

# 基于替代原理的无线网状网网关部署问题研究

黄书强<sup>1)</sup> 王高才<sup>2)</sup> 张震<sup>3)</sup> 徐勇军<sup>4)</sup> 安竹林<sup>4)</sup> 邓玉辉<sup>3)</sup> 李阳<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(暨南大学网络与教育技术中心 广州 510632)

<sup>2)</sup>(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)

<sup>3)</sup>(暨南大学信息科学技术学院 广州 510632)

<sup>4)</sup>(中国科学院计算技术研究所 北京 100086)

**摘要** 几何  $K$  中心网关部署问题是无线网状网拓扑优化中一个难题,将几何  $K$  中心网关部署问题转化为节点  $K$  中心问题进行求解是一种可行的方法,但是转化过程产生的大量虚拟节点扩大了网络节点规模,从而降低了求解效率和效果.为了缩减虚拟网络规模,文中结合无线 Mesh 网络拓扑结构和邻接节点的包含关系,提出了基于拓扑学的替代原理,并分析和证明了该理论的完备性.首先将平面中不可列的节点按连通性分成有限类,并将不同的类视为虚拟节点加入到原来的无线 Mesh 网络中,形成新的虚拟网络.然后利用多阶替代原理剔除大量的冗余节点,获得一个与原虚拟网络等价但规模很小的替代网络.最后设计了基于替代网络的遗传算法(GASK)求解该问题.实验仿真结果和分析表明,替代原理能充分优化网络结构并缩小虚拟网络规模,基于替代网络的遗传算法能够获得更优的覆盖半径,其求解效果、效率和稳定性均优于传统算法.

**关键词** 无线 Mesh 网络;网关部署;几何  $K$  中心;虚拟节点;替代原理  
**中图法分类号** TP391 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2016.01120

## Gateway Deployment of Wireless Mesh Networks Based on Substitution Principle

HUANG Shu-Qiang<sup>1)</sup> WANG Gao-Cai<sup>2)</sup> ZHANG Zhen<sup>3)</sup> XU Yong-Jun<sup>4)</sup> AN Zhu-Lin<sup>4)</sup>  
DENG Yu-Hui<sup>3)</sup> LI Yang<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>(Network and Educational Technology Center, Jinan University, Guangzhou 510632)

<sup>2)</sup>(School of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning 530004)

<sup>3)</sup>(College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangzhou 510632)

<sup>4)</sup>(Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100086)

**Abstract** Geometric  $K$ -center gateway deployment is a hard problem of topology optimization in wireless mesh networks, and converting the geometric  $K$ -center problem into a node  $K$ -center problem is a feasible method. However, large amounts of virtual nodes will be produced during the conversion process, and the size of the network nodes will be expanded thus the solving efficiency and effectiveness will decrease. To reduce the size of the virtual network, taking into wireless mesh network topology and the adjacent node contains relations, substitution principle is proposed based on topology theory in the paper, and theory completeness of the substitution principle is analyzed and proved. To solve the problem, first the plane nodes are classified into

收稿日期:2014-06-25;在线出版日期:2015-07-12. 本课题得到国家“八六三”高技术研究发展计划项目基金(2013AA040404)、国家自然科学基金(61262003,61272073,61373125,61303245)、广东省自然科学基金项目(S2013020012865,2014A030313386)、广东省教育厅科技创新项目(2013KJ CX0018)及暨南大学科研培育与创新基金项目(21615439,21615443)资助. 黄书强,男,1977年生,博士,教授级高级工程师,主要研究领域为无线 Mesh 网络和移动互联网. E-mail: hsq@jnu.edu.cn. 王高才,男,1976年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为系统性能评价及随机方法. 张震,男,1975年生,博士,副教授,主要研究方向为并行分布式处理系统. 徐勇军,男,1979年生,博士,副研究员,主要研究方向为物联网及数据融合. 安竹林,男,1980年生,博士,高级工程师,主要研究方向为分布式网络时间同步及数据融合. 邓玉辉,男,1974年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为绿色计算和数据存储. 李阳,男,1989年生,硕士研究生,主要研究方向为智能算法.

number of categories according to connectivity, and each class is incorporated as a virtual node to the original network structure to form a new virtual network. Then by using multi-stage substitution principle, a large number of redundant nodes can be removed and the original virtual network can be converted into a much smaller scale and equivalent substituted network structure. Finally, we proposed a genetic algorithm based on substituted network (GASK) to solve the problem of geometric  $K$ -center gateway deployment. Simulation results show that substitution principle can fully optimize the network structure and reduce the size of the virtual network, and the GASK algorithm is more effective, efficient and stable than other traditional algorithms based on original network.

**Keywords** wireless mesh networks; gateway deployment; geometric  $K$ -center; virtual node; substitution principle

## 1 引言

无线 Mesh 网络融合了 WLAN 和移动 Adhoc 网络的特点和优势,具有自组织、多跳和支持异构等特性,可以和多种宽带无线接入技术相结合,实现异构无线网络的有效融合与协同工作,实现资源的优势互补和协调管理<sup>[1-3]</sup>.无线 Mesh 网络的显著特点表现在:网络的大部分流量汇聚于网关,离网关较近的节点服务质量较好,而离网关较远的节点服务质量较差,各节点间存在服务质量的不公平性.因此,网关通常成为网络性能的瓶颈,网关节点的部署对网络拓扑结构和网络性能有较大的影响<sup>[4-5]</sup>.无线 Mesh 网络的网关部署方式主要有两种:一种方式是从现有的网络节点中选取  $K$  个节点作为网关节点;另一种方式是在网络节点所在平面的任意  $K$  个位置部署网关节点,该  $K$  个节点不一定从现有网络节点中选取.前者在数学上定义为节点  $K$  中心问题(vertex  $K$ -center problem),后者则被归结为几何  $K$  中心问题(geometry  $K$ -center problem).

基于节点  $K$  中心网关部署问题研究就是在给定的节点集合中寻找最优解,研究方法相对成熟.文献[6]根据 QoS 约束,以最小网关数为优化目标,提出一种经典的基于权重的络节点分组贪婪算法,文献[7]在文献[6]研究基础上进行进一步完备和深化,提出两种经典的基于度和基于权重的网络节点分组贪婪算法,以便从现有普通节点中选择合适节点作为最优网关节点.文献[8]中利用粒子群优化算法和遗传算法研究了基于费用的网关部署网关问题,而文献[9]在文献[7]的研究基础上,研究了干扰约束和负载均衡条件下的网关节点选择问题,文

献[10]也是在文献[7]的基础上提出了一种基于节点度的网关选择算法.而文献[11-12]借鉴数据挖掘思想提出了基于聚类的无线 Mesh 网络节点分组和网关选择方法,并且分析发现无线 Mesh 网络节点具有空间聚类属性.

基于几何  $K$  中心问题的网关部署方式是在全局范围内寻找最优部署方案,比基于节点  $K$  中心的部署方式适应性更强,但是求解复杂度更高.节点  $K$  中心问题可以概括为离散选址问题,而几何  $K$  中心问题是一个连续区域选址问题,对于该问题的处理非常复杂,相关的研究也比较少,特别是国内目前针对该问题的研究涉猎较少.无线网络网关部署的几何  $K$  中心问题的本质可以归结为传统的数学经典问题,文献[13-14]从数学图论的角度出发对传统的几何  $K$  中心问题基本属性和计算复杂度进行了研究,文献[15-16]提出了利用单位圆盘来解决几何  $K$  中心问题,文献[17-19]分别利用单位圆盘的性质和理论来对一般图节点进行分组和处理.无线网络图和一般图论网络有所区别,无线 Mesh 网络中节点的距离是用跳数距离来表示的,而不是传统的欧式距离,所以解决方法和思路需要进行创新.文献[20-21]分别利用进化算法和粒子群方法对 RFID 阅读器部署问题进行求解,该问题和无线 Mesh 网络网关部署问题具有一定的相似性,说明智能方法可以用于解决几何  $K$  中心网关部署问题,但是单纯的智能方法不能保证求解的稳定性和效果.文献[22]结合单位圆盘理论提出了最大公共覆盖的概念,以求解基于几何  $K$ -中心的网关部署问题,并给出了相关理论分析和数学证明.文献[23]借鉴了文献[22]中最大公共覆盖的概念,提出了备选区域的概念和方法来产生虚拟节点,以将几何  $K$  中

心问题转化为节点  $K$  中心问题来处理,并提出极大备选区来缩减和合并备选区,以减小虚拟网络的规模,该方法为求解几何  $K$  中心问题提供了一种新的思路.

节点  $K$  中心问题的求解方法较为成熟,通过引入虚拟节点,将 Mesh 网络的几何  $K$  中心问题转化为虚拟网络上的节点  $K$  中心问题,是一种解决几何  $K$  中心问题的有效方法.但是额外增加的虚拟节点会扩大虚拟网络的规模,增加了算法的计算开销.本文从拓扑学<sup>[24]</sup>基础理论出发,结合无线 Mesh 网络的拓扑结构,提出了一套系统的节点替代原理,可以对文献[23]基于极大备选区的虚拟网络规模作进一步系统性优化和缩减.该替代原理从邻接节点的包含关系出发,挖掘节点之间的替代关系,即某些节点可以代替其他节点候选为网关且能保证更小的覆盖半径.仿真分析表明替代原理和方法可以充分缩减网络规模,替代后的虚拟网络规模甚至会小于原始网络结构,基于替代虚拟网络的遗传算法方法求解效果优良,多次实验结果显示算法运行结果稳定.本文的主要研究价值就是从拓扑学角度出发,为解决多跳无线网络拓扑优化中的几何  $K$  中心问题提供了一套完整的理论体系和实验解决方案,该理论和方法对于解决经典的网络最大最小半径问题具有重要的意义,并可应用于其他复杂网络拓扑结构的优化.

## 2 无线 Mesh 网络网关部署问题描述

### 2.1 网关部署问题模型

无线 Mesh 通信网络图用  $G(V, E)$  表示, AP (Access Point) 节点的集合为  $V(G)$ . 当节点  $v_i$  和  $v_j$  的距离小于通信半径  $r$  时,即  $dist(v_i, v_j) \leq r$ , 两节点互为邻接节点,邻接节点间连边的集合为  $E(G)$ .  $G$  的规模为  $n$ , 即  $|V(G)| = n$ .  $G$  的邻接矩阵为  $\mathbf{A} = \{e_{ij}\}_{n \times n}$ , 邻接节点直接连接,规定邻接节点间连边的权重为 1, 非邻接节点无法直接连接,规定非邻接节点间连边的权重无穷大. 网络  $G$  的最短距离矩阵为  $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}_{n \times n}$ ,  $d_{ij}$  表示节点  $v_i$  到  $v_j$  的最短跳数距离

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & dist(v_i, v_j) \leq r \\ +\infty, & dist(v_i, v_j) > r \end{cases}$$

通常情况下,需要在网络  $G$  中部署  $K$  ( $K \geq 2$ ) 个网关为节点提供服务,而节点会选择距离最近的网关.如果节点  $v_i$  ( $v_i \in V(G)$ ) 选择网关  $u_j$  ( $u_j \in R^2$ ) 作

为服务网关,必满足  $d(v_i, u_j) \leq d(v_i, u_l)$  ( $1 \leq l \neq j \leq K$ ), 并称  $v_i$  包含在  $u_j$  的服务集  $U_j$  中, 即  $v_i \in U_j$ . 网关  $u_j$  与其服务集  $U_j$  的最大距离  $\max_{v_i \in U_j} (d(u_j, v_i))$  称为  $u_j$  的覆盖半径.  $K$  个网关中的最大覆盖半径  $\max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_j} (d(u_j, v_i))$  称为网关集  $\{u_i\}_K$  的覆盖半径.

网关集的覆盖半径是网关部署的重要评价指标,覆盖半径越小通信质量越高.在无线 Mesh 网络中, AP 与网关的距离增加,网络延时就会相应增加,服务质量会随之下降.因此,无线 Mesh 网络网关部署的优化目标为网关集的覆盖半径最小,网关部署模型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \\ \text{s. t.} \quad & \{u_j\}_K \subset R^2 \end{aligned}$$

其中,  $R^2$  为图  $G$  所在的二维平面.

### 2.2 网关部署的几何 $K$ 中心问题

根据网关部署位置的差异,无线 Mesh 网络网关部署问题分为节点  $K$  中心问题和几何  $K$  中心问题.在几何  $K$  中心问题中,网关可以部署在平面  $R^2$  内的任意位置,灵活性较大,网关部署效果较好,理论上能够达到全局最优.但是  $R^2 - V(G)$  中的节点 (非 AP 节点) 不可列,并且不同节点连接的实节点 (AP 节点) 也不同,因此无法确定  $R^2$  的拓扑结构,也无法用节点  $K$  中心问题的算法来求解和分析几何  $K$  中心问题.

虽然  $R^2 - V(G)$  中的点难以确定,但可以按照  $G$  的拓扑结构来分割和归纳.规定无线 Mesh 网络所在的平面  $R^2$  是一个有界闭集.若  $G \subset R^2$ , 则  $\forall v_i \in V(G)$  都有  $v_i \in R^2$ ,  $\forall e_i \in E(G)$  都有  $e_i \in R^2$ . 规定实节点  $v_i$  的通信覆盖范围是一个去心球形邻域:  $B(v_i, r) = \{x \in R^2 \mid 0 < dist(v_i, x) \leq r\}$ , 简记为  $B_i$ . 实节点  $v_i$  和  $v_j$  是邻接节点  $\Leftrightarrow v_i \in B_j \Leftrightarrow v_j \in B_i$ . 定义  $R^2$  上的子集族  $\tau = \{D \mid D \neq \emptyset\}$ ,  $D$  是若干去心球形邻域的交集,即  $D = \bigcap_{i \in I} B_i$ , 其中  $I$  是一个指标集.

**定理 1.**  $D$  中任意节点可以连接  $\{v_i \in V(G) \mid i \in I\}$  中任意节点

证明.  $\forall v_p \in D$ , 有  $v_p \in \bigcap_{i \in I} B_i$ ,  $v_p \in B_i$ , 即  $v_i$  和  $v_p$  可以相互连接.

由定理 1,  $D$  中的点构成一个等价类,在  $G$  中可以连接相同的实节点,将点集合  $D$  称为  $G$  的虚拟节点,将子集族  $\tau$  称为虚拟点集.  $\tau$  是一个有限集,且可以确定  $\tau$  中虚拟节点的邻接实节点,  $\tau$  和  $G$  可以共同组建一个虚拟网络  $S$ . 网络  $G$  的几何  $K$  中心问

题等价于虚拟网络  $S$  的节点  $K$  中心问题,几何  $K$  中心问题的网关部署模型转化为

$$\begin{aligned} \min \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \\ \text{s. t. } \{u_j\}_K \subset V(S) \end{aligned}$$

以图 1 为例,双节点的通信网络图中,实节点  $v_i$  和  $v_j$  互为邻接节点.有界闭集  $R^2 - \{v_i, v_j\}$  中不可列的点可划分为 4 个虚拟节点(等价类):(1)在  $B_i \cap B_j$  中设置网关可以连接  $v_i$  和  $v_j$  两个实节点;(2)在  $B_i - B_j$  (或  $B_j - B_i$ ) 中设置网关可以连接实节点  $v_i$  (或  $v_j$ );(3)在  $R^2 - (B_i \cup B_j)$  中设置网关不能连接任何实节点.4 个虚拟节点和实节点  $v_i, v_j$  组成虚拟网络后,双节点网络在  $R^2$  上的几何  $K$  中心问题转化为虚拟网络上的节点  $K$  中心问题.

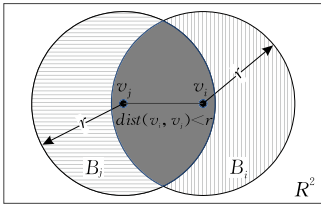


图 1 双节点通信网络图

### 3 基于拓扑学理论的替代原理

虚拟网络  $S$  上的节点  $K$  中心问题是一个 NP 难问题,随着  $S$  中节点数目  $|V(S)|$  增大,计算量会急剧增加. $V(S)$  分为实节点集  $V(G)$  和虚拟点集  $\tau$ ,其中  $|V(G)| = n$ ,  $|\tau|$  的上限是  $2^n - 1$ . 当网络  $G$  的规模较大时, $S$  节点规模会急剧扩张,因此缩小虚拟网络  $S$  的规模是解决几何  $K$  中心问题的必要过程.本文提出一种基于拓扑学理论的多阶替代方法,该方法可以删除大量冗余节点,削减  $S$  的规模.

#### 3.1 替代原理的基本思想

**定义 1.** 如果一个网关  $u_j \in V(S)$  到其服务集  $U_j$  的距离(覆盖半径),不小于另一个节点  $v_p \in V(S)$  到  $U_j$  的距离,即  $\max_{v_i \in U_j} \{d(u_j, v_i)\} \geq \max_{v_i \in U_j} \{d(v_p, v_i)\}$ , 则称  $u_j$  可被  $v_p$  替代.

如果  $u_j$  被  $v_p$  替代,将网关从  $u_j$  转移到  $v_p$  后,  $U_j$  与网关的距离变短,  $u_j$  不会被选为网关,  $K$  个网关的选择范围将从  $V(S)$  缩减为  $V(S) - u_j$ . 虚拟网络  $S$  中存在大量节点替代现象,可以削减  $V(S)$  的规模,减少节点  $K$  中心问题计算量.由前文可知  $V(S)$  分为  $V(G)$  和  $\tau$  两个互不相交的节点集,又因为  $\tau$  中的虚拟节点和  $V(G)$  中的实节点存在较大差异,因此

虚拟网络  $S$  中存在 3 种节点替代:

- (1)  $V(G)$  内部实节点间的替代,简称实节点替代;
- (2)  $\tau$  内部虚拟节点间的替代,简称虚拟节点替代;
- (3)  $V(G)$  和  $\tau$  之间节点的相互替代,简称相互替代.

#### 3.2 实节点替代定理

节点  $v_p \in V(S)$  的邻接节点组成的集合为  $ADJ(v_p) = \{v_i \in V(G) \mid dist(v_i, v_p) \leq r\}$ , 若  $v_p \in V(G)$ , 其邻接集合可简记为  $ADJ_p$ . 网关集  $\{u_j\}_K (u_j \in V(S))$  对应的服务集为  $\{U_j\}_K (U_j \subset V(G))$ ,  $u_j$  的覆盖半径是  $\max_{v_i \in U_j} \{d(u_j, v_i)\}$ , 显然有  $\max_{v_i \in U_j} \{d(u_j, v_i)\} =$

$$\max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ(u_j) \cap U_j} \{d(v_i, v_k)\} \right\} + 1.$$

**定理 2.** 在  $V(G)$  中,  $u_j$  可被  $v_p$  替代, 如果  $ADJ_j \subset ADJ_p \cup v_p$ .

证明. 由前面定义可知  $u_j$  的覆盖半径为  $\max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ_j \cap U_j} \{d(v_i, v_k)\} \right\} + 1$ , 因为  $ADJ_j \subset (ADJ_p \cup v_p)$ ,  $ADJ_j \cap U_j \subset (ADJ_p \cup v_p) \cap U_j$ , 其中  $U_j$  是  $u_j$  的服务集, 所以对于任意节点  $v_i \in U_j$ , 不等式

$$\begin{aligned} \min_{k \in ADJ_j \cap U_j} \{d(v_i, v_k)\} \geq \min_{k \in ADJ_p \cap U_j} \{d(v_i, v_k)\}, \\ \min \{d(v_p, v_i)\} \} \text{ 成立, 即 } \max_{v_i \in U_j} \{d(u_j, v_i)\} \geq \\ \max_{v_i \in U_j} \{d(v_i, v_p)\} \text{ 成立, 因此 } u_j \text{ 可被 } v_p \text{ 替代.} \end{aligned}$$

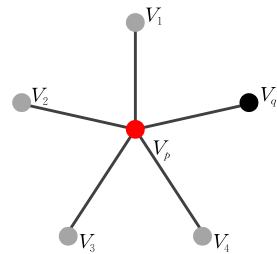


图 2 星型通信网络图

以图 2 所示的星型通信网络图为例,网关若部署在实节点  $v_q$ , 覆盖半径为 2.  $v_q$  的邻接点集  $ADJ_q = \{v_p\}$ ,  $v_p$  的邻接点集  $ADJ_p = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . 由定理 2,  $ADJ_q \subset ADJ_p \cup v_p$ ,  $v_q$  可被  $v_p$  替代, 将网关移至  $v_p$  后, 网络覆盖半径降为 1.

#### 3.3 虚拟节点替代定理

**定义 2.** 称  $D_i$  为极小的, 若  $\forall D_j \in \tau, j \neq i$ , 则有  $D_j \not\subset D_i$ . 子集族  $\tau$  中的极小子集族为  $\tau^* = \{D \in \tau \mid D \text{ 是极小的}\}$ .

**定理 3.**  $\tau$  可被  $\tau^*$  替代.

证明.  $D_i \in \tau, D_i = \bigcap_{j \in I} B_j, I$  是一个指标集, 定义  $ADJ(D_i) = I. \forall D_1, D_2 \in \tau$ , 其邻接节点集分别为  $I_1, I_2$ , 如果  $D_1 \subset D_2$  则  $I_1 \supset I_2$ .  $\tau^*$  是所有极小元组成的集合, 即  $\forall D_i \in \tau \exists D_j \in \tau^*$  使得  $D_i \supset D_j, ADJ(D_i) \subset ADJ(D_j)$ , 由定理 2 可得  $D_i$  可以被  $D_j$  替代, 也就是  $\tau$  可被  $\tau^*$  替代. 同时由  $\tau^*$  定义可知,  $\tau^*$  中任意元素不可相互替代.

与  $V(G)$  中的实节点不同,  $\tau$  中的虚拟节点可以连接原本不能直接通信的实节点, 可以改善网络的连通性能.  $\tau^*$  中的虚拟节点具有较高的度数(DC)、介数(BC)和接近数(CC), 部署为网关后能够缩短覆盖半径. 如图 3 所示的六节点网络图为例,  $\tau^*$  中元素  $D = B_1 \cap \dots \cap B_6$  中的点作为网关时覆盖半径为 1, 而任选一个实节点作为网关时覆盖半径为 3.

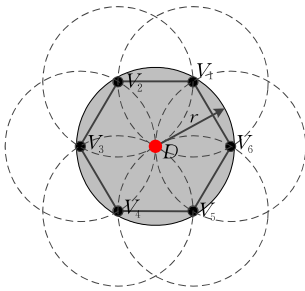


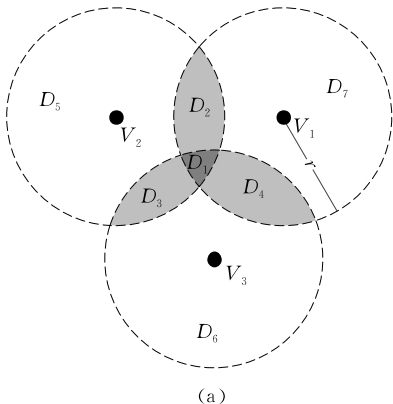
图 3 六节点通信网络

### 3.4 相互替代定理

$V(G)$  和  $\tau$  之间存在 2 种相互替代定理, 其中实节点对虚拟节点的替代定理见定理 4, 虚拟节点对实节点的替代定理见定理 5.

**定理 4.**  $D_j \in \tau$  可以被  $v_p \in V(G)$  替代, 如果  $ADJ(D_j) \subset ADJ_p \cup v_p$ .

证明. 若  $ADJ(D_j) \subset ADJ_p$ , 由定理 2 结论显然成立. 若  $v_p \in ADJ(D_j)$ , 设  $D_j$  的服务集为  $U_j, D_j$  的覆盖半径满足如下条件则:



$$\begin{aligned} & \max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ(D_j)} \{d(v_k, v_i)\} + 1 \right\} \\ & \leq \max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ(D_j)/v_p} \{d(v_k, v_i)\} + 1, \right. \\ & \quad \left. \min\{d(v_p, v_i)\} \right\} \\ & = \max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ_p \cap U_j} \{d(v_k, v_i)\} + 1 \right\} \\ & \leq \max_{v_i \in U_j} \left\{ \min_{v_k \in ADJ_p} \{d(v_k, v_i)\} + 1 \right\}, \end{aligned}$$

综上  $D_j$  可以被  $v_p$  替代.

**定理 5.**  $v_p \in V(G)$  可被  $D_j \in \tau$  替代, 如果  $ADJ_p \subset ADJ(D_j)$ . 证明略.

### 3.5 一阶替代定理

定理 2 到定理 5, 基于邻接集合(1 跳连接实节点组成的集合)的包含关系, 设计了 4 种类型的节点替代方法, 统称这 4 种定理为 1 阶替代定理. 将  $V(S)$  中的节点统称为替代元.  $R^2 - \tau - V(G)$  中的节点无法和  $V(G)$  中的实节点连接, 因此称  $R^2 - \tau - V(G)$  为空替代元, 可以被任意替代元替代. 不可被其他替代元替代的称之为极大元, 所有的极大元组成虚拟网络  $S^*$ , 也称 1 阶替代网络. 由于  $|V(S^*)| < |V(S)|$ ,  $S^*$  比  $S$  的节点规模小, 其节点  $K$  中心问题的时间复杂度较低.

**定理 6.**  $G$  上的几何  $K$  中心问题等价于  $S^*$  上的节点  $K$  中心问题.

图 4 为 3 节点的通信网络, 实节点  $v_1, v_2, v_3$  之间的距离均大于通信半径  $r$ , 在该情况下  $G$  上的节点  $K$  中心问题的覆盖半径为  $\infty$ . 按照第 2 节所提供的方法可以将平面  $R^2$  分割为有限个区域  $\tau = \{D_i\}_{i=1, \dots, 7}$ , 如图 4(a) 所示.  $\tau$  也称为  $G$  的虚拟点集, 将虚拟点集加入无线网络  $G$  后得到虚拟网络  $S, G$  上的几何  $K$  中心问题可以转化为  $S$  上的节点  $K$  中心问题, 如图 4(b) 所示. 利用定理 2 到定理 5 可以得到替代后

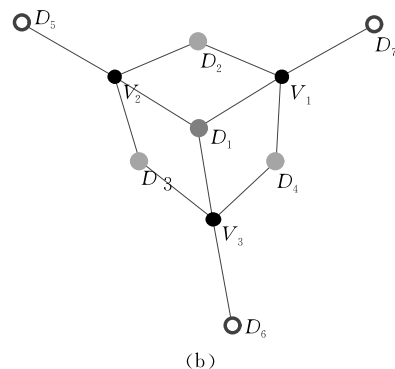


图 4 三节点通信网络图及替代过程

的虚拟网络  $S^*$ , 其中  $V(S^*) = \{D_1\}$ . 将网关节点部署在  $D_1$  区域中的任意一点可以将覆盖半径缩小到 1, 即通过替代定理可以解决  $G$  上的几何  $K$  中心问题并得到全局最优解.

### 3.6 多阶替代引理

一阶替代原理的应用前提是  $G$  的覆盖半径的下极限不小于 1. 假设  $G$  中存在一组网关的覆盖半径为 1. 如果网关  $v_p \in V(G)$  可按照一阶替代定理被节点  $v_q \in V(S^*)$  替代, 则有  $ADJ(v_p) \subset ADJ(v_q)$  或者  $ADJ(v_p) \subset ADJ(v_q) \cup v_q$ , 网关移至  $v_q$  后, 覆盖半径至少不会增加. 但是当  $v_p \notin ADJ(v_q)$  时, 替代后的退化现象使得  $d(v_p, v_q) = 2 > 1$ . 在 Mesh 网络的网关部署过程中, 从成本的角度出发, 不会设置过多的网关节点使覆盖半径等于 1 甚至为 0, 即退化现象不会对网关替代产生负面影响, 因此 1 阶替代原理具有适用性.

限制网关的数目  $K$  后, 网络  $G$  的覆盖半径存在下限  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\}$ . 当下限较大时, 节点替代原理可以忽略退化影响, 应用到 2 跳邻接节点或者更大跳数节点范围内.

**引理 1**(2 阶替代引理). 当  $G$  覆盖半径的下限  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\} > 2$  时, 若  $v_p \in V(G)$  的 2 跳以内的邻接实节点包含在  $v_q \in V(G)$  的 2 跳邻接实节点中, 则  $v_p$  可被  $v_q$  替代.

证明.  $v_p$  的 2 跳以内邻接节点分为两个部分:  $ADJ(v_p)$  和  $ADJ_2(v_p) = \{v_i \in V(G) | d(v_i, v_p) = 2\}$ . 如果  $ADJ(v_p) \subset ADJ(v_q)$  必有  $ADJ_2(v_p) \subset ADJ_2(v_q)$ , 并且根据 1 阶替代原理  $v_p$  可被  $v_q$  替代, 即 1 阶替代是 2 阶替代的充分条件. 若存在  $v_k \in ADJ(v_p)$ ,  $v_k \notin ADJ(v_q)$ ,  $\forall v_i \in V(G)$  且  $v_i$  不是  $v_p$  或  $v_q$  的二跳以内邻接节点, 假设  $d(v_i, v_p) = d(v_i, v_k) + 1$ , 则  $\forall v_z \in ADJ(v_k)$  使得  $d(v_i, v_p) = d(v_i, v_z) + 2$ , 又  $v_z \in ADJ(v_p) \cup ADJ_2(v_q)$  所以  $d(v_i, v_q) \leq d(v_i, v_z) + 2$ , 即  $d(v_i, v_q) \leq d(v_i, v_p)$ . 2 阶替代原理在引理的假设条件下成立.

同理, 当  $G$  覆盖半径的下限  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\} > k$  时,  $k$  阶替代引理成立. 仿照 1 阶替代定理,  $S$  中分别存在  $G$  和  $\tau$  之上的 2 个独立  $k$  阶替代引理, 以及  $G$  和  $\tau$  之间的 2 个相互  $k$  阶替代引理. 将上述 4 条引理的条件适当拓展后, 可以归纳成一个多阶替代引理.

**引理 2**(多阶替代引理). 当  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\} > k$  时 ( $k \geq 1$ ),  $v_p$  可被  $v_q$  替代 ( $v_p, v_q \in V(S)$ ), 如果  $\bigcup_{i=1}^k ADJ_i(v_p) \subset \bigcup_{i=1}^k ADJ_i(v_q) \cup v_q$ .

**定理 7.** 当  $G$  覆盖半径的下限  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\} > k$  时,  $G$  上的几何  $K$  中心问题等价于  $S^{k^*}$  上的节点  $K$  中心问题.

对  $S$  做  $k$  阶替代处理, 可深入优化网络结构, 得到规模更小的虚拟网络  $S^{k^*}$ , 从而降低虚拟网络及其节点  $K$  中心问题的计算复杂度.

## 4 基于多阶替代原理的几何 $K$ 中心问题求解方法

### 4.1 几何 $K$ 中心问题的求解方案

在无线 Mesh 网络  $G$  中加入虚拟点集  $\tau$  后, 其网关部署的几何  $K$  中心问题将会转化为虚拟网络  $S$  的节点  $K$  中心问题. 规模较大虚拟网络  $S$  再经过  $k$  阶替代后, 转化为小规模替代网络  $S^{k^*}$ , 进一步降低了求解难度.

几何  $K$  中心问题的求解过程见图 5, 求解过程涉及 3 个算法: (1) 虚拟点集  $\tau$  的(产生)识别算法; (2) 多阶替代算法(引理 2); (3) 节点  $K$  中心问题的求解算法. 文献[23]提供了一种综合虚拟节点识别和替代的算法, 可以有效识别  $\tau$  并能够识别  $\tau^*$ , 该算法操作简便可行, 本文不再赘述.  $S^{k^*}$  上节点  $K$  中心问题的求解算法较为成熟, 如 GA 算法<sup>[8]</sup>. 下面

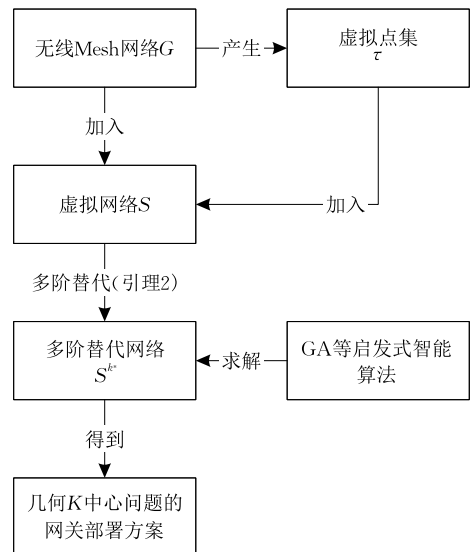


图 5 无线 Mesh 网络几何  $K$  中心问题求解流程图

将着重介绍基于替代原理的多阶替代算法和基于多阶替代网络  $S^{k^*}$  的遗传算法 GASK.

## 4.2 多阶替代算法

替代元的多阶替代关系是一种具有传递性的全序关系,即如果替代元  $A$  可被替代元  $B$  替代, $B$  可被  $C$  替代,则  $A$  可被  $C$  替代.  $S$  中替代元(节点)经过有限次  $k$  阶替代后, $S$  将会收敛于其极大替代元组成的集合  $S^{k^*}$ [25]. 根据引理 2 所阐述的多阶替代定理, $k$  阶替代过程分为 2 个步骤:查找虚拟网络  $S$  中各个节点的  $k$  跳邻接实节点;根据  $k$  跳邻接实节点和引理 2 的替代条件,筛选出极大替代元,并构建虚拟网络  $S^{k^*}$ . 因此,我们将多阶替代算法分为  $k$  跳邻接实节点查找算法  $\text{Adjacent\_Rearch}(S, k)$  和极大替代元筛选算法  $\text{Siving}(k\_adjacent)$  两个部分,算法描述分别见算法 1 和算法 2.

### 算法 1. $\text{Adjacent\_Rearch}(S, k)$ .

输入:虚拟网络  $S$ ,跳数  $k$

输出:每个节点的  $k$  跳邻接实节点  $k\_adjacent$

```

1.  $n \leftarrow |V(S)|$ ; //虚拟网络的规模
2. for  $i=1$  to  $n$ 
3.    $mark[0 \cdots n-1] \leftarrow 0$ ; //初始化标记数组
4.    $queue \leftarrow \text{null}$ ; //初始化队列
5.    $queue[0] \leftarrow i$ ; //将第  $i$  个节点插入队列
6.    $mark[i-1] \leftarrow 1$ ; //将第  $i$  个节点标记为 1
7.   while  $queue$  is not empty do
8.      $head \leftarrow queue[0]$ ; //队列的头结点
9.      $count \leftarrow mark[head]$ ;
10.    if  $count < k$ 
11.      for (earth vertex  $w$  adjacent to  $head$ )
12.        //访问  $head$  的所有邻接节点
13.        if  $mark[w] = 0$ 
14.           $mark[w] \leftarrow count + 1$ ;
15.          add  $w$  to the  $queue$ ;
16.        end if
17.      end for
18.      remove  $head$  from  $queue$ ;
19.      //将  $head$  从  $queue$  中移除
20.      add  $head$  to  $k\_adjacent(i)$ ;
21.      //将  $head$  添加到  $k$  跳邻接节点
22.    else
23.      add  $queue$  to  $k\_adjacent(i)$ ;
24.      remove all the vertex from  $queue$ ;
25.    end if
26.  end while
27. end for
28. return  $k\_adjacent$ 
End  $\text{Adjacent\_Rearch}$ 

```

### 算法 2. $\text{Siving}(k\_adjacent)$ .

输入:每个节点的  $k$  跳邻接实节点  $k\_adjacent$

输出:极大替代元  $m\_adjacent$

```

1. while  $k\_adjacent$  is not empty do
2.    $n \leftarrow \text{length}(k\_adjacent)$ ;
3.    $array[0 \cdots n-1] \leftarrow 0$ ;
4.    $v\_adjacent \leftarrow k\_adjacent(0)$ ;
5.    $array(v\_adjacent) \leftarrow 1$ ;
6.   add  $v\_adjacent$  to  $m\_adjacent$ ;
7.   remove  $v\_adjacent$  from  $k\_adjacent$ ;
8.    $p \leftarrow 0$ ;
9.   while  $k\_adjacent(p)$  is not empty do
10.     $p\_adjacent \leftarrow k\_adjacent(p)$ ;
11.    if  $\text{find}(array(p\_adjacent)) = 0$ 
12.       $p \leftarrow p + 1$ ;
13.    else
14.      remove  $p\_adjacent$  from  $k\_adjacent$ ;
15.    end if
16.  end while
17. end while
18. return  $m\_adjacent$ ;

```

End  $\text{Siving}$

## 4.3 基于多阶替代网络的 GASK 算法

将求解多阶替代网络  $S^{k^*}$  和虚拟网络  $S$  的 GA 算法分别称为 GASK 算法和 GAS 算法,两个算法与 GA 算法的原理一致,GASK 算法的描述见算法 3.

### 算法 3. $\text{GASK}(K, S^{k^*})$ .

输入:网关数目  $K$ ,多阶替代网络  $S^{k^*}$

输出:网关部署方案  $Chrom$

```

1. 初始化种群规模  $PopSize$ ,最大迭代次数  $maxgen$ ,交叉率  $P_n$ ,变异率  $P_m$  等参数;
2. 在  $V(S^{k^*})$  中随机选择  $K$  个节点作为网关并组成一条染色体,将  $PopSize$  条染色体组成种群  $Chrom$ ;
3. 计算每条染色体的覆盖半径,并作为适值  $F$ ;
4. 计算每条染色体的选择概率:
    $P \leftarrow [F - \min(F)] / [\max(F) - \min(F)]$ ;
5. while  $t < maxgen$  do
6.   for  $i=1$  to  $PopSize/2$ 
7.     //正比选择,  $cumsum$  返回  $P$  的累加值
8.      $A \neq B \leftarrow \min\{\arg[\text{rand} < cumsum(P)]\}$ ;
9.     if  $\text{rand} < P_n$ 
10.      双切点交叉  $Chrom[A]$  和  $Chrom[B]$ ,并得到新染色体  $NewChrom1$  和  $NewChrom2$ ;
11.       $Chrom[2i-1] \leftarrow NewChrom1$ ;
12.       $Chrom[2i] \leftarrow NewChrom2$ ;
13.     else
14.       $Chrom[2i-1] \leftarrow Chrom[A]$ ;
15.       $Chrom[2i] \leftarrow Chrom[B]$ ;

```

```

15.     end if
16.   end for
17.   for  $i=1$  to  $PopSize$ 
18.     if  $rand < P_m$ 
19.       随机在  $Chrom[i]$  中选择一个节点, 并替换
       为  $V(S^{k^*})$  中的其他节点;
20.     end if
21.   end for
22.    $t \leftarrow t+1$ ;
23. end while
24. return  $Chrom$ 
End GASK

```

GAS 和 GASK 算法原理和方法类似, 将 GASK 算法中的网络节点集合  $V(S^{k^*})$  替换为  $V(S)$  即可得到 GAS 算法。

## 5 仿真分析

以 50 节点、200 节点、500 节点和 800 节点等 4 种不同规模的随机网络作为仿真对象, 对各种算法进行实验对比和仿真分析。5.1 节利用多阶替代方法分别对 4 种不同规模的随机网络做替代处理; 5.2 节分析了多阶替代算法的时间复杂度; 5.3 节利用 GAS 算法和 GASK 算法, 与 GA 算法、Kmeans 算法、Kmedios 算法和 PSO 算法等进行全面的对比分析实验。5.4 节结合了多阶替代定理与 GASK 算法, 设计了几何  $K$  中心问题的全局最优解的求解方法。仿真实验基于 Inter Core i3 内存 4GB 双核 3.40 MHz 的计算机, 仿真环境是 Matlab2013a。

### 5.1 多阶替代算法仿真分析

表 1 为无线 Mesh 网络经过  $k$  阶替代后  $S^{k^*}$  中节点个数 ( $|V(S^{k^*})|$ ) 的统计结果。图 6 是 50 节点的随机网络经过 3 阶替代后的虚拟网络效果图。

结合表 1 和图 17 可知, 随替代阶  $k$  的不断增大, 虚拟网络  $S^{k^*}$  的规模先急剧下降, 后降低的速度逐渐减慢并最终收敛于 1。经计算, 4 种不同规模的随机网络分别经过 5、16、29、28 阶替代后, 相应的虚拟网络仅剩余一个“节点”(替代元), 对应的几何 1 中心问题的全局最优解的覆盖半径分别是 5、16、29、28。通常情况下, 无线 Mesh 网络会部署多个网关来改善其服务质量 (即  $K > 1$ ), 多阶替代算法无法直接得到全局最优解, 但可以有效削减虚拟网络的规模。以图 17 为例, 4 种规模的虚拟网络分别经过 1 阶、5 阶、11 阶、15 阶替代后, 通过 GASK 算法可以得到几何  $K$  中心问题的最优解, 此时, 虚拟网

络的规模  $|V(S^{k^*})|$  分别是 72、154、152、322 (见表 1), 远小于  $|V(S)|$  和  $|V(G)|$ , 也远小于文献[23]得到的虚拟网络规模。

表 1  $k$  阶替代后虚拟网络规模统计表

替代阶 $k$	50 节点 随机网络	200 节点 随机网络	500 节点 随机网络	800 节点 随机网络
原始虚拟网络	564	3112	7112	11627
文献[23]	<b>119</b>	<b>568</b>	<b>1395</b>	<b>2043</b>
1 阶	<b>72</b>	368	992	1490
2 阶	46	253	578	1041
3 阶	25	213	458	837
4 阶	9	188	383	714
5 阶	1	<b>154</b>	321	628
6 阶	1	133	280	573
7 阶	1	103	247	526
8 阶	1	93	212	488
9 阶	1	73	187	448
10 阶	1	63	169	423
11 阶	1	43	<b>152</b>	397
12 阶	1	22	145	377
13 阶	1	11	133	353
14 阶	1	4	122	<b>322</b>
15 阶	1	3	113	284

图 6(a) 是未经过任何替代的虚拟网络  $S$ , 由图可知网络  $G$  衍生出的虚拟节点集合  $\tau$  规模较大, 加重了  $S$  的节点  $K$  中心问题的计算复杂度; 图 6(b) 是 1 阶替代后的虚拟网络  $S^*$ , 在  $S^*$  中虚拟节点和实节点都得到了有效削减; 图 6(c) 和图 6(d) 分别是 2、3 阶替代后的虚拟网络, 网络规模和结构都得到进一步削减和优化, 并且虚拟网络  $S^{k^*}$  ( $k \geq 3$ ) 中不包含实节点 ( $V(S^{k^*}) \cap V(G) = \emptyset$ )。在虚拟网络的多阶替代过程中剩余节点多为虚拟节点, 即在无线 Mesh 网络的几何  $K$  中心问题中, 网关以较大的概率部署在虚拟节点上, 这与节点  $K$  中心问题有着较大的差异。

### 5.2 多阶替代算法时间复杂度分析

无线 Mesh 网络的规模  $|V(G)| = n$ , 假设虚拟网络的规模  $|V(S)| = m_1$ , 经过  $k$  阶替代后虚拟网络规模  $|V(S^{k^*})| = m_2$ 。图 7 是规模在  $[100, 1100]$  之间均匀分布的 100 个随机网络, 与虚拟网络规模的关系曲线, 由曲线可知  $m_1$  与  $n$  呈现正比例关系:  $m_1 \approx 24 \times n$ 。图 8 则显示了  $m_2$  与  $n$  呈现对数关系:  $m_2 \approx 71 \times \ln(n)$ 。

$k$  阶替代算法中  $k$  跳邻接实节点查找算法和极大替代元筛选算法其时间复杂度分析如下:

(1)  $k$  跳邻接实节点查找算法

假设虚拟网络  $S$  中, 节点的  $k$  跳邻接实节点规



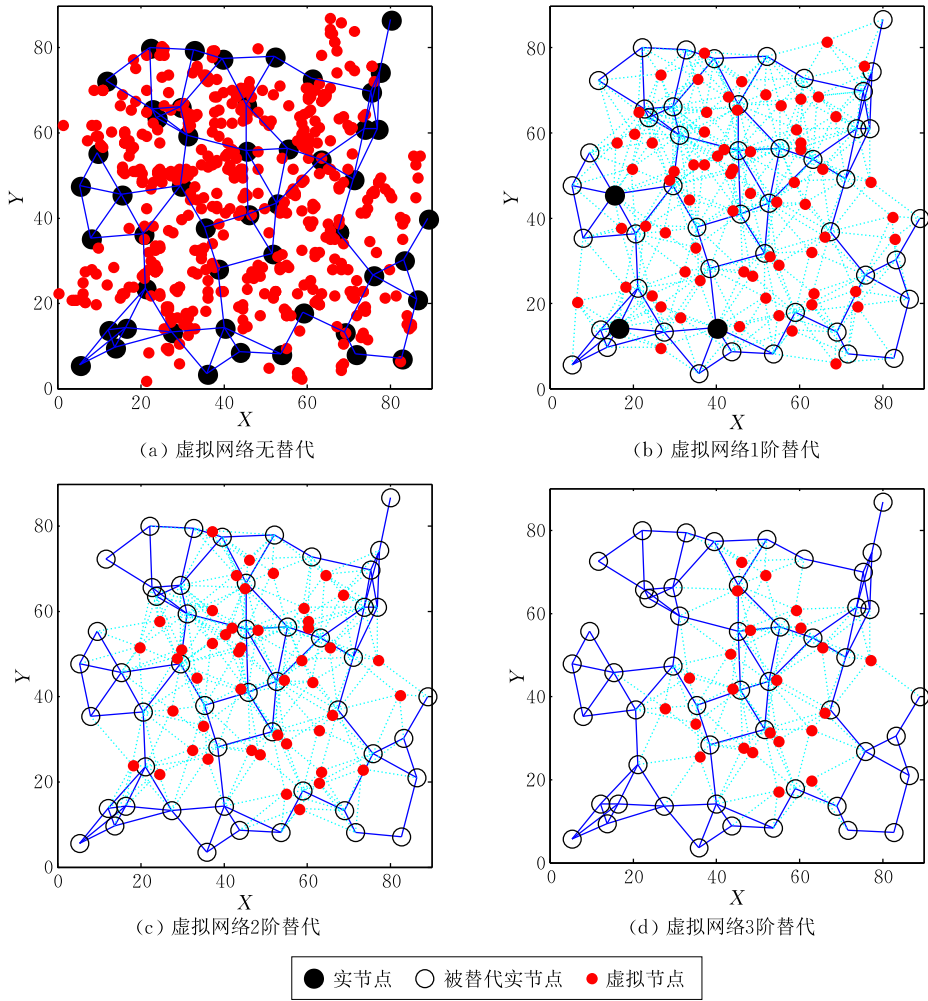


图 6 前 3 阶替代后虚拟网络效果图

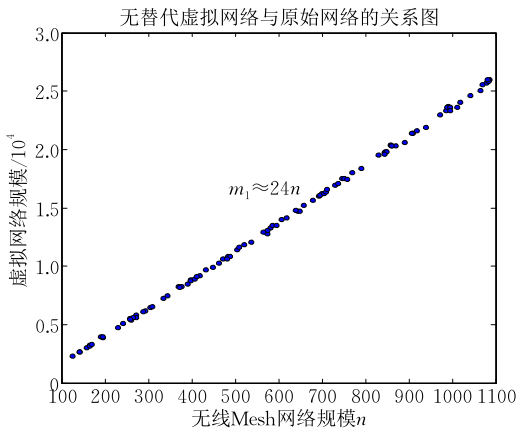


图 7 虚拟网络规模与 Mesh 网络规模的对应关系

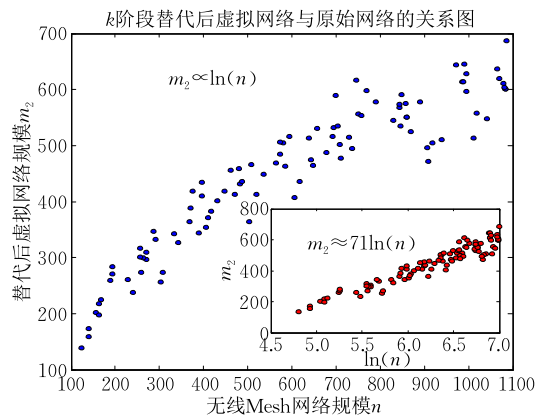


图 8 多阶替代网络与原始网络规模的对应关系

模的均值为  $n_k$ 。无线 Mesh 网络符合随机网络的特性，节点度服从高斯分布，度均值较小，接近度较高，因此  $n_k \ll n$ 。对于  $k$  跳邻接实节点规模为  $n_k$  的节点，其广度优先遍历查询算法的基本操作次数为  $n_k$ ，所以查找算法的基本操作次数为  $n_k \times m_1$ ，时间复杂度为  $O(m_1)$ 。

### (2) 极大替代元筛选算法

在极大替代元筛选算法中，首先对节点按照  $k$  跳邻接实节点规模作降序排列，再利用位向量方法对  $k$  跳邻接实节点作匹配及合并操作。第 1 个节点匹配合并操作次数为  $(m_1 - 1) \times n_{k1} + m_1 - 1$ ， $n_{k1}$  为第 1 个节点的  $k$  跳邻接实节点规模。当各个节点  $k$

跳邻接实节点都无法相互匹配时, 合并操作次数为 0, 匹配操作次数达到最大为  $\frac{m_1-1+1}{2}(m_1-1) \times \langle n_k \rangle$ , 即筛选算法的时间复杂度最差为  $O(m_1^2)$ .

在筛选算法的实际过程中, 经历较少的几次匹配合并操作后, 剩余节点规模达到或接近收敛水平 ( $71 \times \ln(n)$  规模), 并在之后的算法过程中, 合并操作的次数接近于 0. 此时算法的基本操作次数近似为  $[(m_1-1) \times n_{k1} + m_1 - 1] + \frac{\theta+1}{2}(\theta-1) \times (\langle n_k \rangle + 1)$ , 其中  $\theta = 71 \lceil \ln(n) \rceil$ , 极大替代元筛选算法的实际时间复杂度为  $O(\ln^2(n)) + O(m_1)$ .

综上可知, 替代算法的时间复杂度为  $O(m_1) + [O(\ln^2(n)) + O(m_1)] = O(n)$ . 如表 2 所示, 启发式算法的时间复杂度通常大于  $O(n)$ . 在解决虚拟网络  $S$  的节点  $K$  中心问题过程中, 假设启发式算法的时间复杂度为  $O(m_1^c)$ ,  $c \geq 1$ , 则基于多阶替代网络  $S^{k*}$  的启发式算法的时间复杂度为  $O(m_2^c) + O(n) = O(\ln^c(n)) + O(n)$ . 由表 2 可知, 多阶替代算法适用于多种节点  $K$  中心问题优化算法, 并能够降低算法

的时间复杂度.

表 2 算法时间复杂度对比表

算法名称	虚拟网络 $S$		多阶替代网络 $S^{k*}$	
	Kmedios	GA	Kmedios	GA
时间复杂度	$O(tKm_1)$	$O(m_1^c)$ [26]	$O(tK \ln(n)) + O(n)$	$O(\ln^3(n)) + O(n)$

在表 2 中,  $K$  为网关的数目,  $t$  为 Kmedios 算法的最大迭代次数.

### 5.3 网关部署优化实验对比和效果分析

本节利用 GASK 算法和 GAS 算法与经典的 Kmedios 算法、GA 算法、PSO 算法和 Kmeans 算法对比实验.

利用 6 种算法分别求解 50 节点、200 节点、500 节点和 800 节点等 4 种不同规模的随机网络的几何  $K$  中心和节点  $K$  中心问题, 设定网关个数  $K=5$ , 规定各个算法重复实验 20 次. 6 种算法的参数设置见表 3, 计算结果见表 4 和表 5. 算法收敛状态见图 9~图 12, GASK 算法的网关部署效果见图 13~图 16.

表 3 算法参数表

算法	PopSize	maxgen	$p_n$	$p_m$	$\omega$	$C_1$	$C_2$	$V_{\max}$
Kmedios	1	100	—	—	—	—	—	—
Kmeans	1	100	—	—	—	—	—	—
PSO	100~200	100	—	—	0.9	1.9	2.5	15
GASK	100~200	100	0.8	0.20	—	—	—	—
GAS	100~1000	400~1000	0.9	0.05	—	—	—	—
GA	100~200	200	0.9	0.10	—	—	—	—

表 4 算法对小规模网络网关部署问题的优化结果

网络规模	算法	最大覆盖半径	平均覆盖半径	最小覆盖半径	覆盖半径标准差
50 节点	Kmedios	4	3.25	3	0.4443
	Kmeans	5	3.10	2	0.7881
	PSO	3	2.85	2	0.3663
	GASK	<b>2</b>	<b>2.00</b>	<b>2</b>	<b>0</b>
	GAS	5	5.00	5	0
	GA	3	3.00	3	0
200 节点	Kmedios	13	10.40	7	1.8750
	Kmeans	12	8.65	6	1.5985
	PSO	8	6.80	6	0.5231
	GASK	<b>6</b>	<b>6.00</b>	<b>6</b>	<b>0</b>
	GAS	15	15.00	15	0
	GA	7	7.00	7	0

表 5 算法对大规模网络网关部署问题的优化结果

网络规模	算法	最大覆盖半径	平均覆盖半径	最小覆盖半径	覆盖半径标准差
500 节点	Kmedios	22	17.50	16	1.3955
	Kmeans	20	18.30	15	1.6575
	PSO	14	13.30	13	0.4830
	GASK	<b>13</b>	<b>12.10</b>	<b>12</b>	<b>0.3612</b>
	GAS	21	21.00	21	0
	GA	15	13.70	13	0.6749

(续 表)

网络规模	算法	最大覆盖半径	平均覆盖半径	最小覆盖半径	覆盖半径标准差
800 节点	Kmedios	26	19.75	16	2.5105
	Kmeans	22	18.40	16	2.2100
	PSO	17	15.70	15	0.7327
	GASK	<b>16</b>	<b>15.30</b>	<b>15</b>	<b>0.4830</b>
	GAS	32	32.00	32	0
	GA	17	16.40	16	0.5477

在表 3 中,  $PopSize$  代表种群规模,  $maxgen$  代表最大迭代次数,  $p_n$  和  $p_m$  分别代表遗传算法中的交叉概率和变异概率,  $\omega$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $V_{max}$  分别代表粒子群算法中的惯性参数、自主学习因子、社会学习因子和最大初速度. 虚拟网络  $S$  规模较大, 因此 GAS 需要较大的种群规模和较高的迭代次数.

Kmedios 和 Kmeans 算法的基本原理相似, 但 Kmedios 算法基于节点  $K$  中心问题, Kmeans 算法基于几何  $K$  中心问题. 由表 4 可知, Kmeans 算法的优化效果和稳定性优于 Kmedios 算法, 说明几何  $K$  中心问题的网关部署方式改善了网络的拓扑结构, 降低了网络的覆盖半径, 优于节点  $K$  中心问题的网关部署方式. PSO 算法和 Kmeans 算法都是基于几何  $K$  中心问题的网关部署算法. 由表 4 和表 5 可知, PSO 算法的优化效果和稳定性优于 Kmeans 算法, 说明群体智能算法的种群具有多样性, 能够避免算法陷入局优. PSO 算法和 GASK 算法都是基于几何  $K$  中心问题的群体智能算法. 由表 4 和表 5 可知, GASK 算法的优化效果和稳定性优于 PSO 算法, 表明多阶段替代网络  $S^k$  的拓扑结构和网络规模优于网络  $G$ .

结合表 1、表 4 和表 5, 分析 3 种基于不同网络的遗传算法, 可知, 经过  $k$  阶替代处理后的虚拟网络  $S^k$  规模较小, 使得 GASK 具有良好的稳定性和优化效果. 与 GA 相比, GASK 优化效果更加优良, 这是因为 GA 解决的是  $G$  上的节点  $K$  中心问题, 而 GASK 解决的是  $G$  上的几何  $K$  中心问题. 对比 GAS 和 GASK 可知, 两种算法优化结果差异较大, 这是由于虚拟网络  $S$  规模较大, 即便给 GAS 设置较高的种群规模和迭代次数(见表 2) 依然无法达到理想的优化效果, 说明通过替代定理来控制虚拟网络规模和优化网络结构是解决无线 Mesh 网络几何  $K$  中心问题的一个关键步骤.

图 9~图 12 是 Kmean 算法、Kmedios 算法、PSO 算法和 GASK 算法的迭代收敛过程. 由于 GASK、GAS、GA 算法原理相同, 图中仅展示了 GASK 的收敛过程.

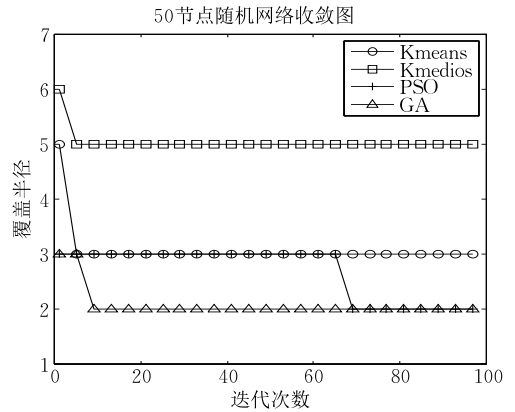


图 9 算法迭代收敛轨迹对比(50 节点网络)

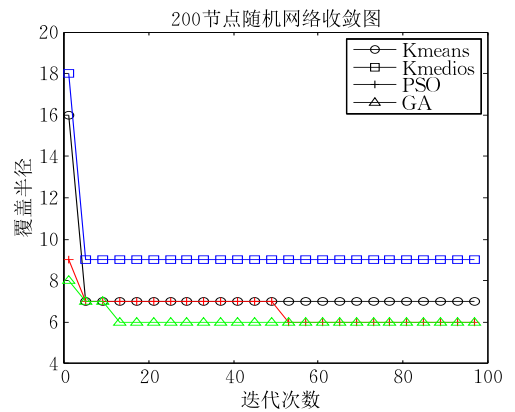


图 10 算法迭代收敛轨迹对比(200 节点网络)

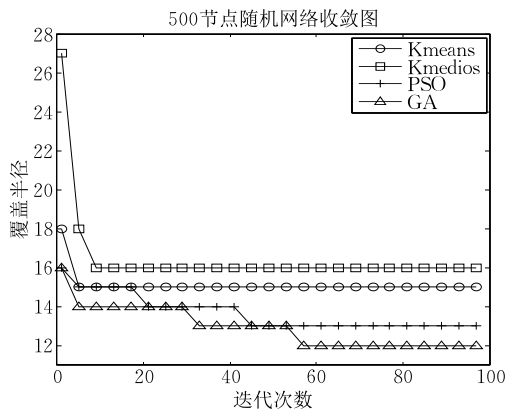


图 11 算法迭代收敛轨迹对比(500 节点网络)

与 Kmeans 和 Kmedios 等串行算法不同, PSO 算法和 GASK 算法均为并行算法, 多粒子的种群使算法拥有良好的初值, 并且种群的多样性保障了算

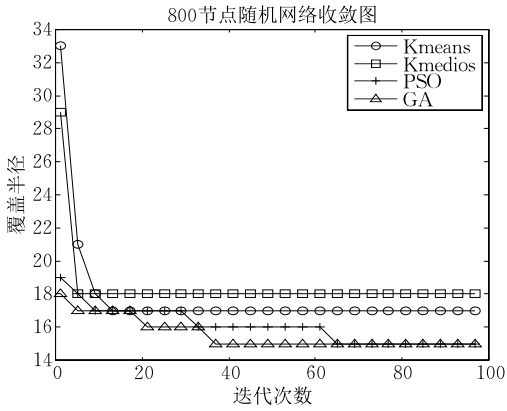


图 12 算法迭代收敛轨迹对比(800 节点网络)

法的探索能力,因此算法能够避开局部最优防止过早收敛,得到更加优良和稳定的优化结果.

图 13~图 16 是 GASK 算法在 4 个不同规模随机网络得到的最佳网关部署效果,横纵轴均为坐标轴.针对不同网络规模的随机网络结构,给定网关数  $K=5$  的情况下,以最小最大半径为优化目标,利用 GASK 算法求得的几何  $K$  中心网关部署和节点分组效果图.

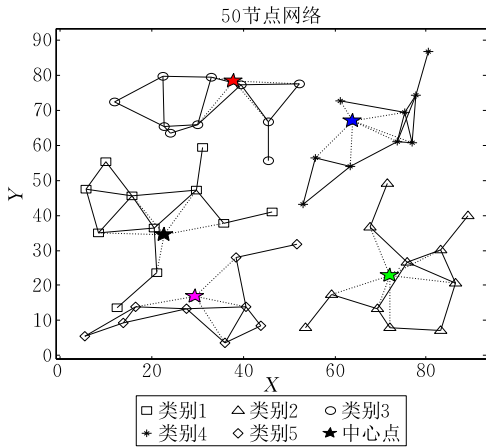


图 13 GASK 算法网关部署效果(50 节点规模)

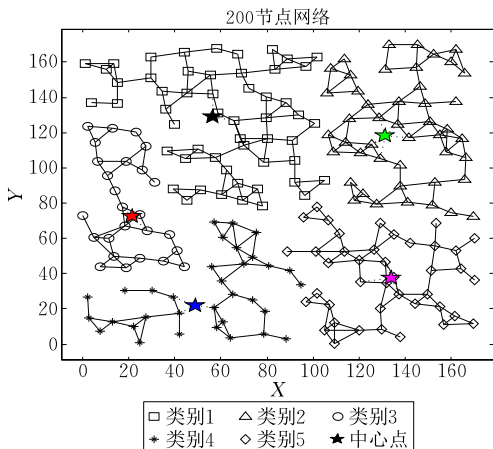


图 14 GASK 算法网关部署效果(200 节点规模)

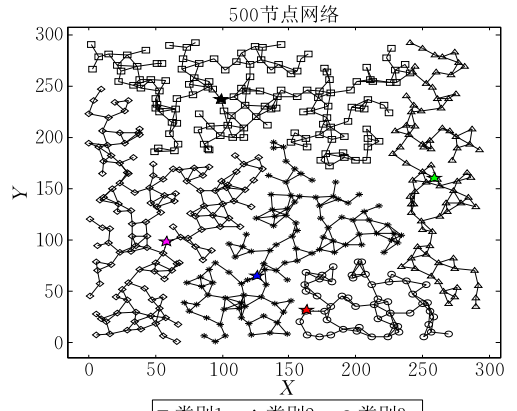


图 15 GASK 算法网关部署效果(500 节点规模)

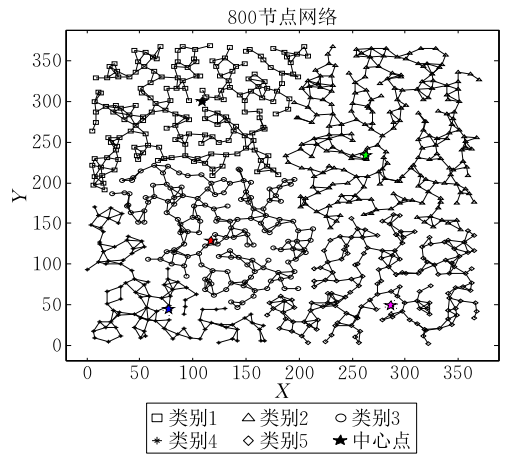


图 16 GASK 算法网关部署效果(800 节点规模)

### 5.4 多阶替代引理与全局最优解关系分析

由表 1 可知,替代阶  $k$  越大, $k$  阶替代网络规模  $|V(S^k)|$  越小, GASK 算法的解空间越小,得到全局最优解的概率越大.由引理 2 可知,替代阶  $k$  不可以超过全局最优解  $\inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\}$ .

当替代阶  $k \geq \inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq K} \max_{v_i \in U_K} (d(u_j, v_i)) \right\}$  时,存在全局最优解被排除出  $V(S^k)$  的风险,会导致 GASK 算法优化效果变差.

因此,在使用 GASK 算法时应注意,多阶替代算法的替代阶  $k$  不能超过 GASK 算法的当前最优结果.本文提出一种利用 GASK 算法和引理 2 得到近似全局最优解的方法:从一个较小的值开始,不断增大替代阶  $k$ ,此时,虚拟网络规模不断减小,GASK 算法的覆盖半径不断减小,当  $k$  和当前最小覆盖半径相等时停止继续增大  $k$ .当前最小覆盖半径就是 GASK 算法能够得到的最佳结果,十分接近全局最优值.

图 17 显示了在 4 种不同规模的随机网络中,由 GASK 算法得到的覆盖半径和  $|V(S^k)|$  随替代阶

$k$  的变化趋势. 由图可知, 随着替代阶  $k$  不断增大,  $|V(S^k)|$  逐渐降低, 并最终收敛到 1 个节点; GASK 算法得到的覆盖半径先下降, 当  $k$  超过临界点后

急剧上升. 4 种不同规模网络的替代阶临界点分别是 1、5、11、14, GASK 算法得到的最佳覆盖半径分别是 2、6、12、15.

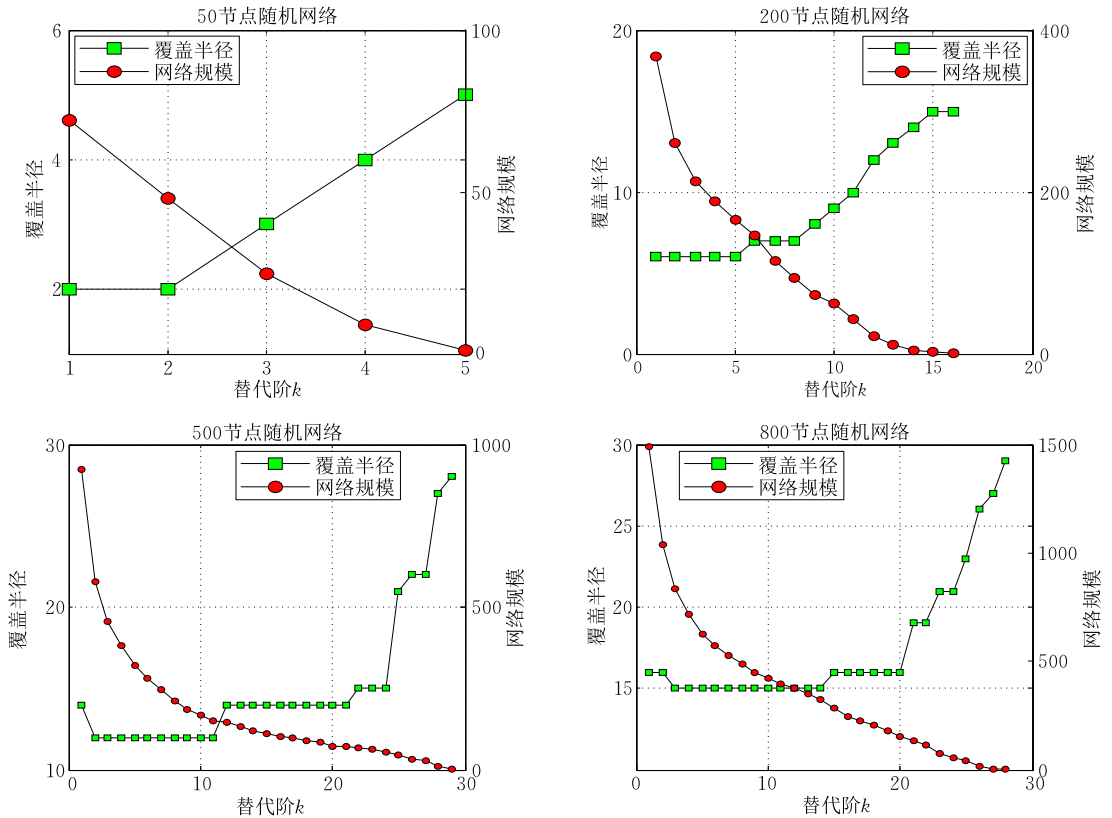


图 17 最佳覆盖半径和网络规模随替代阶的变化趋势

## 6 结 论

本文以无线网状网几何  $K$  中心网关部署问题为研究对象, 基于拓扑学理论首次提出了替代原理概念和方法, 并提供了理论完备性分析和证明, 同时成功应用于无线网络拓扑优化实践. 本文首先将无线 Mesh 网络中复杂的几何  $K$  中心问题转化为较简单的节点  $K$  中心问题, 然后经过多阶替代处理以后, 剔除大量冗余节点, 从而产生较小规模结构稳定的虚拟网络, 在降低了求解难度的同时发掘网络所包含的一些特性, 达到深入优化网络结构的目的. 我们提出的替代原理能够充分优化网络结构, 提高算法的求解效果和效率. 本文首次提出的替代原理理论和方法是一种新的网络优化思路, 不仅能够应用于无线 Mesh 网络拓扑结构优化, 也可应用于社交网络、传感器网络和物流网络等其他复杂网络的分析 and 优化.

## 参 考 文 献

- [1] Zhang Yan, Luo Ji-Jun, Hu Hong-Lin. Wireless Mesh Networking: Architectures, Protocols and Standards. New York: Auerbach Publications, 2008
- [2] Luo Jun-Zhou, Wu Wen-Jia, Yang Ming. Mobile Internet: Terminal devices, networks and services. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(11): 2030-2051 (in Chinese)  
(罗军舟, 吴文甲, 杨明. 移动互联网: 终端、网络与服务. 计算机学报, 2011, 34(11): 2030-2051)
- [3] Zhu Jin-Kang. Wireless Mesh technology and networks. ZTE Technology Journal, 2008, 14(20): 1-7 (in Chinese)  
(朱近康. 无线 Mesh 技术和网络. 中兴通讯技术, 2008, 14(20): 1-7)
- [4] Li Fan, Wang Yu. Gateway placement for throughput optimization in wireless Mesh networks. Mobile Networks and Applications, 2008, 13(1/2): 198-211
- [5] Prasad R, Wu H. Gateway deployment optimization in cellular Wi-Fi Mesh networks. Journal of Networks, 2006, 1(3): 31-39
- [6] Aoun B, Boutaba R, Iraqi Y. Gateway placement optimization

- in WMN with QoS constraints. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2006, 24(11): 2127-2136
- [7] He Bing, Xie Bin, Agrawal D P. Optimizing deployment of Internet gateway in Wireless Mesh Networks. *Computer Communications*, 2008, 31(7): 1259-1275
- [8] Zeng Feng, Chen Zhi-Gang, Deng Xiao-Heng. Minimum-cost gateway placement in wireless Mesh networks with QoS constraints. *Journal on Communications*, 2009, 30(6): 80-88(in Chinese)  
(曾锋, 陈志刚, 邓晓衡. 无线 Mesh 网中费用最小且 QoS 约束的网关部署算法研究. *通信学报*, 2009, 30(6): 80-88)
- [9] Wu Wen-Jia, Yang Ming, Luo Jun-Zhou, Wang Wei. A gateway placement scheme with interference constraints and load balance in wireless Mesh networks. *Chinese Journal of Computers*, 2012, 35(5): 883-897(in Chinese)  
(吴文甲, 杨明, 罗军舟, 王维. 干扰约束和负载均衡的无线 Mesh 网络网关部署策略. *计算机学报*, 2012, 35(5): 883-897)
- [10] Seyedzadegan M, Othmanet M, Mohd B A, et al. Zero-degree algorithm for Internet Gateway placement in backbone wireless mesh networks. *Journal of Network and Computer Applications*, 2013, 36(6): 1705-1723
- [11] Huang Shu-Qiang, Zhou Ji-Peng. Wireless Mesh gateway selecting and AP clustering algorithm based on clustering. *Journal of South China University of Technology*, 2011, 39(4): 38-43(in Chinese)  
(黄书强, 周继鹏. 基于聚类的无线 Mesh 网络网关选择及 AP 分组算法. *华南理工大学学报*, 2011, 39(4): 38-43)
- [12] Huang Shu-Qiang, Zhou Ji-Peng, Zhang Zhen. Clustering attribute analysis on nodes of wireless Mesh networks. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2012, 42(2): 219-223(in Chinese)  
(黄书强, 周继鹏, 张震. 无线 Mesh 网络节点聚类属性研究. *东南大学学报(自然科学版)*, 2012, 42(2): 219-223)
- [13] Plesnik J. On the computational complexity of centers locating in a graph. *Applications of Mathematics*, 1980, 25(6): 445-452
- [14] Megiddo N, Supowit K J. On the complexity of some common geometric location problems. *SIAM Journal on Computing*, 1984, 13(1): 182-196
- [15] Clark B, Colbourn C, Johnson D. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 1991, 86(1/2/3): 165-177
- [16] Breu H, Kirkpatrick D. Unit disk graph recognition is NP-hard. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1998, 9(1/2): 3-24
- [17] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. An improved algorithm for the  $p$ -center problem on interval graphs with unit lengths. *Computers and Operations Research*, 2007, 34(8): 2215-2222
- [18] Wu Wei-Li, Du Hong-Wei, Jia Xiao-Hua, et al. Minimum connected dominating sets and maximal independent sets in unit disk graphs. *Theoretical Computer Science*, 2006, 352(1/2/3): 1-7
- [19] Thai M T, Zhang Ning, Tiwari R. On approximation algorithms of  $k$ -connected  $m$ -dominating sets in disk graphs. *Theoretical Computer Science*, 2007, 385(1/2/3): 49-59
- [20] Chen H, Zhu Y, Ma L, Niu B. Multiobjective RFID network optimization using multiobjective evolutionary and swarm intelligence approaches. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014(3): 1-13
- [21] Gong Y J, Shen M, Zhang J, Kaynak O. Optimizing RFID network planning by using a particle swarm optimization algorithm with redundant reader elimination. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2012, 8(4): 900-912
- [22] Durocher S, Jampani K R, Lubiw A, Narayanan L. Modeling gateway placement in wireless networks: Geometric  $k$ -centres of unit disc graphs. *Computational Geometry*, 2011, 44(5): 286-302
- [23] Huang Shu-Qiang, Wang Gao-Cai, Zhang Zhen. A method of geometric  $K$ -center gateway deployment of wireless Mesh network. *Chinese Journal of Computers*, 2013, 36(7): 1475-1484(in Chinese)  
(黄书强, 王高才, 张震. 一种无线 Mesh 网络几何  $K$  中心网关部署求解方法. *计算机学报*, 2013, 36(7): 1475-1484)
- [24] You Cheng-Ye. *Basic Topology*. Beijing: Peking University Press, 1997(in Chinese)  
(尤承业. *基础拓扑学讲义*. 北京: 北京大学出版社, 1997)
- [25] Hewitt E, Stromberg R K, Sun Guang-Run. *Real Analysis and Abstract Analysis*. Tianjin: Tianjin University Press, 1974(in Chinese)  
(Hewitt E, Stromberg R K, 孙广润. *实分析与抽象分析*. 天津: 天津大学出版社, 1974)
- [26] Zhang Yu-Shan. *Some Studies on the Convergence and Time Complexity Analysis of Evolutionary Algorithms* [Ph. D. dissertation]. South China University of Technology, Guangzhou, 2013(in Chinese)  
(张宇山. *进化算法的收敛性与时间复杂度分析的若干研究* [博士学位论文]. 华南理工大学, 广州, 2013)



**HUANG Shu-Qiang**, born in 1977, Ph. D., professor. His current research interests include wireless mesh networks and mobile Internet.

**WANG Gao-Cai**, born in 1976, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include system performance evaluation and stochastic methods.

**ZHANG Zhen**, born in 1975, Ph.D., associate professor. His main research interest is parallel distributed processing system.

**XU Yong-Jun**, born in 1979, Ph. D., associate professor.

His current research interests include Internet of Things and data fusion.

**AN Zhu-Lin**, born in 1980, Ph. D. , senior engineer.

His current main research interests include distributed network time synchronization and data fusion.

## Background

Geometric  $K$ -center gateway deployment is an important and hard problem of network topology optimizing in wireless mesh networks, but there is no good solution to the problem of geometric  $K$ -center problem. To solve the hard problem, we can transform the geometric  $K$ -center problem into a node  $K$ -center problem and this is a feasible method and idea. But problem transforming is still a hard question.

So we have done some research on the problem of geometric  $K$ -center gateway deployment of wireless mesh networks, we first introduce the concepts and algorithms of great alternative region and virtual network, the plane nodes are classified into number of categories according to connectivity, and each class is incorporated as a virtual node to the original network structure to form a new virtual network, so that the original problem is transformed into gateway node deployment problem of virtual network. Virtual network node gateway deployment is a conventional NP-hard problem and too many virtual nodes are produced. To reduce the size of the virtual network fully and reduce the solution interval, substitution principles based on topology theory are put forward at first, and then an improved genetic algorithm is introduced to solve the gateway deployment for optimized virtual network structure. Simulation results show that

**DENG Yu-Hui**, born in 1974, Ph. D. , professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include green computing, data storage.

**LI Yang**, born in 1989, M. S. candidate His current main research interest is intelligent algorithm.

substitution principle can fully optimize the network structure and reduce the size of the virtual network and the genetic algorithm can get better result than other intelligent algorithms based on original network. On the other hand, our proposed method and results can be applied to network analysis and optimize for other network architecture, such as social networks, wireless sensor networks and so on.

This work is partly supported by the National High Technology Research and Development Program (863 Program) of China(No. 2013AA040404), the National Natural Science Foundation of China (Nos. 61262003, 61272073, 61373125, 61303245), the Guangdong Province Natural Science Foundation (Nos. S2013020012865, 2014A030313386), the Educational Commission Fund of Guangdong Province (No. 2013KJ CX0018) and the Fundamental Research Funds of the Central Universities for Jinan University (21615439, 21615443). In this paper, we first propose the concept and theory of substitution principle, and we give the theoretical analysis and prove the completeness of the substitution principle. The substitution principle is an important innovation and the idea can be used into other network topologies optimization.