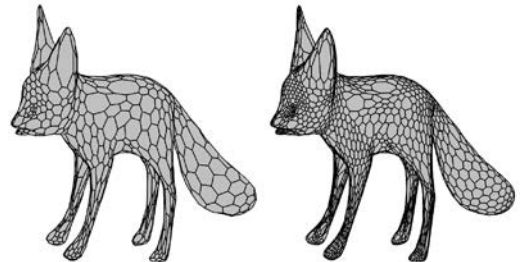


(b) 细分1、2和5次的结果

图 36 兔子的细分图



(a) 初始网格图(左:三角网格;右:价3网格)



(b) 细分1、2和5次的结果

图 37 狐狸的细分图(侧面)

$\beta_{(6)} = \beta_{(7)} = \beta_{(8)} = \beta_{(9)} = \beta_{(11)} = 0$,图 37(b)和图 38 (b)分别是依次细分 1、2、5 次的侧面和正面网格图

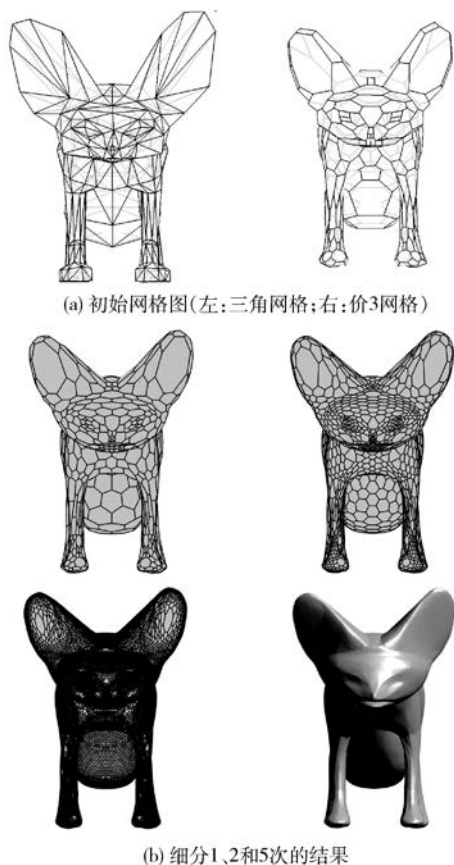


图 38 狐狸的细分图(正面)

和细分 5 次的曲面图。

尽管由三角网格简单生成的对偶“价 3 网格”中绝大部分是非平面多边形且包含了较多的边数大于 6 的多边形,推广的平面蜂窝细分依然可以有效进行,并能保留初始网格的一些细节,但与 Loop 方法相比,图 36~38 的光滑性不足。

由于目前使用最多的初始模型是基于三角形和四边形网格的,能否将它们在畸变最小的情况下转化为六边形初始网格是应用六边形细分方法时值得进一步研究的问题。除了对偶方法之外,文献[9]还给出了一种割去三角形面片各个角的方法,将初始三角形网格转化为价 3 网格,原价为 n 的顶点转化为一个 n 边形面(通常不共面)、原三角形面收缩为一个六边形面。基于这一方法,采用变分等手段是产生畸变最小的价 3 网格的一种途径。

此外,文献[29]给出了一种神经网络细分方法,在 Loop 细分的基础上,通过学习输入模型的相关性质训练神经网络来优化细分新顶点的位置,能够平衡 Loop 方法过分磨光失去特征细节和中点插值方法不够光滑的缺陷,从而生成预期的细分曲面。这个方法对优化六边形细分网格也有启发。

总之,对于如图 36~38 这样的复杂曲面,平面蜂窝细分推广方法细分的总体效果差别不大,其光滑性、细节保留以及初始网格转化等方面尚需进一步研究。

9 结论和待解决的问题

本文给出的平面蜂窝细分方法(包括其推广方法),对于任意初始凸多面体网格,产生的细分面片都是平面多边形(对应初始网格各多边形收缩而成的面-面)和平面六边形(细分新增的点-面),细分曲面保凸且内切于初始网格, C^1 光滑,且不受特殊点/面的影响。已有的基于六边形的细分方法或者细分面片不是平面的,或者虽然有平面性,但光滑性较差、计算较复杂,且都会受到特殊点/面很大的影响。所以,综合来看,平面蜂窝细分方法是目前最好的六边形细分方法。

平面蜂窝细分没有特殊点/面,能够保持初始网格的形状特征,避免了基于三角形或四边形细分方法不能保凸、极端曲面模型体积过于缩小、失去初始网格特征等方面的一些不足。

平面蜂窝细分方法只需用平面切割多面体角,是一种纯粹的割角方法,其收敛性和 C^1 光滑性条件宽泛,有利于在交互设计中灵活选择。进一步地,本文采用了一种新的思路给出了能提高细分曲面光滑性的割角参数值,包括对于三角形的割角参数,已有六边形细分方法都没有做到这一点。

本文还给出了一种网格边界自然边界生成方法和平面蜂窝细分方法的一种推广,并讨论了平直边界和退化情形下尖锐特征生成的方式,以及模型特征及体积保持的处理方法,可用于任意可定向拓扑网格的细分。给出的实验验证了方法的有效性。

平面蜂窝细分作为一种新型的细分方法,还有一些尚未解决的问题或局限性,包括但不限于此:

(1) 对于凸多面体网格,本文没有从理论上证明平面蜂窝细分曲面是否可以达到 C^2 光滑;对于任意可定向拓扑网格,没有证明推广的平面蜂窝细分曲面具有 C^1 光滑性。作者期望能建立平面蜂窝细分与非均匀有理 B 样条之间的联系,从而有助于进一步的理论分析。

(2) 本文虽然给出了一种尖锐特征生成和处理方法,但在产生尖锐点和保持特征边方面还不够灵活。可能需要结合割边细分方法以实现尖锐点和特征边的生成。

(3)平面蜂窝细分如何更好地产生自适应的细分效果,如何在细分曲面求交过程中确保自适应的细分曲面表示,包括涉及的边界生成,也需要进一步的研究.

(4)本文方法对于非凸多面体网格细分后产生的新点面一般不是平面的,如何保持或尽量保持平面性需要进一步的研究.通过构造平面六边形(不限于凸六边形)割/补角细分格式,可能是一种可行的途径.

(5)相比三角形网格细分,非平面的多边形面片在最终呈现曲面形态时,何种绘制和填充方式最恰当,及其对光滑曲面形态的影响,也都需要进一步的研究.

致 谢 感谢北京师范大学韩雨和硕士,杭州电子科技大学邓重阳教授、孟慧宁博士和德国卡尔斯鲁厄理工学院 H. Prautzsch 教授在本文参考文献和资料收集方面提供的帮助.感谢评审老师和同行的建议和帮助!

参 考 文 献

- [1] DeRose T., Höllig K., Riemenschneider D. Subdivision surfaces in character animation//Proceedings of ACM SIGGRAPH 98. New York, USA, 1998: 85-94
- [2] Pottmann H., Eigensatz M., Vaxman A., Wallner J. Architectural geometry. *Computers & Graphics*, 2015, 47: 145-164
- [3] Catmull E., Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 1978, 10(6): 350-355
- [4] Doo D., Sabin M. Analysis of the behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 1978, 10(6): 356-360
- [5] Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles [Master's thesis]. University of Utah, Department of Mathematics, Salt Lake City, USA, 1987
- [6] Dyn N., Levin D., Gregory J. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 9(2): 160-169
- [7] Kobbelt L. Sqrt(3) subdivision//Proceedings of ACM SIGGRAPH 2000. New York, USA, 2000: 103-112
- [8] Sabin M. Towards subdivision surfaces C2 everywhere//9th International Conference of Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Tønsberg, Norway, 2016. Lecture Notes in Computer Science 10521, Switzerland; Springer, 2017, 202-217
- [9] Claes J., Beets K., Van Reeth F. A corner-cutting scheme for hexagonal subdivision surfaces//Proceedings of IEEE Shape Modeling International 2002. Banff, Canada, 2002: 13-20
- [10] Li Yufei, Liu Yang, Wang Wenping. Planar hexagonal meshing for architecture. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2015, 21(1): 95-106
- [11] Dyn N., Levin D., Liu D. Interpolatory convexity preserving subdivision schemes for curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 1992, 24 (4): 211-216
- [12] Zhang Hongxin, Wang Guojin. Honeycomb subdivision. *Journal of Software*, 2002, 13(7): 1199-1208
- [13] de Rham G. On a planar curve. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1956, 35(9): 25-42 (in French)
- [14] de Boor C. On calculating with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, 1972, 6: 50-62
- [15] Chaikin G. M. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 1974, 3: 346-349
- [16] Gregory J. A., Qu R. B. Nonuniform corner cutting. *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13: 763-772
- [17] Barry P. J., Goldman R. N. De Casteljau-type subdivision is peculiar to Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 1988, 20 (3): 114-116
- [18] Luo Ying. Theory and method of Hermite subdivision curves [Master's Thesis]. Northern Jiaotong University, Beijing, 2001(in Chinese)
(罗颖. Hermite 细分曲线理论和方法[硕士学位论文]. 北方交通大学, 北京, 2001)
- [19] Gao Cuixia, Han Zhen, Li Kai, Luo Ying. Comparison between Gergory-Qu algorithm and Hermite interpolatory subdivision scheme. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2003, 15(3): 329-333(in Chinese)
(高翠霞, 韩臻, 李凯, 罗颖. Gregory-Qu 算法与 Hermite 细分曲线构造法的比较. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2003, 15(3): 329-333)
- [20] Liao Wenhe, Liu Hao, Li Tao. Subdivision surface modeling technology. Beijing: Higher Education Press, and Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2017
- [21] Meng Huining, Prautzsch H. Mixed honeycomb pushing refinement. *Computer Aided Geometric Design*, 2019, 75: 1-18
- [22] Gao Cuixia. Hermite subdivision surfaces [Master's Thesis]. Northern Jiaotong University, Beijing, 2003(in Chinese)
(高翠霞. Hermite 细分曲面算法的研究[硕士学位论文]. 北方交通大学, 北京, 2003)
- [23] Luo Shuya. Variable parameter Hermite subdivision surface with arbitrary topology and drawing method of hexagon control meshes [Master's Thesis]. Beijing Jiaotong University, Beijing, 2006(in Chinese)
(罗姝雅. 任意拓扑变参数 Hermite 细分曲面及其六角形控制网格的绘制[硕士学位论文]. 北京交通大学, 北京, 2006)
- [24] Prautasch H., Boehm W. Box spline//Farin G., Hoschek J., Kim M.-S. (Eds.), *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam, The Netherlands, 2002, Chapter

10, 255-282

[25] Xue Yonggang, Yu Thomas P.-Y. Honeycomb and k-fold Hermite subdivision schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, 177: 401-425

[26] Barendrech P., Sabin M., Kosinka J. A bivariate C^1 subdivision scheme based on cubic half-box splines. *Computer Aided Geometric Design*, 2019, 71: 77-89

[27] Song Zhijia. Interpolatory convexity preserving subdivision algorithms for polyhedra [Master's Thesis]. Karlsruhe In-

stitute for Technology, Karlsruhe, Germany, 2018

[28] Koch S., Matveev A., Jiang Z., Williams F., Artemov A., Burnaev E., Alexa M., Zorin D., Panozzo D. ABC: A big CAD model dataset for geometric deep learning//*Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) 2019*. Los Angeles, USA, 2019: 9601-9611

[29] Liu H-T. D., Kim V. G., Chaudhuri. S, Aigerman N., Jacobson A. Neural subdivision. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39 (4): 124:1-16

附录 A.

对于任意的平面凸 n 边形,如图 A1 所示,记顶点为 $Q_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 顺序按右手法则,记对应顶点的内角为 $\angle Q_j$, 用 $|PQ|$ 表示 P, Q 两个点之间的距离,则

$$\text{边长 } |Q_j Q_{j+1}| > 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (A1)$$

$$0 < \angle Q_j < \pi, j = 1, 2, \dots, n \quad (A2)$$

$$\sum_{j=1}^n \angle Q_j = (n-2)\pi \quad (A3)$$

下标按 $\text{mod}(n)$ 计算.

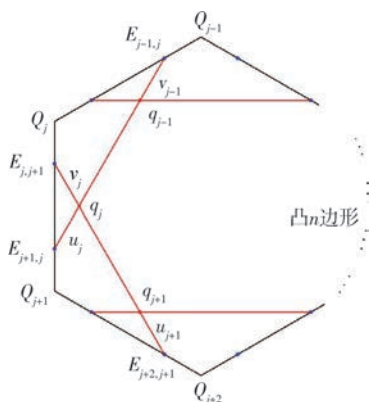


图 A1 任意凸 n 边形细分割角示意图

引理 1. 对于任意的平面凸 n 边形,在定理 1 的条件下,细分割边分割比例参数 u_j, v_j 满足下列不等式:

$$u_j, v_j > 0 \quad (A4)$$

$$1 - v_j - u_{j+1} > 0 \quad (A5)$$

$j=1, 2, \dots, n$, 下标按 $\text{mod}(n)$ 计算.

证明. 如图 A1 所示,根据式(A1)和定理 1 的条件有

$$\begin{aligned} |E_{j,j+1} E_{j+1,j}| &= (1 - \alpha_j - \beta_j) |Q_j Q_{j+1}| \\ &\geq \delta |Q_j Q_{j+1}| > 0 \end{aligned} \quad (A6)$$

由公式(A2)和(A6)可知,当 $n \geq 5$ 时(A4)(A5)式成立.

当 $n = 4$ 时,条件式(8)保证了割角后能留下小的凸四边形,从而(A4)(A5)式成立.

当 $n = 3$ 时,条件式(10)就是(A5)式,从而(A4)式成立.

引理 1 证毕.

定理 1 的证明.

(1)证明细分后的 $F^{(l)}$ 仍是凸 n 边形且位于 $F^{(l-1)}$ 的

内部.

由于平面蜂窝细分是逐次迭代方法,所以在证明过程中省略了上标 (l) , $Q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 $F^{(l-1)}$ 的顶点, $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 $F^{(l)}$ 的顶点.

如图 A1 所示,对于三角形 $\Delta E_{j+2,j+1} E_{j,j+1} Q_{j+1}$, 用余弦定理可得

$$\begin{aligned} |E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}|^2 &= (|E_{j,j+1} Q_{j+1}| - |Q_{j+1} E_{j+2,j+1}|)^2 + \\ &4 |E_{j,j+1} Q_{j+1}| \cdot |Q_{j+1} E_{j+2,j+1}| \cdot \sin^2 \left(\frac{\angle Q_{j+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} |E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| &\geq \\ &2 \sin \left(\frac{\angle Q_{j+1}}{2} \right) \cdot \sqrt{|E_{j,j+1} Q_{j+1}| \cdot |Q_{j+1} E_{j+2,j+1}|} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} |E_{j,j+1} Q_{j+1}| &= (1 - \beta_j) |Q_j Q_{j+1}| \\ &\geq \delta |Q_j Q_{j+1}| > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Q_{j+1} E_{j+2,j+1}| &= (1 - \alpha_{j+1}) |Q_{j+1} Q_{j+2}| \\ &\geq \delta |Q_{j+1} Q_{j+2}| > 0 \end{aligned}$$

所以 $|E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| > 0$, 根据引理 1 可得:

$$|q_j q_{j+1}| = (1 - v_j - u_{j+1}) \cdot |E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| > 0$$

即细分后的小凸多边形边长都不为 0.

在三角形 $\Delta E_{j+2,j+1} E_{j,j+1} Q_{j+1}$ 中,因为 $0 < \angle Q_{j+1} < \pi$, $|E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| > 0$, $|Q_{j+1} E_{j+2,j+1}| > 0$, 所以

$$\angle E_{j+2,j+1} E_{j,j+1} Q_{j+1} > 0$$

同理,在三角形 $\Delta E_{j+1,j} E_{j-1,j} Q_j$ 中,有

$$\angle Q_j E_{j+1,j} E_{j-1,j} > 0$$

从而,在三角形 $\Delta E_{j,j+1} E_{j+1,j} Q_j$ 中,因为

$$\angle q_j E_{j,j+1} E_{j+1,j} = \angle E_{j+2,j+1} E_{j,j+1} Q_{j+1} > 0,$$

$$\angle E_{j,j+1} E_{j+1,j} q_j = \angle Q_j E_{j+1,j} E_{j-1,j} > 0.$$

又因为(A-6)式有 $|E_{j,j+1} E_{j+1,j}| > 0$, 所以

$$0 < \angle E_{j+1,j} q_j E_{j,j+1} < \pi,$$

即细分后的小凸多边形对应顶点 q_j 的内角 $\angle q_j$ 满足:

$$0 < \angle q_j < \pi, j = 1, 2, \dots, n.$$

综上所述,细分后的 $q_1 q_2 \dots q_n$ 是具有 n 条边长 > 0 , n 个内角 $\in (0, \pi)$ 的凸 n 边形,且由引理 1 可知它在多边形 $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ 的内部.

(2)证明 $F^{(l)}$ 收敛到面内的一个点.

记 $e(F^{(l)})$ 是 $F^{(l)}$ 的周长,则

$$e(F^{(l)}) = \sum_{j=1}^n |q_j q_{j+1}|$$

$$= \sum_{j=1}^n (|E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| + |E_{j+1,j} q_j| + |q_j E_{j,j+1}|)$$

根据三角不等式,有

$$\sum_{j=1}^n |E_{j,j+1} E_{j+2,j+1}| < \sum_{j=1}^n (|E_{j+1,j} Q_{j+1}| + |Q_{j+1} E_{j+2,j+1}|)$$

$$= \sum_{j=1}^n (|Q_j Q_{j+1}| + |E_{j+1,j} E_{j,j+1}|)$$

$$< e(F^{(l-1)}) + \sum_{j=1}^n (|E_{j+1,j} q_j| + |q_j E_{j,j+1}|) \quad (A7)$$

从而有

$$e(F^{(l)}) < e(F^{(l-1)}) \quad (A8)$$

即周长序列 $\{e(F^{(l)}), l = 0, 1, 2, \dots, \infty\}$ 非负且单调递减,因此存在极限,记 $e_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} e(F^{(l)})$, 则 $\forall l (\neq \infty), e(F^{(l)}) > e_\infty$.

假设周长极限 $e_\infty > 0$, 则根据平面凸 n 边形的性质,即使在其退化情形下,至少有一对长边边长分别不小于 e_∞/n 和 $e_\infty/(n(n-1))$, 至少有两个小内角分别不大于 $(n-2)\pi/n$ 和 $(n-2)\pi/(n-1)$. 再根据平面蜂窝细分割角的规则,至多经 $(n-2)/2$ 次细分后有一个小内角的两条相邻边为长边,从而再次细分后周长 $< e_\infty$, 矛盾.

所以, $e_\infty = 0$, 即 $F^{(l)}$ 收敛到面内的一个点.

定理 1 证毕.

引理 2. 对于任意的价 3 凸多面体初始网格,当细分过程中所有割角参数都满足定理 1 的条件时,细分产生的点-面是平面凸六边形.

证明. 如图 A2 所示,因为顶点 Q_j 所在的三个面角 $\in (0, \pi)$, 且 $|E_{2,1} Q_j| \geq \delta |Q_{j+1} Q_j|, |E_{0,1} Q_j| \geq \delta |Q_{j-1} Q_j|, |E_{12,1} Q_j| \geq \delta |Q_{j2} Q_j|$, 所以割角三角形 $\Delta E_{2,1} E_{0,1} E_{12,1}$ 非退化.

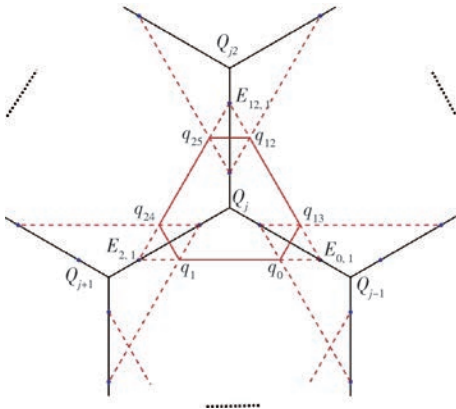


图 A2 细分产生的割角点-面示意图

根据定理 1, 细分后的新顶点 q_1, q_0, q_{13}, q_{12} 和 q_{25}, q_{24} 分别两两落在 3 个原相邻平面凸多边形的内部, 所以边 $|q_0 q_{13}|, |q_{12} q_{25}|, |q_{24} q_1| > 0$. 从而, 细分产生的点-面 $q_1 q_0 q_{13} q_{12} q_{25} q_{24}$ 是平面凸六边形.

引理 2 证毕.

定理 2 的证明.

根据定理 1 和引理 2, 任意价 3 凸多面体初始网格经 l 次平面蜂窝细分后仍是价 3 凸多面体, 其表面是分片线性封闭曲面, 从而一致连续, 记为 $s^{(l)}$.

根据定理 1, 细分过程中的所有凸多边形面片最终都收敛到面内的一点, 所以当 $l \rightarrow \infty$ 时, $s^{(l)}$ 收敛到极限曲面 $s^{(\infty)}$. 因为 $s^{(l)}$ 均一致连续, 所以 $s^{(\infty)}$ 也连续, 即 C^0 连续.

定理 2 证毕.

定理 3 的证明.

如图 A3 所示, $Q_j Q_{j+1} \dots Q_{j-1}$ 是平面 n 边形 $F^{(l)}$, $Q_j Q_{j-1} \dots Q_{j2}$ 是平面多边形 $G_{j-1}^{(l)}$, $Q_j Q_{j2} \dots Q_{j+1}$ 是平面多边形 $G_j^{(l)}$, $q_1 q_2 \dots q_0$ 是细分 1 次后由 $F^{(l)}$ 收缩而成的平面 n 边形 $F^{(l+1)}$, $q_1 q_0 q_{13} q_{12} q_{25} q_{24}$ 是与 $F^{(l+1)}$ 相邻的平面多边形 $G_j^{(l+1)}$. 令:

$$\omega(F^{(l)}) = \min_{j=1,2,\dots,n} \overline{N}_j^{(l)} \cdot \overline{N}_0,$$

则 $\omega(F^{(l)}) \in (-1, 1)$. 由图 A3 所示, $G_j^{(l+1)}$ 的单位法向量可由下式计算:

$$\overline{N}_j^{(l+1)} = \frac{\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}}}{|\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}}|} \quad (A9)$$

而

$$\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}} =$$

$$(\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} + \overrightarrow{Q_j E_{12,1}}) \times (\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} + \overrightarrow{Q_j E_{2,1}})$$

$$= \overrightarrow{E_{0,1} Q_j} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}} + \overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} Q_j} + \overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}$$

$$= |\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| \cdot \overline{N}_0 + |\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} Q_j}| \cdot \overline{N}_{j-1}^{(l)} +$$

$$|\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| \cdot \overline{N}_j^{(l)} \quad (A10)$$

由式(A9)(A10)可得

$$\overline{N}_j^{(l+1)} \cdot \overline{N}_0 = [|\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| \cdot \overline{N}_0 \cdot \overline{N}_0 +$$

$$|\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} Q_j}| \cdot \overline{N}_{j-1}^{(l)} \cdot \overline{N}_0 +$$

$$|\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| \cdot \overline{N}_j^{(l)} \cdot \overline{N}_0] /$$

$$|\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}}|$$

$$> [(|\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| + |\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} Q_j}| +$$

$$|\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}|) / |\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}}|] \cdot \omega(F^{(l)}).$$

根据三角形面积公式,有

$$|\overrightarrow{E_{0,1} E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} E_{2,1}}| = 2\Delta E_{2,1} E_{0,1} E_{12,1} \text{ 的面积} <$$

$$2(\Delta E_{0,1} Q_j E_{2,1} \text{ 面积} + \Delta E_{0,1} Q_j E_{12,1} \text{ 面积} + \Delta E_{2,1} Q_j E_{12,1} \text{ 面积}) =$$

$$|\overrightarrow{E_{0,1} Q_j} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}| + |\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{E_{0,1} Q_j}| + |\overrightarrow{Q_j E_{12,1}} \times \overrightarrow{Q_j E_{2,1}}|,$$

所以

$$\overline{N}_j^{(l+1)} \cdot \overline{N}_0 > \omega(F^{(l)}) \quad (A11)$$

易知, 式(A11)对于所有的 $j = 1, 2, \dots, n$ 和 $l \geq l_0$ 都成立, 因此得到

$$\omega(F^{(l+1)}) > \omega(F^{(l)}) \quad (A12)$$

即序列 $\{\omega(F^{(l)}), l \geq l_0\}$ 单调递增且上界为 1, 因此存在极限, 记 $\omega_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} \omega(F^{(l)}) \leq 1$, 则 $\forall l (\neq \infty), \omega(F^{(l)}) < \omega_\infty$.

假设极限 $\omega_\infty < 1$, 则极限凸多面体与 ω_∞ 相关的两个面片的两面角 $\leq \pi - \arccos(\omega_\infty) < \pi$, 从而存在尖角. 根据平面蜂窝细分割角的规则, 再次细分后相应的两面角 $> \pi - \arccos(\omega_\infty)$, 矛盾.

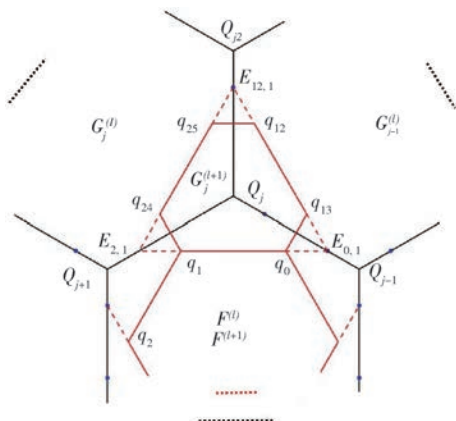


图 A3 法向量计算示意图

所以, $\omega_\infty = 1$, 从而

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overrightarrow{N_j^{(l)}} \cdot \overrightarrow{N_0} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

即

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \overrightarrow{N_j^{(l)}} = \overrightarrow{N_0} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

定理 3 证毕.

附录 B.

算法 1. 平面蜂窝细分(对称割角策略).

输入: 初始多面体(顶点价全为 3) N 个顶点坐标数据 $N \times 3$ 矩阵; 顶点的邻接表矩阵; M_i 及其不为 0 时 i 边形的顶点序号矩阵, $i = 3, 4, \dots, m$.

输出: 给定细分次数的细分曲面图.

算法描述:

WHILE (尚未达到给定的细分次数)

%% (1) 处理初始多面体各面或其细分收缩后的面-面, 其数量和多边形边数是固定不变的.

FOR $i = 3 : m$ %% 从三角形到 m 边形

FOR $k = 1 : M_i$ %% 遍历 M_i 个 i 边形

%% 选定各边的割角参数:

FOR $j = 1 : i$ %% 遍历 i 条边

IF (边 j 已选定割角参数) THEN

采用已选割角参数;

ELSE

CASE $i = 3$: 选定满足(11)式的割角参数;

CASE $i = 4$: 选定满足(15)式的割角参数;

CASE 其他: 选定满足(14)式的割角参数;

记录该边及其割角参数;

END

END %% 割角参数选定

%% 计算新面-面的新顶点:

FOR $j = 1 : i$ %% 遍历 i 条边

按公式(2)计算边 j 相关两割角线的 4 个割角点;

用全主元消去法求解方程组(4)得到 u_j, v_j ;

CASE $i = 3$: 用公式(9)计算新的顶点坐标;

CASE 其他: 用公式(3)计算新的顶点坐标;

END %% 新顶点计算完成

更新收缩后的第 k 个 i 边形面-面;

%% 形成新点-面及新顶点邻接表:

FOR $j = 1 : i$ %% 遍历 i 个顶点

按原顶点序号及其邻接表形成新点-面;

形成新顶点邻接表;

END %% 完成新点面和顶点邻接表

END %% 结束 k 循环

END %% 结束 i 循环, 完成(1)

%% (2) 处理上次细分后累计的 M_f 个点-面

FOR $k = 1 : M_f$ %% 遍历 M_f 个 6 边形

取 $i = 6$, 执行(1)中的 k 循环中程序体的全部内容;

END %% 完成(2)

END %% 结束细分迭代

输出曲面图



HAN Zhen, Ph. D., professor.

His research interests include trusted computing, subdivision surface.

Background

Subdivision is a very famous method and is widely used in surface modeling. The typical schemes are those based on quadrilaterals or triangles. So far, there is still no scheme based on hexagons which is as well as the typical schemes to use, although the hexagonal meshes are omnipresent in the

natural world and are the optimal elegant way in many fields such as signal sampling, finite element, membrane structure, architectural geometry. How to construct a good planar hexagonal subdivision scheme is a problem that hasn't been solved since the early 1990s.

Some scholars have proposed subdivision schemes based on hexagons. But, these hexagon-based subdivision schemes either have poor smoothness and computational complexity or produce non-coplanar vertices in the facet. There are also problems of discontinuity, self-intersection, or inability to subdivide at extraordinary points/faces, especially triangular facets. However, the planarity of the mesh faces is as important as smoothness in some applications, for example in architecture.

In this paper, we propose a planar hexagonal subdivision scheme called Planar Honeycomb Subdivision

(PHS) for any convex polyhedral. PHS is the first quasilinear scheme based on planar hexagons with provable convergence and smoothness, interpolatory convexity preserving, uniform representation, and a convenient algorithm. It can compare favorably with the typical schemes in generating smooth surfaces and is even more advantageous for dealing with extraordinary vertices/faces. In addition, we present a new approach to improving the smoothness of the subdivision surfaces, which overturns the conventional idea.

This work is supported by the Fundamental Research Funds of the Central Universities (No. 2022XKRC012).