

基于变分贝叶斯层次概率模型的非刚性点集配准

何淇淇 林 刚 周 杰 杨 扬

(云南师范大学信息学院 昆明 650500)

(云南师范大学模式识别与人工智能实验室 昆明 650500)

摘 要 非刚性点集配准是计算机视觉和模式识别领域的基础研究问题,现今的非刚性点集配准算法在存在大量离群点、噪声、点集对应关系缺失、旋转和形变情况下,不能非常准确地评估出两个点集间的对应关系.本文通过交替执行点集对应关系评估和空间转换更新两个步骤来逐步恢复点集间一一对应关系.在对应关系评估步骤,首先本文基于有限重尾学生 t 分布隐变量混合模型(student- t distribution Latent Mixture Model,简称 TLMM)构造变分贝叶斯层次概率模型(Variational Bayes Hierarchical Probability Model,简称 VBHPM)并将其分为对应关系评估组件和离群点聚合组件,分别用来评估点集间对应关系和聚合离群点,同时使用贝叶斯线性回归方法来抵抗噪声的干扰.其次本文加入 Dirichlet 先验分布来动态调节模型的混合比例,为对应关系缺失的点分配较小的混合比例以保持点集结构的稳定性.在空间转换更新步骤,本文基于变分贝叶斯(Variational Bayes,简称 VB)框架来迭代更新模型参数,并提出树状平均场因式分解方法来维持模型参数间的依赖关系,以获得更紧致的变分下界.此外,本文提出自适应全局-局部约束策略来维持点集间结构的稳定性,抵抗形变和旋转影响的同时实现从局部到全局的约束过程.最后,本文采用了双阶段先验退火方案,在退火过程中使用 Gamma 先验分布来动态调节精度,实现由粗到精的配准过程.在实验部分,本文不仅测试了 VBHPM 的性能,而且展示了点集和图像配准的结果,并与当前流行的 13 种算法进行了比较,VBHPM 皆能展现较准确的配准结果和较高的精度.

关键词 非刚性点集配准;变分贝叶斯层次概率模型;贝叶斯线性回归;树状平均场;自适应全局-局部约束策略;双阶段先验退火方案

中图法分类号 TP18

DOI号 10.11897/SP.J.1016.2021.01866

Non-Rigid Point Set Registration Based on Variational Bayes Hierarchical Probability Model

HE Qi-Qi LIN Gang ZHOU Jie YANG Yang

(School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming 650500)

(The Laboratory of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Yunnan Normal University, Kunming 650500)

Abstract Non-rigid point set registration is fundamental research in computer vision and pattern recognition. The current popular non-rigid point set registration algorithms cannot accurately estimate correspondences between two point sets with lots of outliers, noises, occlusion, rotation, and large deformation. In this paper, we alternately perform correspondence estimation and transformation updating to gradually recover correspondences. In the correspondence estimation, we first construct a variational Bayes hierarchical probability model (VBHPM) based on a finite student- t distribution latent mixture model (TLMM) and divide it into the correspondence estimation component and outlier aggregation component, which are respectively used to estimate correspondences and to cluster outliers. Meanwhile, the Bayesian linear regression is used to resist noises. Besides, we add the prior distribution of Dirichlet to dynamically adjust the mixture

proportion, and assign a smaller mixture proportion to the points with occlusion to maintain the structural integrity of the point set. In the transformation updating, we iteratively update model parameters based on the variational Bayes (VB) framework and propose the tree-structured mean-field to maintain dependencies among parameters, to obtain a tighter variational lower bound. In addition, an adaptive global-local constraint strategy is proposed to maintain the structural stability of point set, resist deformation and rotation and realize the local-global constraint process. Finally, we adopt the two-stage prior annealing schedule where the prior distribution of Gamma is used to dynamically adjust the precision in the annealing to implement the coarse-to-fine registration. In the experiment, the performance of VBHPM is tested, and the registration results in point set and image registration demonstrate that VBHPM can achieve accurate registration results and higher precision compared with thirteen state-of-the-art algorithms.

Keywords non-rigid point set registration; variational Bayes hierarchical probability model; Bayesian linear regression; tree-structured mean-field; adaptive global-local constraint strategy; two-stage prior annealing schedule

1 引言

非刚性点集配准被广泛运用于遥感图像配准^[1]、运动跟踪^[2]、医学影像分析^[3]等领域。当存在大量离群点、噪声、对应关系缺失、旋转和较大程度形变时,如何正确且有效地评估点集间的对应关系是非刚性点集配准的研究难点。

当前的非刚性点集配准模型大致可以分为两类:(1)非迭代模型。仅使用某些特定特征来一次性评估点集间对应关系;(2)迭代模型。交替执行对应关系评估和空间转换更新两个步骤来评估点集间的对应关系。目前,当存在离群点、噪声、对应关系缺失、旋转和较大形变时的对应关系评估和目标方程优化是该领域的两个重要热点研究方向,其核心为:(1)在对应关系评估问题中,离群点和噪声不仅会增加算法的复杂度,还会干扰点集间正确对应关系的评估,所以需要离群点和噪声进行显式建模来减小估计偏差。由于通常缺少先验信息,点集间的空间转换常常被默认为普适性更强的非线性关系。但是当点集对应关系缺失时,这种非线性关系容易引起过拟合问题。此外,当点集发生较大程度形变或旋转时,空间转换的先验信息缺失也会产生不适定问题,导致点集发生过度形变或塌缩;(2)在目标方程优化问题中:最大期望算法(Expectation Maximization,简称 EM)^[4-5]和变分贝叶斯(Variational Bayes,简称 VB)^[6]推断是目标方程优化中的主流框架。但是 EM 在处理大规模数据时效率较低且容易陷入局部最优解,而 VB 虽然可以加快收敛速度,但是常用的

平均场因式分解方法会降低后验分布近似的准确性。

本文从对应关系评估和目标方程优化两个方面来介绍当前研究热点问题:①离群点问题;②对应关系缺失,旋转和形变问题;③局部最优解问题;④后验近似问题。

(1)对应关系评估:①离群点问题。当前处理离群点的两类方法为:(a)使用对离群点更鲁棒的对应关系估计方法或模型。GMMREG(Gaussian Mixture Model-based Registration)^[7]使用最大化似然估计(Maximum Likelihood Estimate,简称 MLE)通过最小化点集间的 L2 距离,来评估两个混合高斯分布的空间转换函数参数。MA-L2E(MA L2-minimizing Estimate)^[8]使用形状上下文特征和鲁棒性更好的 L2 估计来评估点集的对应关系,从而建立更可靠的空间转换函数。Tsin 等人提出的核相关(Kernel Correlation,简称 KC)^[9]方法,通过优化两组点集间的非线性空间转换函数来最大化两组核密度的相似性,该方法仅利用了高斯核函数对离聚类中心较远点的不敏感性来减弱离群点的影响。然而当存在大量离群点时,以上方法往往会产生一定的估计偏差。由于 L2 估计比二次惩罚曲线更平滑^[8],因此离群点也会被分配到较低的概率值。此外惩罚曲线尾部依赖于人工退火来调整精度,在所有源点集和目标点集共用一个方差的情况下,混合高斯组件的比例不能根据每个点的上下文变化而自动调整,因此以上方法对不同分布的离群点的抵抗性较差。LMR(Learning for Mismatch Removal)^[10]设计了一个学习通用分类器来确定任意假定匹配的正确性,从而剔

除离群点. SIR(Stepwise Image Registration)^[11]设计了内点池和候选池,在迭代过程中分别存放筛选出来的内点和不确定点,并使用这些内点逐步完善空间转换函数. LPM(Locality Preserving Matching)^[12]和 GLPM(Guided Locality Preserving Matching)^[13]通过建立数学模型推导出具有线性时间和线性空间复杂性的封闭解来保持两个图像之间潜在真实匹配的邻域结构,以便于从潜在的内点集中移除离群点.但是上述方法均未对离群点进行显式建模,其配准精度完全依赖于对应关系估计方法对离群点的抑制性. Peel 等人^[14]提出了学生 t 分布混合模型(Student-t Mixture Model,简称 SMM)并将其加入到 EM 框架中,通过调整重尾分布的尾巴长度来处理不同分布的离群点,其中重尾学生 t 分布比高斯分布有更长的尾巴,可以为离聚类中心较远的点分配较小的混合比例,在迭代中优化目标方程对随机数据进行聚类时同时抵抗离群点的影响. Gerogiannis 等人^[15]将 SMM 应用到基于像素的图像配准中,通过最小化像素块间的距离来减小对应点间的差异.但是以上方法都没有对离群点进行显式建模,而是完全依赖于 SMM 对离群点的抵抗性,因此模型不能很好抵抗多簇离群点. (b) 增加额外项建模离群点,以减弱离群点的影响. VFC(Vector Field Consensus)^[4]基于贝叶斯框架使用 Tikhonov 正则化方法来处理点集,并引入一个潜在变量来抵抗离群点. 迭代使用匈牙利算法来最小化点集间的 L2 估计,并采用向量场一致性原则来估计空间转换函数参数,但是匈牙利算法的计算复杂度较高. RPM(Robust Point Matching)^[16]使用薄板样条函数对点集进行建模,并且在空间转换矩阵里加入额外列来表示离群点,使得对应矩阵在线性分配中限制了离群点的数量. MPM(Mixture Point Matching)^[17]和 CPD(Coherent Point Drift)^[18]都建立了具有相同协方差的高斯混合模型(Gaussian Mixture Model,简称 GMM),通过优化刚性和非刚性空间转换函数来最小化两个点集间的欧式距离,获得一一对应关系. GL-CATE(Global-Local Correspondence and Transformation Estimation)^[5]分别使用欧式距离和形状上下文距离分别作为全局特征和局部特征来构造 GMM,以克服单一特征的 GMM 对点集相邻结构辨识力较弱的缺陷.但是以上基于 GMM 的方法不能自动调节模型尾部,从而忽略了离聚类中心较远的目标,因此导致内点的筛选产生一定偏差.此外,算法^[5,17-18]都添加了均匀分布额外项来聚合离群点,但是固定的额外项无法完全准确地捕获非

均匀分布的离群点,因此导致点集间对应关系评估出现偏差. VBPSM(Variational Bayesian Point Set Matching)^[6]使用额外的 GMM 来聚合离群点,以减轻因离群点位置密集而造成的估计偏差,但是算法对处理呈现非高斯分布的离群点缺乏鲁棒性.

② 对应关系缺失、旋转和形变问题. 当前处理对应关系缺失、旋转和形变问题的两类方法为: (a) 优化分布间差异评估方法. KL 散度(Kullback-Leibler divergence)是衡量分布间差异的最广泛方法之一^[6], KL 散度对于分布差异度量的不对称性往往会低估对源点集分布的支持度,这使得目标点集局限定位于某个源点集. L2E(L2-minimizing Estimate)^[7-8]使用对称散度来评估分布间的差异,以解决由于不对称度量而产生的点集间对应关系评估失效问题. 尽管这些算法在统计学习过程中通过逐渐对缺失对应关系的高斯组件进行重新加权,使其至少获得一个较小的混合比例,但是这些方法仍然只能间接处理模型中对应关系缺失的问题. (b) 加入空间约束项. 空间约束能够维持点集间结构的稳定性,以解决点集间缺少对应关系,发生较大规模形变和大尺度旋转造成的点集间结构失效问题. 当前大多方法^[5,19-20]使用空间转换约束来维持点集间结构的稳定性. CPD^[18]将空间一致性约束加入到目标方程中,使得点集在空间转换过程中保持一致的运动方向,但是这种单一的一致性约束往往会阻碍点集运动的自由度,使得点集中发生较大程度形变的部分产生配准偏差. RPM^[16]使用图的相邻边来描述点集的局部结构,当两个图相匹配时即得到最优的对应关系. 由于点集间局部关系往往比全局关系更加可靠,所以 GL-CATE^[5]提出将全局-局部约束加入到目标方程的正则化项中,但是这种正则化项约束是固定的,不能根据点集空间转换的状态来切换约束的强度. Ma 等人^[19]提出了全局和局部相结合的点集特征描述方法,根据点集间的全局和局部差异来评估对应关系. LLT(Local Linear Transforming)^[21]引入了新的几何约束,通过使用非线性降维来保持点集间局部相邻结构. Yang 等人^[20]提出局部约束和空间曲率约束相结合的方法来克服点集的大尺度形变. 然而由于上述方法只采用固定的空间约束来限制点集的空间转换,而且不能根据点集转换前的历史结构来评估约束项的强度,使得算法的普适性和灵活性较差,不能同时解决点集配准中存在的形变、旋转和对应关系缺失问题.

(2) 目标方程优化: ③ 局部最优解问题. EM 框架^[4-5,19,22]是目标方程优化中的主流框架之一. 基于

EM 框架的算法 RPM^[16]、MPM^[17]、CPD^[18] 和 LLT^[21] 通过计算目标方程的最大似然值来估计模型中的参数,由于似然函数往往表示为对数形式且包含隐变量,使其导数求解较复杂.此外基于 EM 框架的优化算法对目标方程的参数初始值较敏感,从而影响算法的收敛效率并容易使算法陷入局部最优解.基于 EM 框架的点估计方法^[5,19] 在处理大规模数据时效率较低且容易陷入局部最优解.虽然这种情况可以通过使用确定性退火(deterministic annealing)技术来摆脱局部最优解,但是现有的退火方法^[7,16,18] 通常只是直接更新方差,而忽略了过去迭代积累的信息对未来潜在信息的影响.

④ 后验近似问题. VB 框架^[6] 也是目标方程优化中的主流框架之一. VBPSM^[6] 基于 VB 框架对模型参数执行贝叶斯估计,相比于 MLE 而言,在聚类模型或者空间转换函数中加入先验信息来对后验分布进行约束,有效避免了目标方程陷入局部最优解问题.相比于最大后验估计(Maximum a Posterior, 简称 MAP)^[4,19] 而言,贝叶斯估计方法计算了完整的后验概率值.但是目前基于 VB 框架的目标方程优化方法通常采用平均场因式分解来近似模型后验的边缘概率密度,但是忽略了模型参数间依赖关系,因此造成近似后验分布和真实分布之间存在一定的偏差.

本文构建了变分贝叶斯层次概率模型(Variational Bayes Hierarchical Probability Model,简称 VBHPM),并基于变分贝叶斯推断将非刚性点集配准问题重建为目标方程优化问题.即在 VB 框架下,根据加入的先验信息不断迭代更新参数的后验概率,直至空间转换后的参数代理和真实分布后验的相似度达到最大,同时恢复两个点集间一一对应关系.本文的贡献总结如下:

(1) 为了解决①离群点问题,本文采用聚合和回归两个步骤来处理离群点(本文将噪声视为特殊离群点).在聚合步骤中,本文基于有限重尾学生 t 分布隐变量混合模型(student-t distribution Latent Mixture Model,简称 TLMM)构建 VBHPM,并将其分为对应关系评估组件和离群点聚合组件,分别用于对应关系评估和离群点聚合.在回归步骤中,本文使用贝叶斯线性回归的方法,加入零均值高斯分布来拟合噪声,使得模型能够更好地抵抗离群点.为了解决②中点集对应关系缺失问题,根据贝叶斯共轭先验理论^[23],本文使用 Dirichlet 先验分布来动态调节 TLMM 的混合比例,为缺失对应关系的点分配较小的混合比例,以保持点集结构的稳定性.

(2) 为了解决②中点集旋转和形变问题,本文提出了自适应全局-局部约束策略,通过使用精度的先验尺度参数来自动调节全局和局部约束强度,并将该约束项加入空间转换的能量方程中,使得在空间转换过程充分考虑点集的历史结构,从而更灵活地选择点集间全局和局部结构约束比例,实现从局部到全局的约束过程.同时,为避免点集在空间转换过程中出现过度形变或塌缩的问题,本文使用双阶段先验退火方案来增加配准过程的稳健性,即对精度的 Gamma 先验分布进行退火^[6],从而实现由粗到精的配准过程.此外,为了解决③局部最优解和④后验近似问题,本文采用基于先验信息调节的 VB 框架来近似复杂后验分布,并提出了树状平均场因式分解方法以保持参数间的依赖关系,从而获得更紧凑的变分下界.

2 方 法

2.1 方法总述

同时给定分别由 L 和 Z 个点组成的 d 维的源点集 $E = \{e_l\}_{l=1}^L$ 和目标点集 $Y = \{y_z\}_{z=1}^Z$,点集中所有元素都用向量坐标表示.图 1 展示了非刚性点集配准的目的,即当存在离群点、噪声、旋转、形变和对应关系缺失的情况下准确地恢复点集间的对应关系.其中“o”和“+”分别表示含有离群点的源点集和目标点集,往往源点集和目标点集的数量不同.源点集和目标点集的配准问题可以表示为空间转换函数 T 和目标点集 Y 的联合概率密度的边缘积分形式^[6],表示如下:

$$p(Y|E) = \int p(Y, T|E) p(T) dT \tag{1}$$

等式(1)中,空间转换函数 $T = \sum_{l=1}^L \{\hat{t}_l\}$ 用于对源点集进行空间转换(仿射及非刚性)和回归分析,并将转换后的源点集映射到目标点集空间中,此在目标点集空间中产生了一个与源点集有关且包含 L 个

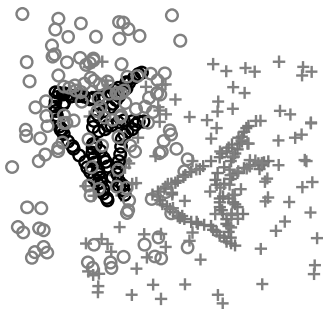


图 1 非刚性点集配准问题展示

子组件的混合模型,本文基于重尾分布 TLMM 构建混合模型 VBHPM,为了消除多簇离群点对配准精度的影响,本文在 VBHPM 中加入额外包含 L_0 个子组件的 TLMM 来聚合离群点. 根据变分贝叶斯理论,每个目标点集都可以根据后验概率聚类到 VBHPM 中的某个子组件中,并依据此概率来评估两个点集间的对应关系. 通过不断使用先验信息对混合模型中的参数进行更新,使得目标点集在 VBHPM 中的概率密度足够小,如此反复迭代直至证据下界 (Evidence Lower Bound, 简称 ELBO) 收敛. 具体流程如图 2 所示,给定源点集和目标点集后,通过交替进行点集对应关系评估和空间转换更新两个步骤直至 ELBO 收敛,从而恢复两个点集间的一一对应关系.

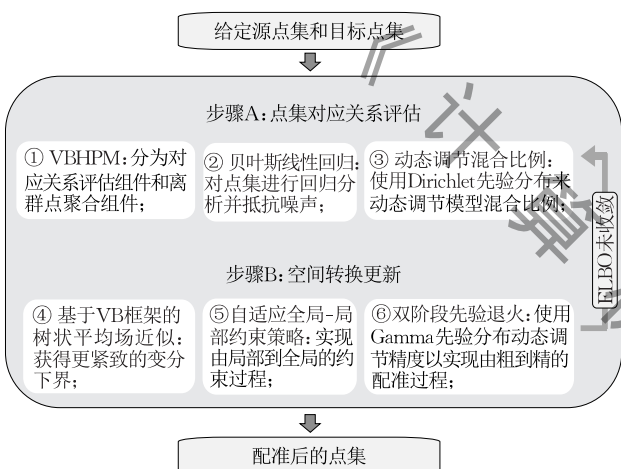


图 2 非刚性点集配准流程图

(1) 对应关系评估步骤: ① 在 2.2.1 节里, 本文基于 TLMM 构建 VBHPM 并将其分为对应关系评估组件和离群点聚合组件, 对应关系评估组件对目标点集进行聚类, 离群点聚合组件用于抵抗多簇离群点的干扰; ② 在 2.2.2 节里, 本文使用贝叶斯线性回归方法对点集进行回归分析, 抵抗噪声干扰; ③ 在 2.2.3 节里, 基于贝叶斯共轭先验理论^[6], 本文使用 Dirichlet 先验分布来动态调节模型混合比例, 以避免由于点集对应关系缺失造成的过度形变或塌缩问题.

(2) 空间转换更新步骤: ④ 在 2.3.1 节里, 本文提出基于 VB 框架的树状平均场因式分解方法来维持模型中参数间的依赖关系, 以获得更紧致的变分下界; ⑤ 在 2.3.2 节里, 本文提出自适应全局-局部约束策略来自动调节空间转换约束的正则化强度, 实现由局部到全局约束过程; ⑥ 在 2.3.3 节里, 本文采用由 Gamma 先验分布调节的双阶段先验退火

方案来实现由粗到精的配准过程.

2.2 点集对应关系评估

为了在大量离群点和点集对应关系缺失的情况下准确恢复点集间一一对应关系, 本文构建了基于 TLMM 的 VBHPM, 以空间转换后的源点集均值为聚类中心来评估与目标点集间的对应关系, 并使用贝叶斯线性回归对空间转换后的源点集均值与目标点集所对应的映射函数重新回归. 此外, 根据贝叶斯共轭先验理论^[23], 本文使用 Dirichlet 先验分布来动态调节模型混合比例, 解决点集间对应关系缺失的问题.

2.2.1 变分贝叶斯层次概率模型

(1) 构建 VBHPM

为了消除多簇离群点对匹配精度的影响, 准确评估空间转换后源点集均值和目标点集间坐标的差异, 本文基于 TLMM 构建 VBHPM, 并将其分为不同混合比例的点集对应关系评估组件和离群点聚合组件. 如等式(2)所示, 对应关系评估组件由 L 个不同混合比例的 TLMM 构成. 该组件以源点集映射到目标点集空间中 L 个 TLMM 为聚类中心, 根据后验概率对目标点集进行聚类. 随着迭代进行, 两个点集间的对应关系逐渐由一对多更替为一对一. 离群点聚合组件由 L_0 个不同混合比例的 TLMM 构成, 用于辅助对应关系评估组件来抵抗离群点簇的影响. 应当注意的是, 与需要对离群点聚合子组件进行准确评估的算法不同^[18], VBHPM 中的离群点聚合组件的所有参数都由先验信息进行调节, 并且这些参数的后验信息在变分逼近真实后验分布的过程中自动更新, 所以只需给定离群点聚合子组件的估计值或者通过 BOD (Birth-or-Death) 过程^[23] 来确定其数量, 就可以对点集中的离群点进行有效聚类.

在配准过程中, 目标点集中包含的离群点会使对应关系评估组件的均值 T 产生偏移, 空间转换后包括离群点在内的所有源点集都能在 T 中获得相应的混合子组件, 这些子组件的均值由先验分布的均值来决定. 但是往往没有目标点集会落入这些子组件中, 这些子组件的后验混合概率仍然由其先验概率决定, 因此可以根据 T 的后验概率来判定出与目标点集有对应关系的点 (内点) 和没有对应关系的点 (离群点), 而不是简单地根据点间的欧式距离来判定内点和离群点. VBHPM 表示如下:

$$p(y_z | I) = \sum_{l=1}^L \pi_l St(y_z | T(e_l), (m_{z_l} \Gamma_l)^{-1}) + \sum_{l=L+1}^{L+L_0} \pi_l St(y_z | \mathcal{X}_l, (n_{z_l} \Lambda_l)^{-1}) \quad (2)$$

定义 $I = \{T, m, n, \pi, \Lambda, \mathcal{X}, \Gamma\}$, 混合比例 π 满足约束条件 $\sum_{l=1}^{L+L_0} \pi_l = 1$. T, Γ 和 m 分别为对应关系评估组件的均值, 各向异性精度和规模参数; $\mathcal{X}, \Lambda$ 和 n 分别为离群点聚合组件的均值, 各向异性精度和规模参数. 学生 t 分布 St 可表示高斯与 Gamma 分布的卷积形式, 如等式(3)所示, Gamma 函数调节学生 t 分布的规模参数使其可以成为一类更广泛的分布, 从而灵活地适应不同规模的离群点. 为了方便共轭推理, 学生 t 分布表示如下:

$$St(Y|\mu, \gamma, t) = \int_R \mathcal{N}(Y|\mu, (o\gamma)^{-1}) \mathcal{G}\left(o \middle| \frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) do \quad (3)$$

式中, μ 和 γ 分别表示高斯分布 $\mathcal{N}$ 的均值和精度, 其中规模参数 o 由自由度为 $t/2$ 的 Gamma 函数 $\mathcal{G}$ 调节. 每个源点集可以根据后验概率聚合到 L 个 TLMM 分量中, 并以概率形式表示点集间的模糊对应关系. 为了方便计算, 本文引入指示变量 $K = \sum_{z=1}^Z \sum_{l=1}^{L+L_0} \{k_{zl}\}$ 来表示目标点集隶属于某个混合分量, 其中 k_{zl} 为 1-of- $L+L_0$ 的二值向量, 因此等式(2)可重新表示为等式(4):

$$p(y_z | I) = \prod_{l=1}^L St(y_z | T(e_l), (m_{zl} \Gamma_l)^{-1})^{k_{zl}} \times \prod_{l=L+1}^{L+L_0} St(y_z | \mathcal{X}_l, (n_{zl} \Lambda_l)^{-1})^{k_{zl}} \quad (4)$$

式中, 通过空间转换更新, 在目标点集空间中产生了一个具有 L 个分量的 TLMM, 每个目标点集都可视为由 VBHPM 随机生成, 并且皆可根据后验概率聚类到某个混合子组件中. 根据共轭先验理论^[6,23], 当 $1 \leq l \leq L$ 时, 精度 Γ 由 Gamma 先验分布 $\mathcal{G}(\Gamma | \rho_0/2, \phi_0/2)$ 进行动态调节. 当 $L+1 \leq l \leq L+L_0$ 时, 均值 $\mathcal{X}$ 和精度 Λ 由 Gaussian-Wishart 先验分布 $\mathcal{NW}(\mathcal{X}, \Lambda | \eta_0, \zeta_0, \epsilon_0, \beta_0)$ 进行动态调节. 上述模型参数更新详见 2.3.4 节.

(2) 层次化概率图模型

本文将点集配准过程中各变量间的依赖关系表示为图 3 所示的层次化概率图模型, 该概率图模型分为两个 TLMM 组件, 分别聚类目标点集和估计离群点. 本文提出的层次概率图模型不同于其他贝叶斯网络图模型, 主要区别为: ① 本文基于 TLMM 构建 VBHPM 并将其分为对应关系评估组件和离群点聚合组件, 每个 TLMM 混合分量都有不同尺度的各向异性协方差矩阵. 此外, 在对应关系评估组件里, 本文使用 Gamma 分布对混合分量的尾部进行动态调节来抵抗离群点, 同时加入贝叶斯回归来

估计噪声; ② 本文将非刚性点集配准问题建模为概率模型优化问题, 将所有的参数和变量设置为有先验的随机变量, 同时引入指示变量来描述点集与混合模型分量间的对应关系. 此外, 本文将从局部到全局的点集配准设想用概率值线性表示为由先验参数自动调节的空间转换函数, 加强了设想的可推理性; ③ 在 VB 框架下采用先验分布调节参数可以有效避免目标方程优化过程中的局部最优解问题. 此外本文采用树状结构平均场因式分解方法来保持后验近似中变量间的依赖关系, 以获得更紧致的变分下界.

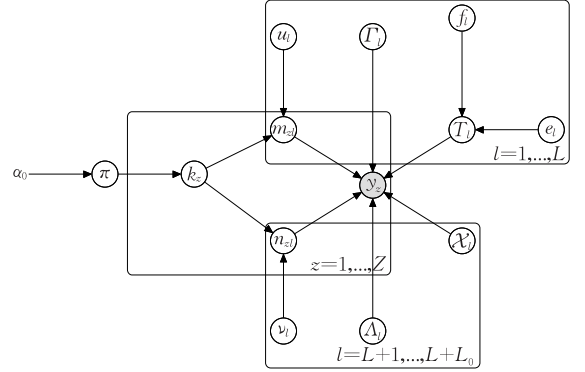


图 3 非刚性点集配准层次概率图模型

图 3 中的层次化概率图模型描述了非刚性点集配准过程中模型结构及参数: ① 对应关系评估组件的精度 Γ 用于调节点集间模糊对应关系的评估范围; ② 空间转换函数 T 为对应关系评估组件的均值, 由仿射参数矩阵 A 和径向基函数参数矩阵 B 组成; ③ 离群点聚合组件的均值 $\mathcal{X}$ 和精度 Λ 分别控制混合组件的聚合中心和聚合范围; ④ 噪声方差变量 f 在回归过程中估计噪声; ⑤ 指示变量 K 被分解为 m_{zl} 和 n_{zl} 来分别描述目标点集隶属于两个混合组件的概率.

定义 VBHPM 的参数和变量集合 $\Theta = \{K, M, N, \Lambda, \mathcal{X}, \Gamma, \pi, T, f\}$. 在等式(5)中, 规模参数 $M = \sum_{z=1}^Z \sum_{l=1}^L m_{zl}$ 和 $N = \sum_{z=1}^Z \sum_{l=L+1}^{L+L_0} n_{zl}$ 分别描述目标点集与两个混合组件的隶属关系. 根据层次化概率图模型, 目标点集和模型参数的联合密度 $p(Y, \Theta)$ 表示为

$$p(Y, \Theta) = p(Y|\Theta) p(M|K) p(\mathcal{X}) p(\Gamma) p(N|K) \times p(T|f) p(f) p(\Lambda) p(K|\pi) p(\pi) \quad (5)$$

2.2.2 贝叶斯线性回归

为了使得目标点集和源点集的坐标最大化重合, 本文引入了空间转换函数 T 作为点集配准过程中的隐变量, 用于指导源点集 E 进行空间转换并作为混合模型的均值对目标点集 Y 进行聚类分析. 此外本文还使用贝叶斯线性回归来对源点集进行回归

分析的同时降低噪声干扰。

本文将非刚性点集配准问题建模为 VBHPM 优化和参数估计的问题,即寻找一个最优的空间转换函数 T 使得边际概率 $p(Y|E)$ 最大化. 空间转换函数 T 将源点集中的点映射到目标点集的空间中, 本文定义空间转换函数如下:

$$T(E) = \mathbf{A}E + \mathbf{B}G \quad (6)$$

等式(6)中,空间转换函数 T 表示为线性转换项 $\mathbf{A}E$ 和非线性转换项 $\mathbf{B}G$ 相加的形式^[18]. 其中 $\mathbf{A}$ 是 $d \times (d+1)$ 维的仿射转换参数矩阵,控制源点集进行旋转,平移等仿射转换,并且该矩阵的第 $d+1$ 列为平移向量. 非线性转换项使用可复制的核希尔伯特空间 (Reproducing Kernel Hilbert Space, 简称 RKHS)^[24] 来表示点集的非刚性形变,其中 $d \times Z$ 维参数矩阵 $\mathbf{B}$ 是高斯径向基函数 G (Gaussian Radius Basis Function, 简称 GRBF) 的系数. 当空间转换函数 T 被指定为等式(6)时,寻找最优的空间转换函数的问题就转换为参数矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的估计问题. 为了在配准过程中消除高斯噪声对参数估计的影响和对源点集进行回归分析使得混合模型更具有一般性,本文基于贝叶斯线性回归理论,在空间转换函数中添加了方差为 f^{-1} 的 d 维零均值高斯噪声^[6],因此空间转换函数 T 重新表示为等式(7).

$$p(T(E)) = \prod_{i=1}^L \mathcal{N}(T(e_i) | \mathbf{A}e_i + \mathbf{B}G, f^{-1}) \quad (7)$$

2.2.3 动态调节的混合比例

在贝叶斯共轭先验理论中^[23],指数族分布的先验概率和后验概率属于同分布簇. 根据多项式分布的先验信息为 Dirichlet 分布^[6] 理论,本文采用 Dirichlet 分布作为混合比例 π 的先验信息,动态调节 VBHPM 中的对应关系评估组件和离群点聚合组件的混合比例,为对应关系缺失的点分配较小的混合比例以保持点集间结构的稳定性,避免在配准过程中出现过度形变或塌缩.

等式(8)中,混合比例 π 概率分布由超参数为 α_0 的 Dirichlet 先验分布 $\mathcal{D}(\pi | \alpha_0)$ 调节. 指示变量 K 是评估目标点隶属于不同学生 t 分布的关键因素,当目标点属于第 l 个 TLMM 分量时, k_{zt} 等于 1,否则等于 0. 指示变量 K 的条件概率表示如下:

$$p(K | \pi) = \prod_{i=1}^{L+L_0} \pi_i^{k_{zi}} \quad (8)$$

2.3 空间转换更新

为了避免在目标方程优化中陷入局部最优解并获得更紧致的变分下界,本文使用基于变分贝叶斯的树状平均场来近似真实后验分布. 为了使得源点

集能够更稳健地进行空间转换更新并准确恢复点集间的一一对应关系,避免在空间转换过程中点集出现过度扭曲或塌陷的问题,本文提出了自适应全局-局部约束策略和双阶段先验退火方案来实现由局部到全局的约束过程和由粗到精的配准过程.

2.3.1 基于 VB 框架的树状平均场近似

本文基于 VB 框架采用参数代理来近似真实后验分布以避免目标方程陷入局部最优解,同时提出了树状平均场因式分解方法来保持参数间的依赖关系,以获得更紧致的变分下界.

变分贝叶斯后验近似方法是指用呈现某种特定分布的参数代理来近似复杂难处理的真实后验分布,将最小化分布间差异问题转换为最大化后验问题,并加入先验分布来调节参数代理,以避免目标方程优化过程中陷入局部最优解. 等式(9)中的边缘条件概率密度 $\ln p(Y|E)$ 是参数代理要近似的真实后验分布,由 ELBO 和 KL 散度相加组成.

$$\ln p(Y|E) = \mathcal{L}(q(\Theta), Y) + \text{KL}(q(\Theta) \| p(\Theta|Y)) \quad (9)$$

其中,ELBO 表示为

$$\mathcal{L}(q(\Theta), Y) = \int q(\Theta) [\ln p(Y, \Theta) - \ln q(\Theta)] d\Theta \quad (10)$$

等式(9)中, $\mathcal{L}$ 被称为证据下界或者变分自由能,等式(10)中的 $p(Y, \Theta)$ 是目标点集和参数的联合概率密度. 经过等式(11)中的一系列 VBEM 迭代过程,非凸函数 $\mathcal{L}$ 不断逼近边缘条件概率密度的似然函数,参数代理 $q(\Theta)$ 和真实后验分布 $p(Y, \Theta)$ 间的相似度逐渐增大, KL 散度逐渐变小. 当 KL 散度趋近于 0 时,空间转换后的源点集和目标点集最大程度重合. VBEM 迭代求解 ELBO 最大值的步骤表示如下:

$$\begin{aligned} q^{n+1}(S) &= \arg \max L(q(S), q^n(\hat{S}), Y), \\ q^{n+1}(\hat{S}) &= \arg \max L(q^{n+1}(S), q(\hat{S}), Y) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, q^n 为迭代了 n 次的变分近似后验概率, $\hat{S}$ 为除 S 外其余变量的集合. 依次对模型中的变量求取变分,然后迭代求解出各变量的变分近似后验概率. 根据图 3 中的层次概率图模型,近似一个变量的后验分布需要求解其余变量的联合概率密度期望,因此求解某变量的近似后验分布往往会采用位于其马尔可夫毯上的所有其他变量的均值,以避免目标方程陷入局部最优解.

参数代理的完整阶乘假设是最常见的参数代理分解方法,根据平均场理论,参数代理可分解为变量和参数独立相乘的形式或者边缘概率密度相乘的形式^[25]. 平均场近似变分后验的方法以牺牲准确度为代价来换取算法的效率,忽略了变量间的依赖关系,

造成真实后验分布和参数代理间有一定的差异. 为解决这个问题, 本文提出了一种基于 VB 框架的树状平均场因式分解方法来保持变量间的依赖关系, 表示如下:

$$q(\Theta) = q(\pi)q(T)q(f)\prod_{l=1}^L q(m_{zl} | \mathbf{k}_{zl})q(\Gamma_l) \times \prod_{l=L_0+1}^{L+L_0} q(n_{zl} | \mathbf{k}_{zl})q(\mathcal{X}_l)q(\Delta_l) \quad (12)$$

等式(12)中, 由隐变量 K 调节对应关系评估组件和离群点聚合组件的规模参数 M 和 N . 等式(13)和(14)中, M 和 N 分别是参数为 u 和 v 的 Gamma 函数, 且参数 u 和 v 没有共轭先验.

$$p(m_{zl} | \mathbf{k}_{zl}) = \mathcal{G}\left(m_{zl} \left| \frac{u_l}{2}, \frac{u_l}{2} \right.\right)^{k_{zl}} \quad (13)$$

$$p(n_{zl} | \mathbf{k}_{zl}) = \mathcal{G}\left(n_{zl} \left| \frac{v_l}{2}, \frac{v_l}{2} \right.\right)^{k_{zl}} \quad (14)$$

2.3.2 自适应全局-局部约束策略

本文提出了自适应全局-局部约束策略, 在每次迭代中自动调整空间转换函数的全局和局部约束的正则化强度, 使转换后的源点集与目标点集具有更高的相似性, 从而实现从局部到全局的约束过程.

在源点集空间转换过程中, 形变和旋转容易使得点集间单一的结构约束失效, 为了在配准的过程中更灵活和有效地维护点集间结构的稳定性, 本文提出了一种自适应全局-局部结构约束策略作为空间转换函数 T 的约束项. 等式(15)中的参数 $\exp(\Gamma_l)$ 和 $\exp(1/\Gamma_l)$ 分别为全局结构约束 $\mathcal{F}$ 和局部结构约束 $\mathcal{X}$ 的正则化项, 在迭代过程中, 精度 Γ 随着源点集和目标点集间差异的降低而增大, 此时两种约束的主导地位进行更迭, 从而实现从局部到全局的约束过程.

$$E(T) = \ln \left[\frac{\exp(\Gamma_l)}{2} \mathcal{F} + \frac{\exp(1/\Gamma_l)}{2} \mathcal{X} \right] \quad (15)$$

(1) 全局结构约束. 基于运动一致性理论(Motion Coherent Theory, 简称 MCT)^[26], 空间位置越相近的点集运动趋势越一致, 通过强制点集保持一致的运动方向来限制点集移动的自由度. 当点集发生非刚性形变或大尺度旋转时, 运动一致性约束能够抑制不符合点集总体运动方向的错误移动, 但是单一的全局结构约束往往会阻碍点集的最大化重叠. 全局结构约束项 $Tr(\mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{B})$ 中的 $Tr(\cdot)$ 代表矩阵的迹. $\mathbf{B}$ 是高斯径向基函数 $G_{ij}(E) = \exp\left(-\frac{1}{2\Gamma^2} \|e_i - e_j\|_2^2\right)$ 的带权矩阵.

(2) 局部结构约束. 当发生非刚性形变或大尺度旋转时, 点集间的局部结构比全局结构更加牢靠.

在配准初期, 离群点往往散布在偏离聚类中心较远的位置, 所以点集局部段间结构差异较为显著, 局部向量长度明显. 本文通过加入局部结构约束(Local Structure preservation, 简称 LSC)^[5]来最小化点集局部段间的结构差异, 以保存对应点局部结构的相似性, 提高配准结果的准确性. 如图 4 所示, LSC 通过强制对齐两个点的局部结构来使得两个点的局部段结构差异最小. LSC 表示为等式(16).

$$LSC(T) = \|\pi(\hat{X}) - \pi(T(\hat{Y}))\|^2 = Tr(OO^T) \quad (16)$$

$\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 分别表示待配准的目标点集和源点集, $\pi(\cdot)$ 为局部结构描述子. 当点集 $\hat{X}$ 包含 i 个点, 且每个点有 $\hat{K}$ 个相邻点时, $\hat{X}$ 的局部结构描述子可表示为 $\pi(x_i) = \sum_{k=1}^{\hat{K}} \Omega_{ik} \overline{x_i x_{ik}}$. O 在文中表示为 $O = (\Omega^{\hat{X}} - \hat{K}\hat{I})\hat{X} - (\Omega^{\hat{Y}} - \hat{K}\hat{I})(A\hat{Y} + B\mathbf{G})$. 矩阵 Ω 用于选取离点集中第 i 个点最近的 $\hat{K}$ 个非零相邻点, $G_i = \exp(-\|x_{ik} - x_i\|^2 / \hat{v}^2)$, $\hat{v}$ 为所有局部向量长度的方差, $\hat{I}$ 为单位矩阵.

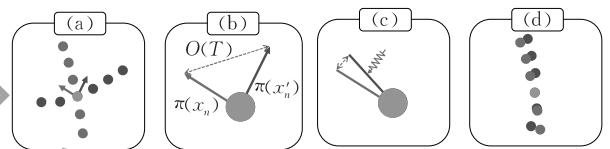


图 4 局部结构约束((a)为在给定的点集中任意选取一个点, 并找到 $\hat{K}$ 个与其相邻的点; (b)为提取该点两个局部段的局部结构描述子, 虚线箭头代表局部结构差异; (c)为最小化目标方程等于向局部向量施加外力; (d)为两个点集的局部段实现最大化重叠)

2.3.3 双阶段先验退火方案

本文提出了基于 VB 框架的双阶段先验退火方案, 在退火过程中使用 Gamma 先验分布动态调节精度 Γ , 同时实现由粗到精和由局部到全局的配准过程, 并更稳健地恢复点集间一一对应关系的同时避免算法陷入局部最优解.

通常退火策略^[4]首先增加退火温度来对低熵分布进行惩罚, 再实施一系列阶段降温方案来降低惩罚强度以细化空间转换过程, 来实现由粗到精的配准. 但是在基于 VB 框架下的双阶段退火方案中, 通过调节精度 Γ 的先验尺度矩阵 ϕ 即可准确恢复点集间对应关系, 较大的 ϕ 能够提升点集的配准精度, 但是容易造成算法陷入局部最优解中, 与此相反, 较小的 ϕ 能够为目标点集更均匀地分配混合子组件, 提升算法克服局部最优解的能力, 但是这种均匀的混合子组件会使得点集间的不确定性上升, 从而降低配准精度. 因此, 在配准初期, 本文将先验尺度矩阵

ϕ 设为较小值, 以增大混合子组件的可配准范围, 获得更多潜在的正确对应点, 同时较小的 ϕ 也减少了局部结构约束的强度, 保持点间局部结构的稳定性为现阶段空间转换的主要约束. 在配准过程中, 将线性和非线性对应关系转换的两个阶段加入到退火框架中, 将 ϕ 的调整作为衡量不确定对应关系的度量方法, 随着 ϕ 增大, 混合子组件的可配准范围变窄, 点间对应关系的不确定性减小, 此时保持点间全局结构的稳定性为空间转换的主要约束. 在配准后期, 随着温度趋于稳定, 空间转换后的目标点集落在较狭窄的可配准范围里, 直至目标方程收敛.

2.3.4 参数后验近似推理

基于 VB 框架的真实后验近似方法是根据指数族分布的共轭特性, 即先验分布和后验分布有相同的分布簇, 从而根据等式(5)、(10)和等式(12)来推理出模型中参数和变量的后验近似概率.

(1) 规模参数 M

定义 $\mathbf{k}_{zl} = \mathbf{h}$, 参数代理 $q(m_z | h)$ 的近似表达式为等式(17), 详细推导见附录.

$q(m_z | h) \propto \exp\langle \ln[p(y_z | m_z, h)p(m_z | h)] \rangle$ (17)
迭代了 l 次后的变分近似代理 $q(m_z | h)$ 服从形状和尺度参数分别为 ω_{zl} 和 ψ_{zl} 的 Gamma 分布 $\mathcal{G}(m_z | \omega_{zl}, \psi_{zl})$, 其参数的更新为等式(18).

$$\omega_{zl} = \frac{u_l + d}{2}; \quad \psi_{zl} = \frac{u_l + \tilde{\varphi}_{zl}}{2} \quad (18)$$

其中, $\tilde{\varphi}_{zl}$ 表示马氏距离的期望, $\tilde{\varphi}_{zl} \langle (y_z - T(e_l))^T m_{zl} \Gamma_l (y_z - T(e_l)) \rangle$, $\langle \cdot \rangle$ 代表期望算子.

(2) 规模参数 N

参数代理 $q(n_z | h)$ 的近似表达式为等式(19):

$$q(n_z | h) \propto \exp\langle \ln[p(y_z | n_z, h)p(n_z | h)] \rangle \quad (19)$$

迭代了 l 次后的变分近似代理 $q(n_z | h)$ 服从形状和尺度参数分别为 γ_{zl} 和 τ_{zl} 的 Gamma 分布 $\mathcal{G}(n_z | \gamma_{zl}, \tau_{zl})$, 其参数的更新为等式(20).

$$\gamma_{zl} = \frac{v_l + d}{2}; \quad \tau_{zl} = \frac{v_l + \tilde{\epsilon}_{zl}}{2} \quad (20)$$

其中, $\tilde{\epsilon}_{zl} = \langle [y_z - \mathcal{X}_l]^T n_{zl} \Lambda_l [y_z - \mathcal{X}_l] \rangle$ 为马氏距离的期望.

(3) 混合比例 π

潜在的指示变量和尺度变量的联合后验能从它们的全条件分布的期望里获得, 通过归一化和边缘化后, 可以得到 $\mathbf{k}_{zl}$ 的期望表达式为等式(21) (详细推导见附录).

$$\langle \mathbf{k}_{zl} \rangle = \frac{q(\mathbf{k}_{zl})}{\sum_{l=1}^L q(\mathbf{k}_{zl})} \quad (21)$$

定义 $Z_l = \sum_{z=1}^Z \langle \mathbf{k}_{zl} \rangle$, α_0 为第 l 个混合自组件的先验样本大小. 混合比例 π 的后验概率仍然是样本大小为 α_l 的 Dirichlet 分布, 其中 $l \in [1, L+L_0]$, 则 π 的后验概率参数更新如等式(22)所示:

$$\alpha_l = \alpha_0 + Z_l \quad (22)$$

(4) 离群点聚合组件的均值 $\mathcal{X}$ 和精度 Λ

在离群点聚合组件中, 参数 $\eta_0, \zeta_0, \epsilon_0$ 和 β_0 分别为 Gaussian-Wishart 先验分布的先验均值, 相对精度, 自由度和先验精度. 均值 $\mathcal{X}$ 和精度 Λ 仍然服从 Gaussian-Wishart 分布, 则后验概率参数更新如等式(23)所示:

$$\begin{aligned} \eta_l &= \eta_0 + Z_l \\ \epsilon_l &= \epsilon_0 + Z_l \\ \zeta_l &= \frac{1}{\eta_l} [\eta_0 \zeta_0 + Z_l y_z] \\ \beta_l^{-1} &= \beta_0^{-1} + \frac{1}{\eta_l} [\eta_0 \zeta_0 \zeta_0^T + Y \langle \phi_l \rangle Y^T] \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\phi_l = d([\mathbf{k}_{1l}, \mathbf{k}_{2l}, \dots, \mathbf{k}_{zl}])$, 其中下标的取值范围为 $L+1 \leq l \leq L+L_0$, 函数 $d(\cdot)$ 将向量转换为对角矩阵.

(5) 对应关系评估组件的精度 $\mathbf{F}$

精度矩阵 $\mathbf{F}$ 的先验分布是形状和尺度参数分别为 ρ_0 和 ϕ_l 的 Gamma 分布, 定义 $B_{zl} = \langle \mathbf{k}_{zl} \rangle \langle \mathbf{m}_{zl} \rangle$, 仍然服从 Gamma 分布的精度 $\mathbf{F}$ 的后验概率参数更新如等式(24)和(25)所示.

$$\rho_l = \rho_0 + Z_l \quad (24)$$

$$\phi_l = \phi_0 + \frac{1}{2} \sum_{z=1}^Z B_{zl} \langle [y_z - T(e_l)]^T [y_z - T(e_l)] \rangle \quad (25)$$

(6) 噪声方差 f

噪声方差 f 的先验分布是形状参数为 r_0 和尺度参数为 g_0 的 Gamma 分布, 不考虑 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的先验信息, f 的后验概率相关参数迭代更新如等式(26)和(27)所示.

$$r_l = r_0 + \frac{1}{2} L \quad (26)$$

$$g_l = g_0 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \langle (T(e_l) - \mathbf{A}e_l - \mathbf{B}G_{.l})^T \times (T(e_l) - \mathbf{A}e_l - \mathbf{B}G_{.l}) \rangle \quad (27)$$

(7) 空间转换函数权重矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$

根据变分贝叶斯理论, 空间转换函数 T 的近似代理为等式(28)所示:

$$\ln q(T) \propto -\frac{1}{2} \sum_{z=1}^Z \sum_{l=1}^L \langle \mathbf{k}_{zl} \rangle \tilde{\varphi}_{zl} - \ln p(T) + E(T) \quad (28)$$

由于 T 的后验分布呈现对称凹形, 模型存在唯一的极值点, 转换方程的最优解被转化成为求解系数矩

阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的最优解. 在等式(29)、(30)中定义 $\hat{\mathbf{w}} = (\hat{\Omega}^{\hat{\mathbf{x}}} - \hat{K}\hat{\mathbf{I}})\hat{\mathbf{X}} - (\hat{\Omega}^{\hat{\mathbf{F}}} - \hat{K}\hat{\mathbf{I}})\mathbf{B}\mathbf{G}$, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\Omega}^{\hat{\mathbf{x}}} - \hat{K}\hat{\mathbf{I}})\hat{\mathbf{X}} - (\hat{\Omega}^{\hat{\mathbf{F}}} - \hat{K}\hat{\mathbf{I}})\mathbf{A}\mathbf{E}$, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\Omega}^{\hat{\mathbf{F}}} - \hat{K}\hat{\mathbf{I}})$, 通过对等式(28)两边的期望求偏导可以得到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的更新方程为

$$\mathbf{A} = [f\|\mathbf{T} - \mathbf{B}\mathbf{G}\| + \exp(1/\Gamma_l)\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{v}}] \times [f\mathbf{E} + \exp(1/\Gamma_l)\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{E}\hat{\mathbf{v}}]^{-1} \quad (29)$$

$$\mathbf{B} = [f\|\mathbf{T} - \mathbf{A}\mathbf{E}\| - \exp(\Gamma_l)\mathbf{G} + \exp(1/\Gamma_l)\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}] \times [f\mathbf{G} + \exp(1/\Gamma_l)\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{G}\hat{\mathbf{v}}]^{-1} \quad (30)$$

2.4 算法复杂度分析

算法 1 给出了基于变分贝叶斯层次概率模型的非刚性点集配准算法的伪代码, 显而易见, 这些公式之间是相互关联的, 必须通过迭代步骤来依次求解.

算法 1. 基于变分贝叶斯层次概率模型的非刚性点集配准.

输入: $\mathbf{E} = \{e_i\}_{i=1}^L, \mathbf{Y} = \{y_z\}_{z=1}^Z, \Delta$

输出: 迭代后的空间转换函数 $\mathbf{T}$

初始化: $\rho_0, \phi_0, \epsilon_0, \beta_0, \eta_0, \zeta_0, \alpha_0, r_0, g_0$

1. WHILE ELBO 小于 Δ DO
2. VB E-STEP;
3. 根据等式(17)计算规模参数 M 的参数代理 $q(M|K)$
4. 根据等式(19)计算规模参数 N 的参数代理 $q(N|K)$
5. 根据等式(28)计算空间转换函数 $\mathbf{T}$ 的期望
6. 根据等式(41)和(42)计算指示变量 K 的期望
7. VB M-STEP;
8. 根据等式(22)更新混合比例 π 的后验参数 α
9. 根据等式(23)更新均值 $\mathcal{X}$ 和精度 Λ 的后验参数 $\eta, \epsilon, \zeta, \beta$ (离群点聚合组件)
10. 根据等式(24)和(25)更新精度 Γ 的后验参数 ρ, ϕ (对应关系评估组件)
11. 根据等式(26)和(27)更新噪声方差 f 的后验参数 r, g
12. 根据等式(29)计算权重矩阵 $\mathbf{A}$
13. 根据等式(30)计算权重矩阵 $\mathbf{B}$
14. END WHILE

由等式(25)和(41)可知, 参数代理在每次迭代过程中逼近真实后验分布的计算复杂度分别为 $O(d^2(Z+d)L)$ 和 $O(d^3LZ)$. 不同于非 VB 框架的优化算法^[4-5,7,18], 基于 VB 框架下的代理参数在逼近真实后验概率时, 算法的复杂度明显增加, 尤其求取精度矩阵时需要进行大量矩阵逆运算, 所以 VB 方法不被建议用于大规模的点集配准, 但是可以通过降采样, 下采样等方法来构建源点集稀疏化特征点集^[27], 然后再利用 VBHPM 对特征点集和目标点

集进行配准, 以降低算法计算的复杂度.

3 实验结果

本文使用 Matlab2019a 来实现算法, 并通过两类配准实验测试了本文算法的各项性能.

(1) 算法贡献实验结果展示:

- ① VBHPM 抵抗离群点;
- ② 自适应全局-局部约束策略;
- ③ 双阶段先验退火.

(2) 点集和图像配准:

- ① 轮廓点集配准;
- ② 3D 点集配准;
- ③ 图像配准.

本文算法与当前 13 种流行算法进行了比较实验:

(1) 在点集配准实验中, 本文使用 GL-CATE^[5]、VBPSM^[6]、GMMREG^[7]、MA-L2E^[8]、CPD^[18]、IPC-MCC(Iterative Closest Point-Maximum Correntropy Criterion)^[28] 算法和本文方法 VBHPM 进行比较;

(2) 在图像配准实验中, 本文使用 VFC^[4]、GL-CATE^[5]、LMR^[10]、SIR^[11]、LPM^[12]、GLPM^[13]、Yang 等人^[20]、LLT^[21] 算法和本文方法 VBHPM 进行比较.

实验性能评估标准: 本文使用配准精度 (*Precision*), 绝对中位差 (*MAD*), 平均绝对误差 (*MAE*), 均方根误差 (*RMSE*) 和标准差 (*SD*) 来评估算法的性能:

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} \quad (31)$$

$$MAD = median(|m_n - s_n|) \quad (32)$$

$$MAE = \frac{\sum_{n=1}^N \|m_n^l - s_n^l\|}{N^l} \quad (33)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N^l} \sum_{n=1}^N \|m_n^l - s_n^l\|^2} \quad (34)$$

$$SD = \sqrt{\frac{1}{N^l} \sum_{n=1}^N (d(m_n^l, s_n^l) - RMSE)^2} \quad (35)$$

其中 TP 为正确的对应关系的点集, FP 为错误的对应关系的点集, 其中正确对应关系的点集可直接由指示变量 K 中获得. m_n^l 和 s_n^l 分别表示源图像和目标图像的第 n 个标记点, N 为标记点数量, $d(m_n^l, s_n^l)$ 为 m_n^l 和 s_n^l 间的距离. *median* 用于求解中值.

在点集配准实验中, (1) 形变程度设定: 二维点集设定 8 个控制点, 分别均匀分布在轮廓点集边缘的

上、下、左、右、左上、左下、右上、右下方。三维点集设定 6 个控制点,分别均匀分布在点集的上、下、左、右、正前、正后方^[29]。控制点移动顺序和方向随机,其中每个控制点有上、下、左、右四个移动方向及 0.2 的移动步长;(2)离群点规模设定:按源点集总数的 0.5 到 1.3 倍来随机生成不同分布的离群点;(3)旋转角度设定:以 15° 为间隔,按照 -90° 到 90° 的范围对源点集进行旋转;(4)对应关系缺失设定:按源点集总数的 0.1 到 0.5 倍来随机或连续删除部分源点集;(5)实验中的先验超参数设置:①对应关系评估组件: $\rho_0 = d + 1, \phi_0 = 1\hat{\mathbf{I}}$;②离群点聚合组件: $\zeta_0 = d + 1, \epsilon_0 = 0.01, \beta_0 = 1\hat{\mathbf{I}}$;③混合比例: $\alpha_0 = 1$;④噪声: $r_0 = 1, g_0 = 1\hat{\mathbf{I}}$;(6)离群点聚合子组件数量 L_0 设定:不同于其他方法需要对离群点聚合子组件的数量进行准确估计^[4,18],VBHPM 中离群点聚合子组件数量可选取为估计值,本文根据经验将离群点聚合分量的数量设定为 $L_0 = \log(Z - L)$,该假设基本能够满足实验精度要求。

3.1 VBHPM 抵抗离群点

为了评估基于不同混合模型(TLMM, GMM)和优化框架(EM, VB)的配准性能,本文使用 363 个点的 3D 数据集 rabbit 展示了当离群点规模为 1.1 且无噪声时,使用不同聚类算法和优化框架的配准结果。如图 5 所示,(a)为离群点规模为 1.1 且无噪声时,源点集“+”和目标点集“o”的初始位置;(b)和(c)分别为基于 TLMM(VB)和基于 GMM(EM)的聚类模型配准结果;椭球表示离群点混合组件均值 $q(\mathcal{X})$ 的后验概率分布范围,混合模型的每个子组件根据混合比例 $q(\pi)$ 用不同的灰度级表示;(d)为离群点规模为 0.8,噪声规模为 0.2 时 VBHPM 的配准结果;(e)为在不同规模的离群点下,本文分别使用 GMM 和 EM 来替换 VBHPM 中的 TLMM 和 VB,并展示了配准后的平均误差,其中模型中涉及的部分共同参数值设置相同。从图 5(e)中可以看出,四种方法均可在离群点规模较小的情况下达到较小的平均误差,因为当离群点较稀疏时,TLMM 的协方差矩阵逐渐增大,可近似看作是高斯分布。但当离群点规模增大后,基于 EM 框架的算法更容易陷入局部最优解,使得实验平均误差增大。基于 TLMM 和 VB 框架的 VBHPM 比其他三种方法获得更小的平均误差。实验结果表明,由 Gamma 函数来调节的学生 t 分布因为有比高斯分布更长的尾巴^[30],在迭代过程中为离聚类中心较远的点分配较小的概率值,从而降低离聚类中心较近的离群点的影响,因此 TLMM 能够提供比 GMM 更鲁棒的配准性能。由于 EM 框架对待优化目标方程的参数初

始值较敏感,而初始值往往根据经验设定,不能根据历史迭代状态进行调整,使得目标方程容易陷入局部最优解。而基于 VB 框架的优化算法通过引入先验信息来指导参数的更新,降低了目标方程对初始值的影响。随着离群点规模逐渐增大,参数的更新更为复杂,单一的初始值设定往往会导致目标方程难以收敛。

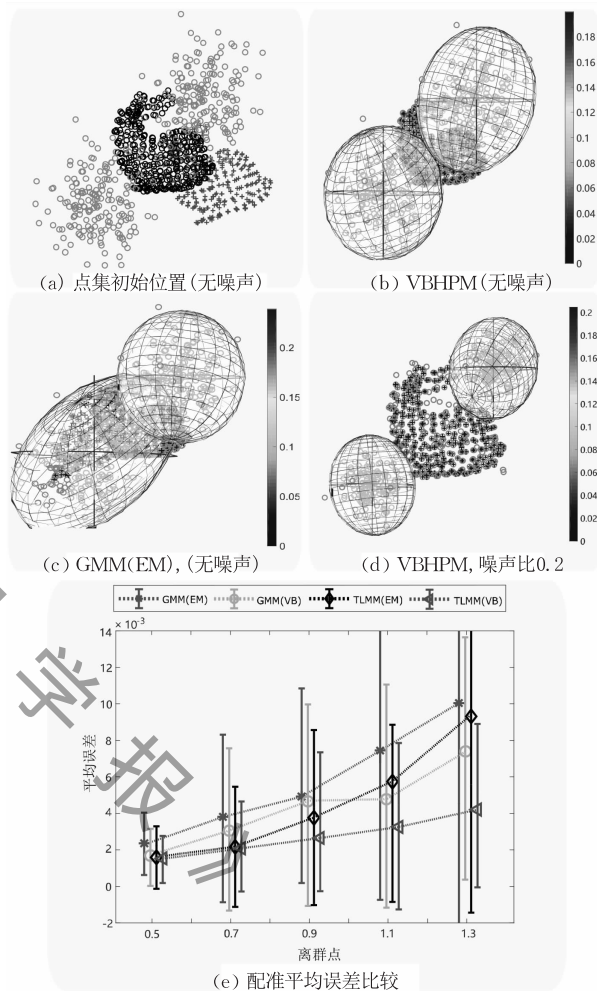


图 5 离群点聚合方法比较((a)为离群点规模为 1.1 时的点集初始位置;(b)为 VBHPM 配准结果;(c)为基于 GMM(EM)算法的配准结果;(d)为离群点规模为 0.8,噪声规模为 0.2 时 VBHPM 的配准结果;(e)为基于不同混合模型和优化方法的配准平均误差比较)

3.2 自适应全局-局部约束策略

为了展示自适应全局-局部约束策略能够在点集发生较大程度的形变,旋转和对应关系缺失的情况下仍能保持点集间结构的稳定性,本节使用公开轮廓数据集^[5]来观测源点集空间转换后的配准结果。图 6 的第 1 行为源点集和目标点集的初始位置;第 2 行为变分后验近似结果,VBHPM 中每个分量的混合比例由不同的灰度级表示。从左到右每一列分别是:fish2(91 个点)中目标点集发生了程度为 3

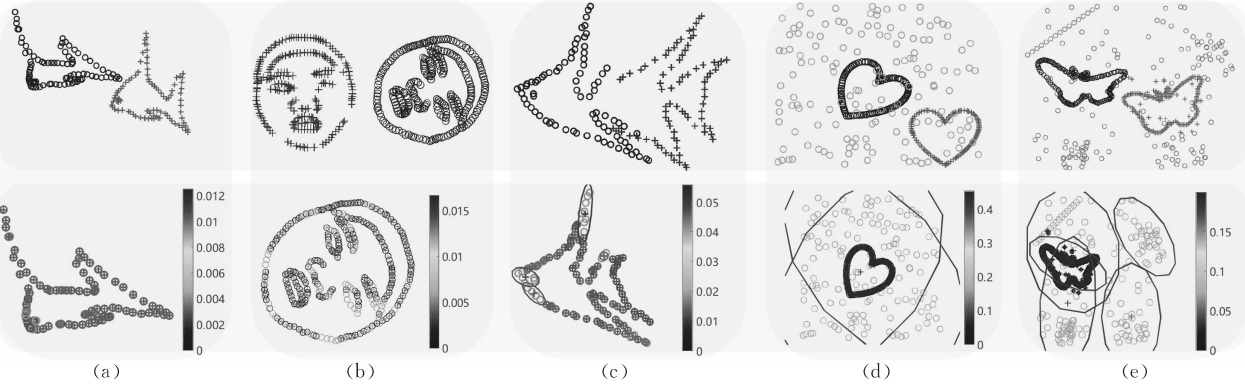


图 6 群点聚合方法比较((a)为离群点规模为 1.1 时的点集初始位置;(b)为 VBHPM 配准结果;(c)为基于 GMM(EM)算法的配准结果;(d)为离群点规模为 0.8,噪声规模为 0.2 时 VBHPM 的配准结果;(e)为基于不同混合模型和优化方法的配准平均误差比较)

非刚性形变后的配准结果;face(317 个点)中源点集缺失 52 个点且目标点集旋转 70° 后的配准结果;fish1(98 个点)中源和目标点集皆缺失 14 个点且发生程度为 2 的非刚性形变后的配准结果;heart(96 个点)中目标点集旋转 30° ,发生程度 0.5 的形变且加入规模为 1.5 的离群点的配准结果;butterfly(172 个点)中加入规模为 1 的非均匀分布离群点并且发生程度为 1.5 的形变后的配准结果.

在非刚性配准实验中,本文使用 GRBF 作为空间转换函数的非线性部分,对非刚性形变所产生的非线性位移噪声进行补偿.本实验中,高斯核的尺度参数设定为 1.当点集发生较大形变时,本文提出了自适应全局-局部约束策略来自动调整全局和局部约束的正则化强度,从而实现从局部到全局的约束过程.在局部转换阶段,首先设置较小的精度先验作为局部约束的正则化项来增大局部约束的占比,此时点集配准以维护局部结构的稳定性为主.在全局转换阶段,随着精度逐渐增大,全局约束项正则化参数增大,此时点集以维持全局结构稳定性为主,即限制点集非线性转换的自由度.fish 中的点集不仅准确恢复了对应关系,并且每个混合分量的混合比例相同,配准结果达到稳定状态.在点集对应关系缺失配准实验中,本文采用 Dirichlet 先验分布来动态调节混合模型的混合比例,为缺失对应关系的点分配较小的混合比例,同时为相邻点缺失的点分配较大的混合比例以保持点集局部结构的稳定性.由于 face 点集随机删除部分点,配准完成后每个混合分量的混合比例不同,相邻点未缺失的点能够被分配到较均匀的比例,此时点集状态不稳定.当连续删除 fish1 的部分点后,剩余点集间结构更稳定,因此配准后的混合模型被更均匀地分配混合比例.当存在离群点时,自适应全局-局部约束策略可以根据点集

间局部和全局结构的相似性来评估点集间对应关系的同时抵抗离群值的干扰,防止错误的对应关系导致的点集发生过度形变问题.综上所述,自适应全局-局部约束策略能够在同时发生形变,旋转,存在对应关系缺失和大规模离群点的情况下皆能准确地恢复一一对应关系.

3.3 双阶段先验退火

为了验证在配准中使用双阶段先验退火方案来动态调节先验分布 Gamma 的尺度矩阵 ϕ_0 比设置固定的先验尺度矩阵 ϕ_0 能更准确地评估点集一一对应关系,实验选用 105 个点的 Chinese character^[5] 并将发生程度为 4 的形变后的点集作为目标点集进行配准,通过使用不同的尺度参数 ϕ_0 来观测 $q(\Theta)$ 的后验近似结果.图 7 精度的初始值设定为待配准的目标点集提供了初始配准的邻域范围,从而影响配准的准确度.由图 7 可知,当先验尺度矩阵 $\phi_0 = 12 \times \hat{I}$ 时,算法陷入局部最优解.初配准时若没有少量已知正确对应关系的点作为参考,则较大的 ϕ_0 使得配准的误差增大,极易使算法陷入局部最优解中.当先验尺度矩阵 $\phi_0 = 0.3 \times \hat{I}$ 时,后验精度 Γ 往往较小,此时子组件的混合比例分配均匀,配准结果的不确定性增加,因此较小的 ϕ_0 只能大致圈定部分点作为潜在的正确对应关系点,而不能准确预估点集间的一一对应关系.因此在配准过程中,设置较小的先验精度为点集均匀分配混合比例,在形变较大的情况下有利于维持点集间结构的稳定性,避免目标方程陷入局部最优解.然而这也限制了非刚性转换的自由度,使得点集间对应关系难以评估.基于以上情况,本文使用 Gamma 先验分布来动态调节精度 Γ ,在迭代过程中通过设置由小到大的先验尺度矩阵 ϕ_0 来灵活调节点集的可配准范围,在获得较高的配准精度的同时避免算法陷入局部最优解.

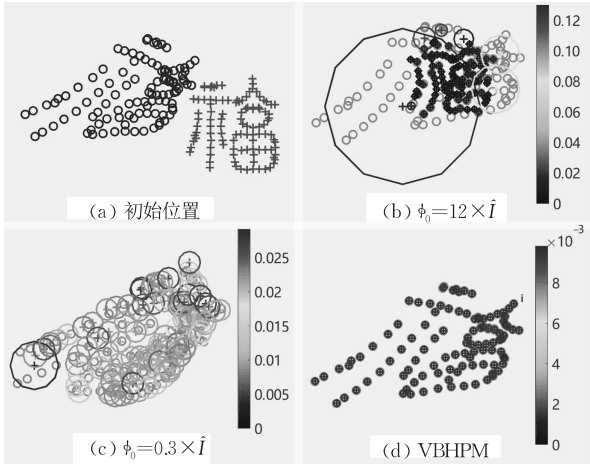


图 7 先验尺度矩阵 Φ 对配准结果的影响((a)为源点集“+”和目标点集“o”的初始位置;(b)~(d)分别为精度的先验尺度矩阵分别固定为 $12 \times \hat{I}$ 、 $0.3 \times \hat{I}$ 和使用 VBHPM 自动调节 Φ 的配准结果. 其中混合模型的每个子组件根据混合比例 $q(\pi)$ 用不同的灰度级表示;(b)中的除目标点集的圆圈为离群点混合组件均值的后验概率分布范围;(c)中除目标点集的圆圈为空间转换函数 T 的变分近似概率)

图 8 展示了基于双阶段退火方案调节的由粗到精配准过程,实验使用数据集 fish1(98 个点)在目标点集包含规模为 1.5 的离群点的情况下进行配准. (a) 为点集的初始位置,其中“+”和“o”分别表示源点集和目标点集;(b)~(d)分别为迭代 100 次,200 次和 300 次后的点集配准结果,由以目标点集为中心的混合高斯分量比例及点集的配准邻域范围来展示由粗到精的配准过程;除了目标点集外的圆圈表示空间转换函数 T 的变分近似概率;(e)为迭代 300 次后的 $p(Y|E)$ 变分近似后验. 在粗配准阶段,首先设置较小的精度先验矩阵,为每个混合分量均匀分配的混合比例,此时目标点的邻域范围较大,点集间的对应关系不确定, $p(Y|E)$ 的后验近似代理分布较为平坦. 在精配准阶段,通过逐渐增大先验尺度矩阵 Φ 来降低退火的温度,此时目标点集的可配准邻域范围被缩小,点集间关系的确定性增加,混合子组件的不确定性降低,从而达到获取点集间一一对应关系的目的. 此时内点对应关系评估组件中混合比例增加,离群点聚合组件在聚合离群点的同时依据先验信息来更新参数,从而确定聚类中心的数量. 需要指出的是,离群点聚合子组件数量的不确定性可能会导致算法性能下降,过小的子组件初始值也会增大组件聚类的难度,使得配准精度下降. 当退火直至点集状态稳定时,离群点在离群点混合组件中的混合比例和总数趋于稳定,此时不仅恢复能够点集间的一一对应关系,并且采用的树状平均场因式分解方法同时获得了更紧致的变分下界.

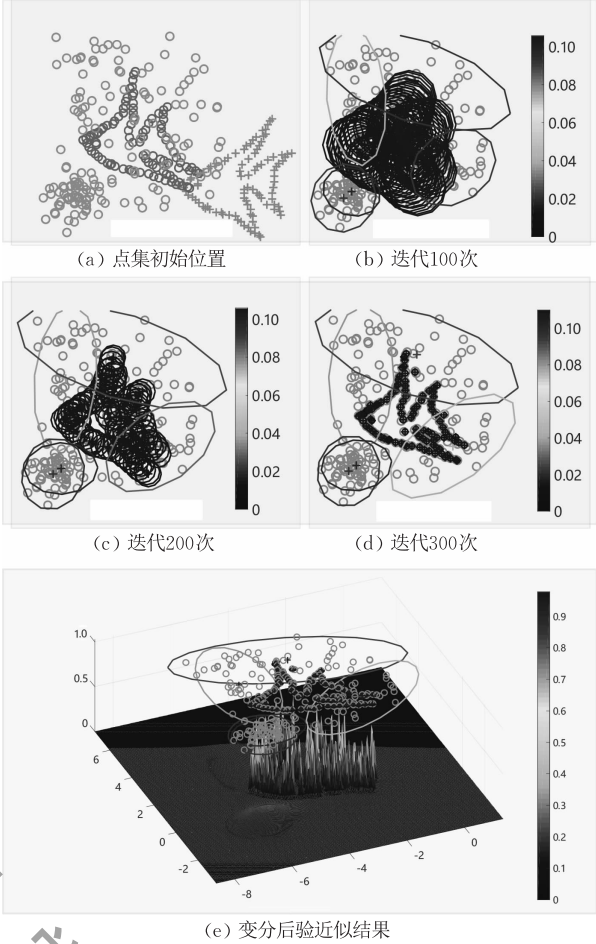


图 8 双阶段退火方案调节的由粗到精配准过程((a)为点集的初始位置;(b)~(d)分别为迭代 100 次、200 次和 300 次后的配准结果,根据混合比例 $q(\pi)$ 用不同的灰度级表示子组件的概率;(e)为迭代 300 次后的 $p(Y|E)$ 变分近似后验)

3.4 轮廓点集配准

图 9 展示了点集的初始位置和六种算法 (GL-CATE^[5]、VBPSM^[6]、GMMREG^[7]、MA-L2E^[8]、CPD^[18] 和 VBHPM) 在不同情况下的配准结果. 从左到右每一列分别为: alien(207 个点)加入规模为 1.1 的离群点后的配准结果; horse(198 个点)发生程度为 4 的形变后的配准结果; butterfly(172 个点)旋转 90°后的配准结果; fish2(91 个点)缺失 38 个点后的配准结果; hand(302 个点)旋转 45°且发生程度为 3.5 的形变后的配准结果; elephant(295 个点)缺失 90 个点并旋转 85°后的配准结果; heart(96 个点)发生程度为 3 的形变并加入规模为 2 的离群点后的配准结果; bird(146 个点)旋转 85°并加入规模为 2 的离群点后的配准结果; fish1(98 个点)缺失 26 个点并发生程度为 2.5 的形变后的配准结果; line(60 个点)缺失 32 个点并加入规模为 1 的离群点后的配准结果. 表 1 为本文方法 VBHPM 和 VBPSM、

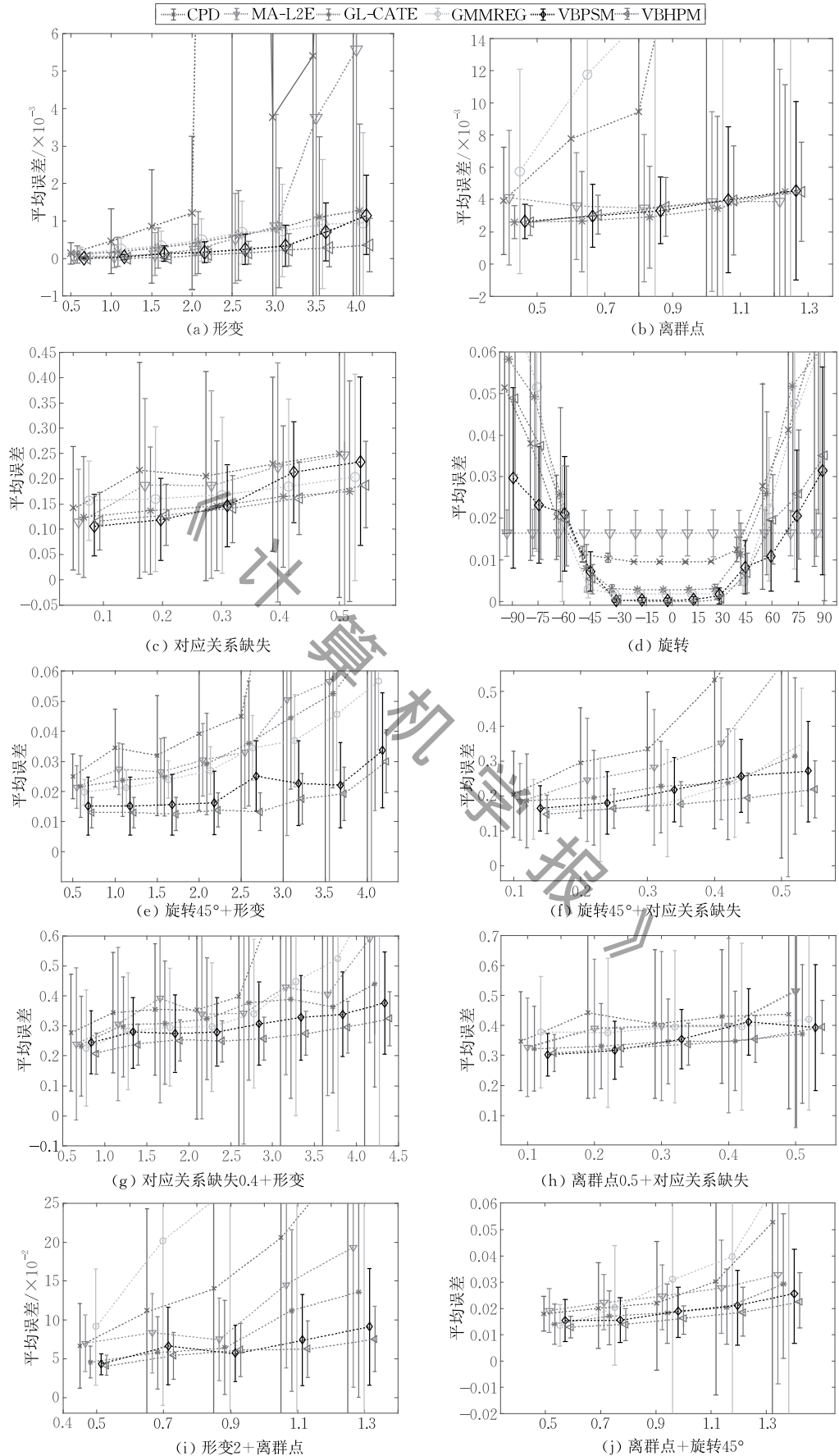


图 10 轮廓点集配准误差展示((a)~(j)分别为使用 Chinese character 点集在多因素影响下,六种不同算法的配准平均误差对比图)

0.5);形变 2+ 离群点(0.5~1.3)和旋转 45°+ 离群点(0.5~1.3)。

点集形变程度和旋转角度的增大容易导致点集结构在空间转换过程中失效,使得配准后的点集发生夸张的形变或塌缩。VBHPM 在发生较大程度形变和旋转的情况下的平均误差小于其他五种算法,CPD^[18]和 MA-L2E^[8]在较大程度形变和旋转的情况下配准精度明显下降。离群点和对应关系缺失点的规模增大会使得点集间的差异变小,单一的结构约束往往会导致点集在配准过程中产生不适定问题,VBHPM 和 VBPSM^[6]在处理对应关系缺失时有较为相似的配准精度,GMMREG^[7]和 CPD^[18]在大规模离群点的情况下配准误差明显增大。本文提出 VBHPM 在包含较大程度的旋转变形和大规模离群点,对应关系缺失的情况下都能获得较高的配

准精度。

3.6 3D 点集配准

图 11 展示了 3D 点云公开数据集^①在多因素影响下的配准结果。第 1 行至第 4 行分别为:bus(830 个点)旋转 60°后的配准结果;elephant(624 个点)旋转 60°并缺失 187 个点后的配准结果;chair(1000 个点)旋转 60°并加入 500 个离群点后的配准结果;skull(1001 个点)旋转 20°并发生形变程度为 1.5 后的配准结果。从左到右,第 1 列为点集初始位置;第 2 列为配准结果的 2D 展示,其中混合模型的每个子组件根据混合比例 $q(\pi)$ 用不同的灰度级表示;第 3 列为配准结果的 3D 展示。实验结果表明,VBHPM 在 3D 点云数据发生旋转,形变,对应关系缺失和加入大规模离群点的情况下能够准确恢复点集间的一一对应关系。

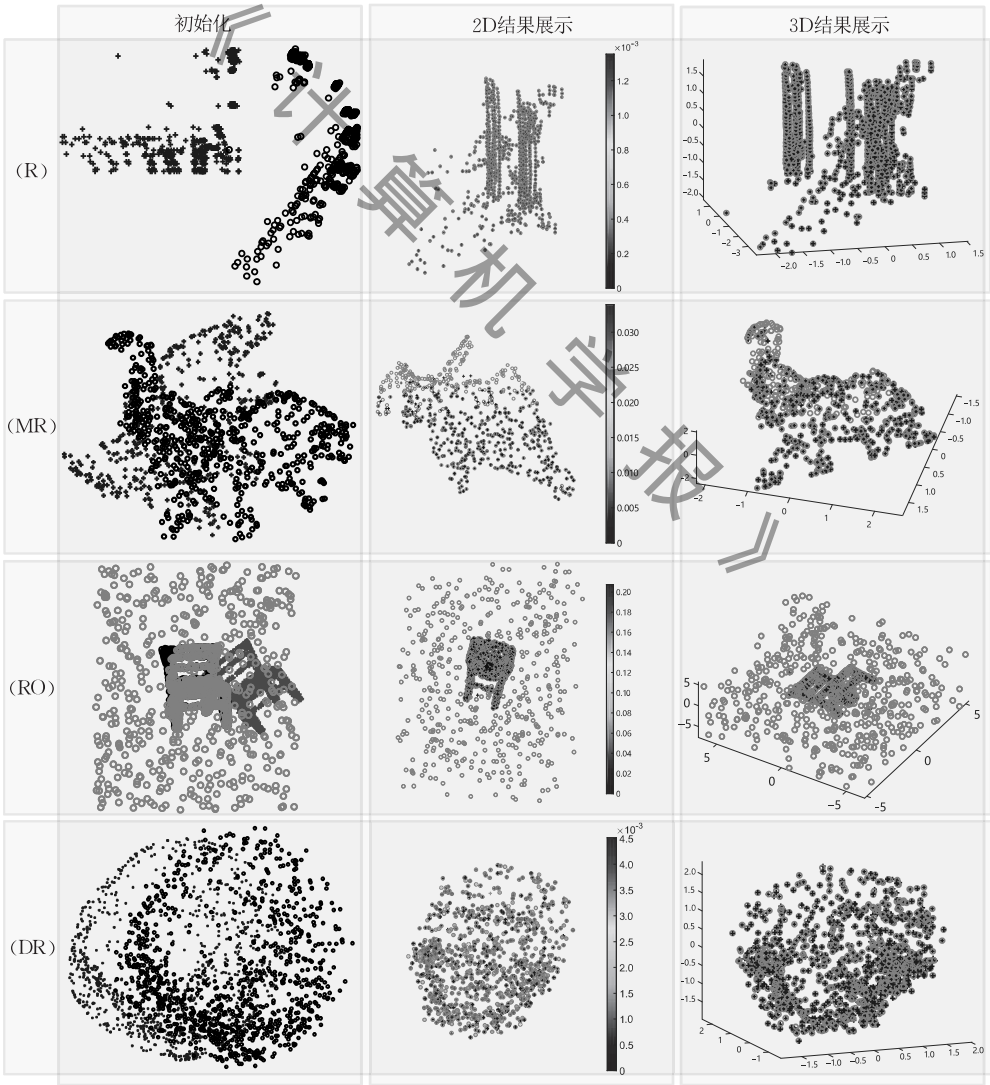


图 11 3D 点云配准结果展示(从左到右分别为点云的初始位置、点云配准的 2D 结果和 3D 结果展示。从上到下分别为:点云在 R(旋转)、MR(对应关系缺失和旋转)、RO(旋转和离群点)、DR(形变和旋转)的四种不同情况下的配准结果)

① <http://www.acfr.usyd.edu.au/papers/SydneyUrbanObjectsDataset.shtml>

图 12 展示了 PCL(Point Cloud Library)公开数据集^①使用三种算法 IPC-MCC(Iterative Closest Point-Maximum Correntropy Criterion)^[28]、CPD 和 VBHPM 的配准结果,其中 CPD 和 VBHPM 先使用降采样^[27]提取点云特征点,通过计算特征点的空间转换函数作为点云的空间转换函数.如图 12 所示,(a)为点云初始位置,其中源点集和目标点集个数分别为 249 647 和 248 494;(b)为 ICP-MCC 的配准结果;(c)~(d)分别为 CPD 和 VBHPM 的配准结果,都使用降采样^[27]分别提取 3552 和 3595 个特征点计算空间转换函数.表 2 为 IPC-MCC、CPD 和 VBHPM 三种算法在不同数量点云上的配准时间比较.由表 2 可知,在大规模点集配准中,VBHPM 通过降采样提取特征点的方法来降低算法的迭代时间,此外还可以通过提取点集中心点来计算空间转换函数^[6].

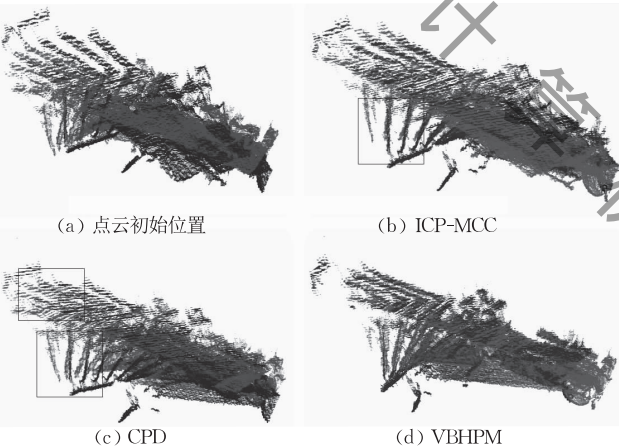


图 12 点云配准比较((a)~(d)分别为点云初始位置;算法 ICP-MCC、CPD 和 VBHPM 的配准结果.其中矩形框标准了未正确配准的区域)

表 2 点云配准时间比较 (单位:s)			
点云数量	ICP-MCC	CPD	VBHPM
56201	10.26	31.66	34.39
249647	42.08	82.33	78.96

图 13 使用 3D swagger 公开数据集^[6]对六种算法 GL-CATE^[5]、VBPSM^[6]、GMMREG^[7]、MA-L2E^[8]、CPD^[18]和 VBHPM 进行点集配准对比实验,配准性能由 ROC(Receiver Operating Characteristic)曲线度量.3D swagger 数据集共有 581 帧,每帧有 42 个点,部分相邻帧中的点存在对应关系缺失的情况.实验选取第 100、150、200 帧时的运动姿态作为源点集和目标点集进行配准并绘制这六种算法的 ROC 曲线.(a)为连续运动点集的初始位置;(b)~(d)为第 100 帧、第 150 帧和第 200 帧时六种算法的 ROC 曲线

图. VBHPM 在第 100 帧和第 200 帧时获得了最优的配准精度,在第 150 帧时,VBPSM 和 VBHPM 同时获得了最好的配准性能.在第 100 帧时,CPD 和 GL-CATE 有相似的 ROC 曲线,获得了比 GMMREG 和 MA-L2E 更好的精度,其中 GL-CATE 交替进行全局和局部评估方法以准确地获得相匹配的对应点.

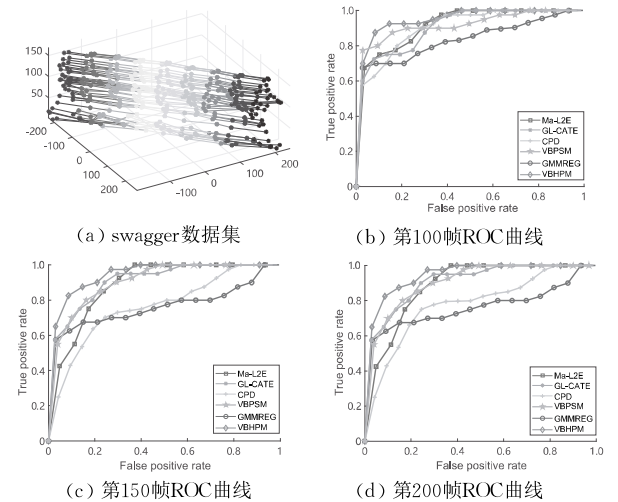


图 13 swagger 运动捕捉配准((a)为 swagger 数据初始位置;(b)~(d)为在第 100 帧、第 150 帧和 200 帧时六种算法的 ROC)

3.7 图像配准

本文采用以下三个步骤来对图像进行配准:
(1) SIFT(Scale-Invariant Feature Transform)提取图像特征点集;(2) 特征点集的配准或匹配;(3) 源图像进行空间转换.所有对比算法都具有相同步骤:(1) SIFT 提取特征点和(3) 源图像空间转换.算法 VFC^[4]、GL-CATE^[5]、SIR^[11]、Yang 等人^[20]和 LLT^[21]通过估计两个点集间的对应关系来建立图像空间转换函数;LMR^[10]、LPM^[12]和 GLPM^[13]通过筛选内点对(不包括离群点)来构建图像的空间转换函数.特征点集间的对应关系评估越准确则配准后的图像效果越好,算法的性能越好.

3.7.1 大尺度旋转和形变图像配准

图 14 为巴黎谷歌遥感图像和旋转 180°后的图像分别作为配准的源图像和目标图像来进行的图像配准实验,其中待配准点数为 981.图 15 使用 Oxford^[31]标准 Graffiti 数据集进行图像配准.其中目标图像发生较大尺度形变,待配准点数为 917.图 14 和图 15 中的(a)和(b)分别为源图像和目标图像;(c)为配准后点集的向量场,其中浅色和深色的

① <http://www.pclcn.org/>

向量分别代表离群点和内点的运动方向；(d)为源图像和目标图像中存在对应关系的特征点连线图，其中深色连线和浅色连线分别表示点集间的正确和错误的对应关系；(e)为配准后 7×7 的棋盘图像；(f)为 $p(Y|E)$ 变分逼近后验概率。当图像发生大尺

度的旋转和形变时，本文采用刚性和非刚性相结合的空间转换函数，并提出自适应空间转换策略来维护点集全局和局部结构的稳定性。本文方法 VBHPM 在大尺度旋转和形变的图像配准中获得较好的配准结果，配准后的图像基本无扭曲和错位的情况。

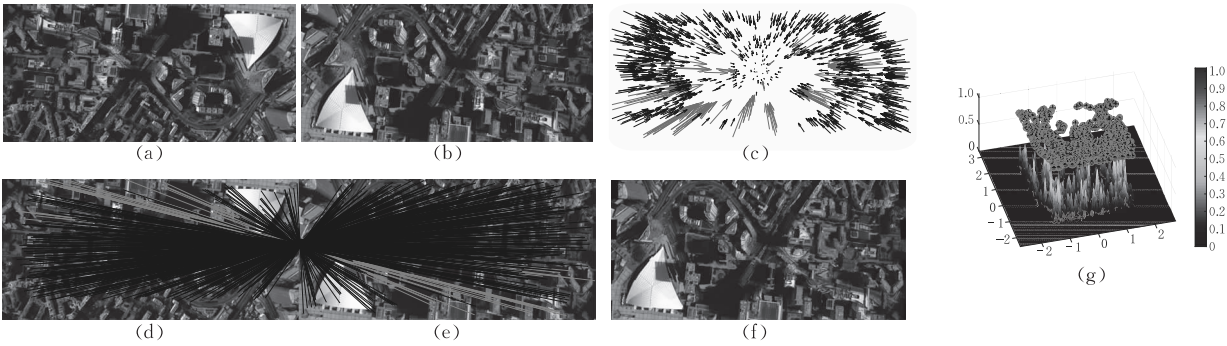


图 14 大尺度旋转图像配准((a)为源图像；(b)为目标图像；(c)为特征点集的向量场，其中浅色和深色的向量分别代表离群点和内点的运动方向；(d)为特征点集的对应关系连图，其中浅色和深色的连线分别代表错误的点集对应关系；(e)为配准后 7×7 的棋盘图像；(f)为 $p(Y|E)$ 变分逼近后验概率)

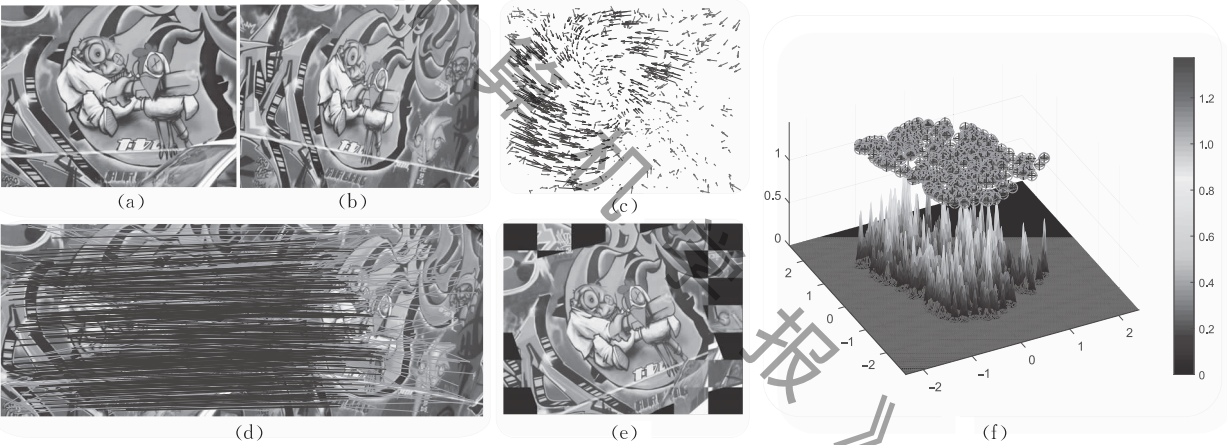


图 15 形变图像配准((a)为源图像；(b)为目标图像；(c)为特征点集的向量场，其中浅色和深色的向量分别代表离群点和内点的运动方向；(d)为特征点集错误和正确的对应关系连线，分别用浅色和深色连线表示；(e)为配准后 7×7 的棋盘图像；(f)为 $p(y|E)$ 变分逼近后验概率)

3.7.2 多视角多模态图像配准

图 16 和图 17 分别展示了使用公开图像数据集 SUIRD(Small UAV Image Registration Dataset)^① 和 DRIVE(Digital Retinal Images for Vessel Extraction)^② 进行多视角遥感图像配准和多模态医学图像配准的结果。图 16 和图 17 都由 (a) 和 (b) 两组实验组成，每组第 1 列上下两行分别为源图像和目标图像；第 2 列至第 10 列上下两行分为算法 GL-CATE^[5]、GLPM^[13]、LLT^[21]、LMR^[10]、LPM^[12]、SIR^[11]、VFC^[4]、Yang 等人^[20] 和 VBHPM 进行配准后的空间转换图和棋盘图，其中棋盘图中用矩形框标注了未正确配准的区域。表 3 为以上 9 种算法在多视角遥感图像和多模态医学图像配准中的平均实验误差比较。本

文分别从两张待配准的图像中人工选取 50 对分散且易识别的特征点作为已知的对应点，计算空间转换后图像中 50 对特征点和人工标记的坐标差作为配准误差，空间转换后的源图像和目标图像重叠度越高则误差越小，算法的性能越好。由于 LMR、LPM 和 GLPM 没有建立空间转换函数及约束，所以不能体现其在图像配准中的优势。通过实验结果和误差分析可知，VBHPM 和 VFC 皆能够在多视角和多模态的图像配准中均可获得最优配准效果和较小的实验误差。

① <https://github.com/yyangynu/SUIRD>
② <https://drive.grand-challenge.org/>

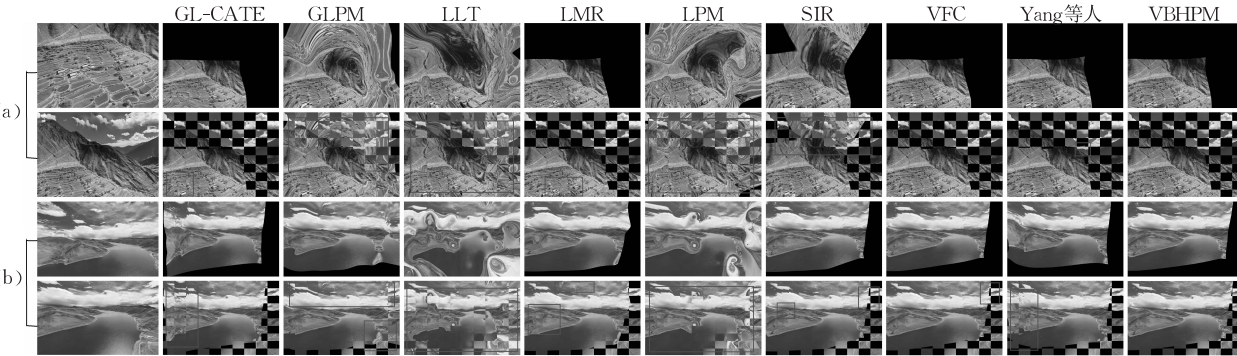


图 16 遥感图像配准对比实验(第 1 列分别为(a)、(b)两组遥感图像的源图像和目标图像;第 2 列至第 10 列,从上到下分为算法 GL-CATE^[5]、GLPM^[13]、LLT^[21]、LMR^[10]、LPM^[12]、SIR^[11]、VFC^[4]、Yang 等人^[20]和 VBHPM 的空间转换图像和配准后 10×10 的棋盘图像.其中棋盘图中用矩形框标注了未正确配准的区域)

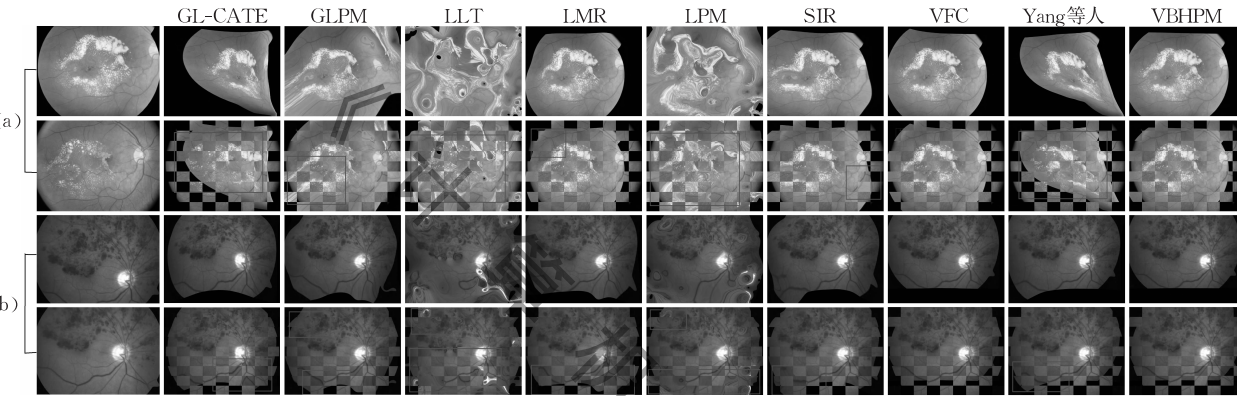


图 17 医学图像配准对比实验(第 1 列分别为(a)、(b)两组医学图像的源图像和目标图像;第 2 列至第 10 列,从上到下分为算法 GL-CATE^[5]、GLPM^[13]、LLT^[21]、LMR^[10]、LPM^[12]、SIR^[11]、VFC^[4]、Yang 等人^[20]和 VBHPM 的空间转换图像和配准后 9×9 的棋盘图像.其中棋盘图中用矩形框标注了未正确配准的区域)

表 3 多视角多模态图像配准结果误差 (单位:像素)

方法	MAD	MAE	RMSE	SD
GL-CATE	3.05	5.34	5.93	11.42
GLPM	3.81	6.06	5.81	11.94
LLT	4.66	6.68	7.72	15.76
LMR	1.67	3.47	3.03	5.81
LPM	3.80	7.05	8.42	19.43
SIR	2.51	4.75	4.32	9.31
VFC	0.98	1.46	1.66	3.21
Yang 等人	3.41	5.63	6.09	9.83
VBHPM	0.81	3.03	1.53	1.54

4 结 论

本文通过交替进行点集对应关系评估和空间转换更新两个步骤来恢复点集间一一对应关系.在对应关系评估步骤:(1)为了抵抗离群点的影响,本文基于 TLMM 来构建 VBHPM 并将其分为对应关系评估组件和离群点聚合组件,分别用于评估点集间对应关系和聚合离群点;(2)为了抵抗噪声的影响,本文使用贝叶斯线性回归来处理噪声;(3)为了避

免点集对应关系缺失造成的过度形变或者塌缩问题,本文使用 Dirichlet 先验分布来动态调节混合比例,为对应关系缺失的点分配较小的混合比例来维护点集间结构的稳定性.在空间转换更新步骤:(1)为了避免在目标方程的优化过程中陷入局部最优解,本文基于 VB 框架来最大化变分后验,同时采用树状平均场因式分解方法来维持参数间的依赖关系,以获得更紧致的变分下界;(2)为了降低旋转和形变造成点集对应关系评估偏差,本文提出了自适应全局-局部约束策略,在每次迭代中自动调整空间转换函数的全局和局部约束的正则化强度,从而实现从局部到全局的约束过程;(3)为了使得点集的空间转换过程更稳健和避免陷入局部最优解,本文采用了双阶段先验退火方案,使用 Gamma 先验分布动态调节精度来逐步实现由粗到精的配准过程.在实验部分,本文不仅测试了 VBHPM 的性能,而且展示了点集和图像配准的结果,并同当前 13 种流行算法进行了对比.实验证明,本文的算法在离群点,对应关系缺失,旋转和形变的情况下都能获得较

好的配准结果和较高的实验精度. 本文提出以下两种设想来改进本文的算法: (1) 在对应关系评估步骤中考虑加入刚性和非刚性参数的先验信息, 以实现自动调节刚性和非刚性的转换过程; (2) 对噪声进行进一步建模处理, 以消除异方差噪声的影响.

致 谢 本文作者感谢审稿人提出的宝贵意见以及编辑部老师的辛勤工作!

参 考 文 献

- [1] Zhao M, An B, Wu Y, et al. RFVTM: A recovery and filtering vertex trichotomy matching for remote sensing image registration. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2016, 55(1): 375-391
- [2] Schaerer J, Fassi A, Riboldi M, et al. Multi-dimensional respiratory motion tracking from markerless optical surface imaging based on deformable mesh registration. *Physics in Medicine & Biology*, 2011, 57(2): 357
- [3] Nguyen T M, Wu Q M J. Multiple kernel point set registration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, 35(6): 1381-1394
- [4] Ma Jiayi, Zhao Ji, Tian Jinwen, et al. Robust point matching via vector field consensus. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(4): 1706-1721
- [5] Zhang S, Yang Y, Yang K, et al. Point set registration with global-local correspondence and transformation estimation// *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*. Venice, Italy, 2017: 2669-2677
- [6] Qu H B, Wang J Q, Li B, et al. Probabilistic model for robust affine and non-rigid point set matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 39(2): 371-384
- [7] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, 33(8): 1633-1645
- [8] Ma Jiayi, Qiu Weichao, Zhao Ji, et al. Robust l_{2e} estimation of transformation for non-rigid registration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1115-1129
- [9] Tsin Y, Kanade T. A correlation-based approach to the robust point set registration// *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*. Berlin, Germany: Springer, 2004: 558-569
- [10] Ma Jiayi, Jiang Xingyu, Jiang Junjun, et al. LMR: Learning a two-class classifier for mismatch removal. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 28(8): 4045-4059
- [11] Zhang S, Zhao W, Hao X, et al. A context-aware locality measure for inlier pool enrichment in stepwise image registration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 29: 4281-4295
- [12] Kamimura S, Fujiyoshi M, Kiya H. A no reference image registration method using a LPM-based data hiding scheme// *Proceedings of the 2009 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS)*. Kanazawa, Japan, 2009: 216-219
- [13] Ma Jiayi, Jiang Junjun, Zhou Huabing, et al. Guided locality preserving feature matching for remote sensing image registration. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2018, 56(8): 4435-4447
- [14] Peel D, McLachlan G J. Robust mixture modelling using the t distribution. *Statistics and Computing*, 2000, 10(4): 339-348
- [15] Gerogiannis D, Nikou C, Likas A. Robust image registration using mixtures of t -distributions// *Proceedings of the 2007 IEEE 11th International Conference on Computer Vision*. Rio de Janeiro, Brazil, 2007: 1-8
- [16] Chui H, Rangarajan A. A new algorithm for non-rigid point matching// *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2000)* (Cat. No. PR00662). Hilton Head Island, USA, 2000: 44-51
- [17] Wang G, Wang Z, Zhao W, et al. Robust point matching using mixture of asymmetric Gaussians for nonrigid transformation// *Proceedings of the Asian Conference on Computer Vision*. Springer, Cham, 2014: 433-444
- [18] Myronenko A, Song Xubo. Point-set registration: Coherent point drift. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 2009, 32(12): 2262-2275
- [19] Ma Jiayi, Zhao Ji, Yuille A L. Non-rigid point set registration by preserving global and local structures. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 25(1): 53-64
- [20] Yang Zhuoqian, Yang Yang, Yang Kun, Wei Zi-Quan. Non-rigid image registration with dynamic Gaussian component density and space curvature preservation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, 28(5): 2584-2598
- [21] Ma J, Zhou H, Zhao J, et al. Robust feature matching for remote sensing image registration via locally linear transforming. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(12): 6469-6481
- [22] Zhou Z, Zheng J, Dai Y, et al. Robust non-rigid point set registration using student's- t mixture model. *PLoS One*, 2014, 9(3): e91381
- [23] Beal M J. Variational Algorithms for Approximate Bayesian Inference [Ph. D. dissertation]. University College London, London, USA, 2003
- [24] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1950, 68(3): 337-404
- [25] Kabán A, Sun J. A fast algorithm for robust mixtures in the presence of measurement errors. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(8): 1206-1220
- [26] Yuille A L, Grzywacz N M. A mathematical analysis of the motion coherence theory. *International Journal of Computer Vision*, 1989, 3(2): 155-175

- [27] Lei H, Jiang G, Quan G. Fast descriptors and correspondence propagation for robust global point cloud registration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26(8): 3614-3623
- [28] Du S, Xu G, Zhang S, et al. Robust rigid registration algorithm based on pointwise correspondence and correntropy. *Pattern Recognition Letters*, 2020, 132: 91-98
- [29] Yang Y, Ong S H, Foong K W C. A robust global and local

- mixture distance based non-rigid point set registration. *Pattern Recognition*, 2015, 48(1): 156-173
- [30] Qi Y. On the tail index of a heavy tailed distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2010, 62(2): 277-298
- [31] Mikolajczyk K, Tuytelaars T, Schmid C, et al. A comparison of affine region detectors. *International Journal of Computer Vision*, 2005, 65(1-2): 43-72

附 录.

(1) 对应关系评估组件的规模参数 M 后验推导

后续推理中使用 h 来代替 $k_z = h$. ELBO 下界是进行 l 次迭代的和, 每次迭代都能分别进行最大化. 下界 $q(m_z | h)$ 满足约束条件 $\int_0^{+\infty} q(m_z | h) dm_z = 1$, 根据树状平均场因式分解方法, ELBO 可表示为

$$\mathcal{L}_{M|h} = \sum_{l=1}^L \{ \langle \ln p(y_z | h, m_z) p(m_z | k_z = h) \rangle - q(h) \} \langle \ln q(m_z | h) \rangle \quad (36)$$

使用拉格朗日乘子将等式(36)表示为

$$\mathcal{L}_{M|h} = \langle \ln p(y_z | h, m_z) p(m_z | h) \rangle q(h) - \langle \ln q(m_z | h) \rangle q(h) + \lambda \left(\int q(m_z | h) dm_z - 1 \right) \quad (37)$$

对等式(37)的 $q(m_z | h)$ 进行求导并令结果等于 0, 则得到最优解 $q(m_z | h) = \exp[\mathbb{E}(m_z, h) + \lambda/q(h) - 1]$. 式中定义期望 $\mathbb{E}(m_z, h) = \langle \ln p(y_z | m_z, h) p(m_z, h) \rangle$, 根据约束条件 $\int q(m_z | h) dm_z = 1$, 可以推导出 λ 的表达式如下所示:

$$\lambda = q(h) \left[1 - \ln \left[\int \exp(\mathbb{E}(m_z, h)) dm_z \right] \right] \quad (38)$$

将等式(38)代入最优解 $q(m_z | h)$ 中, 可计算出后验代理表达式如等式(39)所示.

$$q(m_z | h) = \frac{\exp(\mathbb{E}(m_z, h))}{\int \exp(\mathbb{E}(m_z, h)) dm_z} \quad (39)$$

(2) 隐变量 K 的推导

为了保持隐变量 K 和规模参数 M 间的依赖关系, 本文使用联合概率对 K 和 M 联立求解, 则参数代理可表示为

$$q(m_z, k_z) \propto \langle \ln [p(y_z | \Theta) p(m_z | k_z) p(k_z | \pi) p(\pi)] \rangle,$$

对该参数代理求期望, 并同时对方等式两边的 m_{zl} 进行积分, 可得:

$$q(k_z = h) \propto \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(y_z | \mathcal{X}_l, (m_{zl} \Gamma_l)^{-1}) \mathcal{G}\left(n_{zl} \mid \frac{\tau_{zl}}{2}, \frac{\tau_{zl}}{2}\right) dm_{zl} \quad (40)$$

如等式(40)所示, 本文使用等式(3)所示的学生 t 分布来求积分, 得到的 k_{zl} 后验为一个高斯尺度的混合分布. 当 $1 \leq l \leq L$ 时, $q(k_{zl} = h)$ 的期望表示为等式(41).

$$q(k_z = h) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{u_l + d}{2}\right) \tilde{\pi}_l \tilde{\Gamma}_l^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{u_l}{2}\right) (u_l \pi)^{\frac{d}{2}}} \left[1 + \frac{\tilde{\varphi}_{zl}}{u_l} \right]^{-\frac{u_l + d}{2}} \quad (41)$$

同理, 当 $L + 1 \leq l \leq L + L_0$ 时, $q(k_z = h)$ 的期望表示为等式(42). 其中 $\tilde{\pi}$, $\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Lambda}$ 分别是对 π , Γ 和 Λ 求取期望后的值.

$$q(k_z = h) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{v_l + d}{2}\right) \tilde{\pi}_l \tilde{\Lambda}_l^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v_l}{2}\right) (v_l \pi)^{\frac{d}{2}}} \left[1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{zl}}{v_l} \right]^{-\frac{v_l + d}{2}} \quad (42)$$



HE Qi-Qi, M. S. candidate. Her current research interests include computer vision and pattern recognition.

LIN Gang, B. S. candidate. His main research interest is pattern recognition.

ZHOU Jie, undergraduate student. His current research interest is computer vision.

YANG Yang, Ph. D., professor. His current research interests include pattern recognition and computer vision.

Background

Non-rigid point set registration is a long-standing challenge in computer vision and pattern recognition, such as object detection, remote sensing image registration, image fusion, etc. Non-rigid point registration has some difficulties like noise, outliers, deformation, prior information, objective

function optimization, and so on. Our paper mainly focuses on dealing with outliers, missing correspondences, and objective function optimization.

To address outliers, one main classical scheme is using a robust parameter estimator (L2E) to minimize the difference

of two point sets, but it cannot get a better result when outliers present the same pattern as the inliers. Another popular method is using the extra entries to account for outliers, such as uniform distribution or Gaussian mixture model, but these may lack robustness for non-Gaussian outliers. To deal with the problem of missing correspondence, very recently, researchers began to pay attention to use the prior information to re-weight mixing proportion, but point set structure lacks constraint lead to the wrong correspondence easily. The problem of optimizing the objective function, the parameter estimation of MLE under EM frame is used widely, nevertheless, it causes the over-fitting problem and traps poor local optima. The current variational Bayesian method uses the mean-field full factorization to approach model posterior that will lose the correlations of variables. Covariances of the same prior are be used to anneal in VBPSM limit the freedom of parameter.

We propose a new non-rigid point set registration

method to deal with the outliers, missing correspondence, and objective function. Firstly, we construct a variational Bayesian hierarchical probability model (VBHPM) using a heavy-tail distribution which includes an extra item to resist outliers. Secondly, we use Dirichlet prior distribution to adjust the mixing proportions and the global-local constraints to solve the problems of loss of correspondence. Finally, we use the tree-structured variational distribution to optimize the objective function.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of Chain (No. 41971392). Point registration is a main research topic of our laboratory at the Yunnan Normal University. In the past few years, we have published over 40 refereed journal and conference papers, including Science, ICCV, IEEE TIP, Pattern Recognition, Remote Sensing, IEEE GRSL, IJRS, Journal of Software, Acta Automatica Sinica, etc.