

基于等同关系模型的演化算法期望首达时间对比分析

冯夫健¹⁾ 黄翰¹⁾ 张宇山²⁾ 郝志峰³⁾

¹⁾(华南理工大学软件学院 广州 510006)

²⁾(广东财经大学统计与数学学院 广州 510320)

³⁾(佛山科学技术学院数学与大数据学院 广东 佛山 528000)

摘要 演化算法的首达时间分析是演化计算领域理论基础研究的难点和热点问题. 本文研究建立了演化算法期望首达时间的随机过程模型, 以该模型为基础, 结合等价关系的性质, 提出了等同关系模型作为判定演化算法在期望首达时间上是否等价的评判标准, 实现了不同演化算法在期望首达时间上的等价类划分. 在等同关系模型的基础上, 论文提出了一种便于演化算法对比分析的数学工具——性能对比不等式, 为不同算法在期望首达时间上的直接对比分析提供了依据. 为了验证所提理论方法的可行性, 本文选用(1+1)-EA作为研究对象, 证明了不同选择算子和不同变异算子的(1+1)-EA算法的性能对比关系, 并通过实验结果验证了理论分析结果的正确性. 因此, 论文提出的等同关系模型可以作为演化算法在性能对比分析的一种理论工具.

关键词 演化算法; 等同关系; 首达时间; 性能对比不等式; Markov链

中图法分类号 TP18 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2019.02297

Comparative Analysis for First Hitting Time of Evolutionary Algorithms Based on Equal-in-Time Model

FENG Fu-Jian¹⁾ HUANG Han¹⁾ ZHANG Yu-Shan²⁾ HAO Zhi-Feng³⁾

¹⁾(School of Software Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510006)

²⁾(School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320)

³⁾(School of Mathematics and Big Data, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000)

Abstract First hitting time analysis aims to estimate the running time or the number of generations of an optimization algorithm when it obtains the optimal solution for the first time. First hitting time analysis of evolutionary algorithms (EAs) is a fundamental topic in evolutionary computation, due to its capability to provide a quantitative performance comparison among randomized search approaches. However, far too little attention has been paid to the performance comparison analysis of EAs. This paper aims to establish the performance comparison model for EAs by theoretically estimating the first hitting time. In our formula, the expected first hitting time of EAs is estimated using the proposed stochastic process model based on Markov chain. Equal-in-time model is introduced to compare the stochastic process model of EAs. Furthermore, we prove the equivalence relation between any two EAs that is equal-in-time. The proposed model can not only determine whether the algorithms is theoretically equivalent in the expected first hitting time, but

收稿日期: 2018-02-10; 在线出版日期: 2018-11-20. 本课题得到国家自然科学基金(61772225, 61876207)、贵州省科技计划项目(黔科合基础[2019]1164)、广东省自然科学基金杰出青年基金项目(2014A030306050)、广东省特支计划人才专项课题(2014TQ01X664)、广州市科学技术局项目(201804010276)、广州市对外合作项目(201807010047)、贵州省教育厅青年科技人才成长项目(黔教合KY字[2016]165号)资助. 冯夫健, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向为演化计算方法的理论基础. E-mail: fujian_feng@163.com. 黄翰(通信作者), 博士, 教授, 博士生导师, 中国计算机学会(CCF)高级会员, 主要研究领域为演化计算的应用与理论基础. E-mail: hhan@scut.edu.cn. 张宇山, 博士, 副教授, 主要研究领域为演化算法的理论基础. 郝志峰, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为机器学习、计算智能、代数学与组合优化.

also derive the equivalence class partition of EAs on expected first hitting time. On the basis of the equal-in-time model, we propose the convergence theory of EAs in equivalence relation, and analyze the convergence relation among EAs in equivalence class. A mathematical tool for the analysis of the comparison relation of EAs called performance comparison inequality is proposed according to equal-in-time relation. It can directly compare the stochastic processes of EAs and provide the comparison of the expected hitting time between any two EAs in non-empty evolutionary algorithm sets. The feasibility of the theoretical method is verified by a case study of a basic evolutionary algorithm with one individual and one descendant, termed $(1+1)$ -EA, in which two selection operators (including elite selection operator and proportional selection operator) and two mutation operators (including bit-wise probabilistic mutation operator and single bit proportional mutation operator) are involved to empirically validate the proposed first hitting time estimation method. Experimental results show that the empirically obtained first hitting time is consistent with the theoretically estimated first hitting time obtained by the proposed method. Furthermore, we derive a concrete calculation method for simplifying the stochastic process model of the expected first hitting time. Then we analyze the experimental results of $(1+1)$ -EA with different mutation operators and different selection operators in the setting of the randomly generated initial population and a given initial population. Both the theoretical analysis and experimental results dominate that the presented model provides a theoretical comparative analysis tool for the performance of EAs. This work presents a feasible theoretical performance comparison tool for any evolutionary algorithm based on the stochastic process model for first hitting time estimation which enables us to quantitatively compare the performance of any two EAs.

Keywords evolutionary algorithm; equal-in-time relation; first hitting time; performance comparison inequality; Markov chain

1 引 言

受进化论思想的启发,从 20 世纪 70 年代开始出现不同的随机启发式算法,如演化规划(Evolutionary Programming)、演化策略(Evolution Strategies)、遗传算法(Genetic Algorithms)、遗传规划(Genetic Programming)等^[1].到 20 世纪 90 年代,这些算法被证明在全局优化、复杂性问题求解等方面存在突出的优势,并且各种分支思想有了开始融合的趋势,统称为演化算法(Evolutionary Algorithms, EAs).目前,演化算法在工程优化、过程控制、智能控制等领域的应用越来越多,相对而言,其在基础理论方面的研究成果较少,如演化算法的时间复杂性分析和演化算法的性能对比分析等.其中,演化算法的性能对比分析是近几年基础理论研究中的热点也是难点^[2],且日益引起国内外学者的关注^[3-6].

首次搜索到最优解时的计算时间(或称迭代次数)

首次搜索到最优解时的计算时间(或称迭代次数)^[7],它是研究演化算法计算时间的主要指标^[8-9].国内外学者在这个指标的基础理论方面进行了较深入的研究.例如 Yu 等人^[10]研究了 $(\lambda+\lambda)$ EAs,并对 $\lambda=1$ 和 $\lambda=n$ 时在 trap 问题的期望首次达时间进行分析. Chen 等人^[11]针对图的随机移动问题,利用矩阵代数理论推导出一种新的不可归约马尔可夫期望首次达时间表示方法. Chen 等人^[12]提出了 EAs 在单峰问题首次达时间的一般方法,并研究了 $(N+N)$ EAs 在 LeadingOnes 和 OneMax 问题上的首次达时间上界问题.黄翰等人^[13]首次提出了平均增益模型来估计连续型 $(1+1)$ -EA 在球函数问题上的平均计算时间.张宇山等人^[14]利用停时理论,结合时齐马氏过程的性质,提出了分析演化算法首次达时间的新方法,以 $(1+\lambda)$ ES 求解倾斜平面问题进而分析平均首次达时间. Zhang 等人^[9]结合鞅论和停时理论对平均增益模型进行改进,提出了更加一般的平均增益理论来估计首次达时间的上界.为了便于比较优化问题中的不同 EAs, He 等人^[15-16]采用几何平均提出了一

种新的平均收敛速度,并在离散优化问题上估计了平均收敛速度的下界. Bi 等人^[17]通过初始种群起始位置的选取和算法搜索机制的设置来研究对演化算法收敛速度的影响因素. Corus 等人^[18]设计了一种马尔可夫链框架,来证明标准稳态遗传算法在 One-Max 函数上的运行时间边界问题. Qian 等人在文献^[19]中通过严格的计算时间证明了采样可以显著地加快带噪声的演化算法的优化时间. Yu 等人^[20]提出转换分析(Switch Analysis)方法来揭示演化算法的平均计算时间复杂性,并且证明了适应值层次法(Fitness Level Method)和漂移分析法(Drift Analysis Method)都可以规约到转换分析法.

综上所述,现有的关于演化算法首达时间分析的工作主要集中在计算时间的边界问题和收敛速度问题的研究上,而首达时间这一指标应用于演化算法对比分析方面的工作较少. 我们认为,该指标也可以作为对演化算法进行对比分析的一种理论依据^[2].

目前,演化算法的性能对比分析有两个不同的研究方向,分别为基于统计实验的分析方法和基于首达时间的分析方法.

在统计实验方面,自从演化算法提出至今,国内外学者都有深入的研究. 例如 Derrac 等人^[21]提出了基于 Page's Trend Test 的统计分析方法,通过研究演化算法搜索过程中的中间过程和最终结果来分析算法间收敛性能. Věcek 等人^[22]以原假设显著性测试(NHST)为基础,提出了用于演化算法性能比较的新方法,并探讨了演化算法数量、优化问题及独立运行次数对所提出方法在演化算法性能比较结论中的影响^[23]. Eftimov 等人^[24]针对多个单目标问题提出了元启发式随机优化算法的统计比较方法,给出了算法分级方案. Liu 等人^[25]以性能描述方法(PPM)^[26]和数据描述方法(DPM)^[27]为工具,通过不同基准随机算法置信区间的显著性差异来判定算法性能的优劣. 上述研究主要采用统计方法来验证算法间的性能,通过求解问题数量、算法数量、运行次数及收敛条件等来分析验证不同演化算法的性能对比. 相对而言,统计实验方法在算法的基础理论的研究较少,尤其在首达时间这一理论特性上没有进行深入的研究.

随着演化算法理论研究的进一步深入,基于首达时间的演化算法对比分析取得了一系列的成果. 例如, He 等人^[2,8,28]提出了关于计算时间复杂性分析的漂移分析理论,通过定义距离函数推导出满

足平均漂移分析的 Population Scalability 对比方法,探讨了种群大小与演化算法性能比较的关系. Borisovsky 等人在给定迭代次数和平均优化时间的条件下研究了随机爬山算法和其他 EAs 的比较关系^[3]. 黄翰等人^[29]建立了一种等态等价关系与强/弱态偏序关系模型,用于研究进化算法的收敛性对比分析,强/弱态关系模型所给的演化算法首达时间是趋于无穷情况下的,在算法比较方面通过强/弱态偏序关系来实现分析. 综上所述,虽然演化算法在首达时间的对比分析方面有了一定的研究基础,但相关工作大都需要满足特定的条件且研究侧重点主要在演化算法的计算时间复杂性分析方面,因此,在理论上关于演化算法的对比分析模型需要进一步研究.

受 Population Scalability 方法、等态等价关系与强/弱态偏序关系模型等研究结果的启发,本文基于 Markov 链的性质^[30-32],建立了期望首达时间的随机过程模型,提出等同关系模型来判定不同演化算法在期望首达时间上的等价关系;在等同关系模型的基础上,提出了用于演化算法性能对比分析的数学工具—性能对比不等式. 与文献^[2]所提 Population Scalability 对比方法不同,本文所提性能对比不等式不需要定义距离函数以及满足漂移分析的特定条件,通过构建等同关系模型实现了演化算法在期望首达时间上的直接对比分析. 研究最后以基于不同选择算子的(1+1)-EA 算法案例和基于不同变异算子的(1+1)-EA 算法案例为实证分析对象,实验结果表明,实际验证结果和理论方法对案例分析的结论一致.

2 演化算法的等同关系模型

本研究通过期望首达时间来构建演化算法的等同关系模型;本节将给出期望首达时间的随机过程模型、等同关系模型的定义及性能对比不等式.

2.1 期望首达时间的随机过程模型

本节重点讨论的是演化算法的随机过程模型,首先给出所用符号的说明,设 S 为可行解的有限集合, S 中的任意一个元素称为一个解或一个个体,一个或多个个体组成一个种群,一个规模为 N 的种群记为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $x_i \in S, i = 1, 2, \dots, N$.

设 $\mathcal{P}$ 为所有种群的集合, $\mathcal{P}_{opt}$ 为包含最优解的种群集合. 演化算法通过对种群的迭代操作来寻找最优解,具体的求解流程可以描述如下.

算法 1. 演化算法.

输入: 目标函数和解的长度

输出: 目前为止的最优解

1. 生成初始种群 $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, t=0$;
2. 对种群 X_0 中的个体进行评价;
3. WHILE X_t 中不包含最优解
4. 对 X_t 中的个体进行变异(或交叉)操作, 生成子代种群 X'_t ;
5. 对子代种群 X'_t 中的个体进行评价;
6. 从 $X'_t \cup X_t$ 或 X'_t 中进行选择操作, 生成新一代种群 X_{t+1} ;
7. $t=t+1$;
8. END

在演化算法中, 每一次迭代一般由两步组成, 分别为通过变异操作或交叉操作生成子代种群和通过选择操作生成新一代种群. 设 $X_t = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t\}, t=0, 1, \dots$ 为演化算法的第 t 代种群, 则序列 $\{X_t, t=0, 1, \dots\}$ 可以作为一个在种群集合 $\mathcal{P}$ 上取值的随机过程. 根据上述演化算法的求解流程可知, 第 $t+1$ 代种群 X_{t+1} 是从第 t 代种群 X_t 以及通过变异或交叉算子生成的子代种群 X'_t 中选择出来的, 且不受之前种群的影响, 因此序列 $\{X_t, t=0, 1, \dots\}$ 满足马尔可夫(Markov)过程, 即具有 Markov 性^[3,26]. 显然, 对于满足 Markov 性的随机过程 $\{X_t, t=0, 1, \dots\}$, 如果演化算法满足 $P\{X_t \in \mathcal{P}_{opt}\} = 1, t < +\infty$, 那么可以说该算法在有限迭代时间内可以找到最优解^[29]. 以此为基础, 本文给出演化算法收敛的概念.

定义 1. 算法收敛. 设 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 为演化算法 a 对应的 Markov 过程, $X_t^a \in \mathcal{P}$ 且 $\mathcal{P}_{opt} \subset \mathcal{P}$, 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\} = 1$, 则称演化算法 a 收敛.

演化算法首达时间描述的是首次以概率 1 找到最优解的时间, 文献[10, 28, 33-34]在研究演化算法的计算时间复杂性时分别给出了期望首达时间的概念. 本文基于 Markov 链的性质, 给出了等价的期望首达时间定义.

定义 2. 期望首达时间. 设 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 为演化算法 a 对应的 Markov 过程, $X_t^a \in \mathcal{P}$ 且 $\mathcal{P}_{opt} \subset \mathcal{P}$, 令 h 为一个随机变量, 若 $h = \min\{t: P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\} = 1\}$, 则称 h 为演化算法 a 的首达时间, 其数学期望为期望首达时间, 记为 E_h^a .

根据吸收态 Markov 链的定义^[29-30], 若随机过程 $\{X_t, t=0, 1, \dots\}$ 满足 Markov 性, 如果有 $P\{X_{t+1} \notin \mathcal{P}_{opt} | X_t \in \mathcal{P}_{opt}\} = 0, t=1, 2, \dots$, 则称该随机过程为

吸收态的. 即若 X_t 包含了最优解, 那么 X_{t+i} 亦包含最优解, 其中 $i=1, 2, \dots$. 鉴于此, 下文给出了演化算法期望首达时间的随机过程模型.

定理 1. 期望首达时间的随机过程模型. 设 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 为演化算法 a 对应的吸收态 Markov 过程, 且 $\mathcal{P}_{opt} \subset \mathcal{P}$, 令 $\lambda_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\}$, 若算法 a 收敛, 则演化算法 a 的期望首达时间可表示为

$$E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^a) \quad (1)$$

证明. 若 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 为吸收态 Markov 过程, 则对 $t=0, 1, \dots$ 有

$$\begin{aligned} \lambda_t^a &= P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\} \\ &= P\{h \leq t\} \\ \Rightarrow \lambda_t^a - \lambda_{t-1}^a &= P\{h \leq t\} - P\{h \leq t-1\} \\ \Rightarrow P\{h=t\} &= \lambda_t^a - \lambda_{t-1}^a, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} E_h^a &= 0 \cdot P\{h=0\} + \sum_{t=1}^{+\infty} t \cdot P\{h=t\} \\ &= \sum_{t=1}^{+\infty} t \cdot P\{h=t\}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} E_h^a &= \sum_{t=1}^{+\infty} t \cdot (\lambda_t^a - \lambda_{t-1}^a) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t=1}^n t \cdot (\lambda_t^a - \lambda_{t-1}^a) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\lambda_1^a - \lambda_0^a) + 2(\lambda_2^a - \lambda_1^a) + \dots + n(\lambda_n^a - \lambda_{n-1}^a)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [-(\lambda_0^a + \lambda_1^a + \lambda_2^a + \dots + \lambda_{n-1}^a) + n\lambda_n^a] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (\lambda_n^a - \lambda_t^a) \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} [\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n^a - \lambda_t^a)] \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^a), \end{aligned}$$

因此, $E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^a)$ 成立.

证毕.

通过定理 1 建立的随机过程模型可以刻画演化算法的期望首达时间, 其中, 期望首达时间 E_h^a 指的是演化算法 a 首次搜索到最优解的平均计算时间(或称迭代次数), λ_t^a 表示演化算法 a 在第 t 次迭代过程中搜索到最优解的概率. 基于定理 1, 下面给出演化算法的等同关系模型.

2.2 演化算法的等同关系模型

本节将在期望首达时间的随机过程模型基础上

建立等同关系模型, 用于分析演化算法在期望首达时间上的等价关系, 下面首先引入等同关系的定义.

定义 3. 等同关系. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, 设 $\tilde{R} \subseteq S_{EA} \times S_{EA}$, 对于 $\forall a, b \in S_{EA}$, 对应的吸收 Markov 过程分别为 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 和 $\{X_t^b, t=0, 1, \dots\}$. 若对于 $\lambda_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\}$ 和 $\lambda_t^b = P\{X_t^b \in \mathcal{P}_{opt}\}$, 且 $\lambda_0^b = P\{X_0^b \in \mathcal{P}_{opt}\} < 1$, 满足:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^a) \Big/ \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^b) = C \quad (2)$$

其中, C 为非负常数, 则称演化算法 a 等同于演化算法 b , 记为 $a\tilde{R}b$. $\tilde{R}$ 也称为 S_{EA} 上的等同关系.

$a\tilde{R}b$ 表明: 当演化算法 a 和 b 的期望首达时间为有限定值时, 他们在期望首达时间上可以视作等同. 当演化算法 a 和 b 的期望首达时间为非有限定值(不收敛或非有限时间收敛)时, 演化算法 a 和 b 的正向级数之和同阶情况下, 它们的期望首达时间也可以视作等同. 因此, 满足等同关系的演化算法, 可以认为其时间复杂度在期望条件下是相同的. 定理 2 给出等同关系是等价关系的定理.

定理 2. 等同关系是等价关系定理. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, 且 $\tilde{R}$ 为 S_{EA} 上的等同关系, 那么 $\tilde{R}$ 是一个等价关系.

证明. (1) 自反性. 对于 $\forall a \in S_{EA}$, 有 $a\tilde{R}a$, 所以 $\tilde{R}$ 满足自反性.

(2) 对称性. 对于 $\forall a, b \in S_{EA}$, 根据定义 3 有 $a\tilde{R}b \Rightarrow b\tilde{R}a$, 所以 $\tilde{R}$ 满足对称性.

(3) 传递性. 对于 $\forall a, b, c \in S_{EA}$, 当 $a\tilde{R}b$ 且 $b\tilde{R}c$ 时, 根据定义 3 有 $a\tilde{R}b \wedge b\tilde{R}c \Rightarrow a\tilde{R}c$, 所以 $\tilde{R}$ 满足传递性. 因此 $\tilde{R}$ 是一个等价关系. 证毕.

根据定理 2 的证明过程可知, 等同关系 $\tilde{R}$ 满足二元关系的自反性、对称性和传递性三条性质, 因此, 可以认为 $\tilde{R}$ 为非空演化算法集合 S_{EA} 上的等价关系.

因为等同关系 $\tilde{R}$ 在期望首达时间上也是一个等价关系, 所以可以实现对 S_{EA} 中演化算法的等价类划分, 本文给出等同等价类的定义如下.

定义 4. 等同等价类. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, $\tilde{R} \subseteq S_{EA} \times S_{EA}$, $\forall a \in S_{EA}$, 令

$$[a]_{\tilde{R}} = \{b | b \in S_{EA} \wedge a\tilde{R}b\} \quad (3)$$

则称 $[a]_{\tilde{R}}$ 为演化算法 a 关于 $\tilde{R}$ 的等同等价类.

定义 5. 算法有限时间收敛. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, $\forall a \in S_{EA}$ 且收敛, 若存在确定的正整数 M , 使得 a 对应的期望首达时间 $E_h^a < M$,

则称演化算法 a 有限时间收敛.

通过定义 4 和定义 5, 可以将演化算法集合根据算法的期望首达时间进行等价类划分, 下面给出相关定理.

定理 3. 等同等价类中演化算法的收敛性定理. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, 对于 $\forall a \in S_{EA}$ 满足吸收 Markov 过程, 假设等同等价类 $[a]_{\tilde{R}}$ 中有一个演化算法有限时间收敛, 则 $[a]_{\tilde{R}}$ 中的全部演化算法在有限时间均收敛, 且期望首达时间等同.

证明. 根据定义 5, 令 $x \in [a]_{\tilde{R}}$ 有限时间收敛, 对于 $\forall y \in [a]_{\tilde{R}}$, 由定义 3 可知, $\sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^x) = C \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^y)$, 其中, $\lambda_t^x = P\{X_t^x \in \mathcal{P}_{opt}\}$ 和 $\lambda_t^y = P\{X_t^y \in \mathcal{P}_{opt}\}$. 因为 x 有限时间收敛, 所以 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^x) < M$, 即级数 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^y)$ 收敛. 根据正项级数收敛的必要条件, $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \lambda_t^y) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^y = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X_t^y \in \mathcal{P}_{opt}\} = 1$, 因此, 演化算法 y 收敛. 根据定理 1, 演化算法期望首达时间 $E_h^y = \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^y)$, 即演化算法 y 有限时间收敛. 因此, $[a]_{\tilde{R}}$ 中的全部演化算法在有限时间均收敛, 且期望首达时间等同. 证毕.

定理 3 说明了在等同等价类中, 满足吸收 Markov 过程性质的演化算法具有在有限时间共同收敛的性质, 即只要证明等同等价类中一个演化算法有限时间收敛, 便可得到等价类中其他演化算法(满足吸收 Markov 过程性质)在有限时间均收敛. 定理 3 还反映出一个事实, 要分析一个演化算法(满足吸收 Markov 过程性质)是否在有限时间收敛, 可以通过分析其所在等价类中的其他演化算法是否有限时间收敛来达到相同的目的.

等同关系刻画了演化算法期望首达时间等价的性质, 可以把等同等价类中的演化算法期望首达时间视作等同. 2.3 小节将利用期望首达时间的随机过程模型和等同关系模型来推出演化算法的性能对比分析方法——性能对比不等式.

2.3 性能对比不等式

目前为止, 演化算法的性能对比主要通过统计实验方法来实现, 对于首达时间的对比分析主要针对特殊案例进行研究^[2, 29]. 本文根据上述等同关系模型, 提出一种基于期望首达时间的直接对比分析

模型——性能对比不等式,用于实现不同演化算法间性能的对比较分析。

定理 4. 演化算法的性能对比不等式. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合, 对于 $\forall a, b \in S_{EA}$, 对应的吸收 Markov 过程分别为 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 和 $\{X_t^b, t=0, 1, \dots\}$, 且同属于种群集合 $\mathcal{P}$. 记 $\lambda_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\}$ 和 $\lambda_t^b = P\{X_t^b \in \mathcal{P}_{opt}\}$, 其中 $\mathcal{P}_{opt} \subset \mathcal{P}$. 若 a 和 b 收敛, 且性能对比不等式:

$$\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) / \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) > 1 \quad (4)$$

成立, 则有 $E_h^a > E_h^b$, 即演化算法 b 在期望首达时间上比演化算法 a 更快收敛到 $\mathcal{P}_{opt}$.

证明. 通过以下三种情况进行证明, 根据已知条件 $\forall a, b \in S_{EA}$, 且满足吸收 Markov 过程, 可得:

(1) 当演化算法 a 和 b 均能有限时间收敛时, 由定义 5 可知, $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) < M$ 且 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) < M$, 根据定理 1, $E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a)$ 和 $E_h^b = \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b)$, 即性能对比不等式比较的是期望首达时间, 时间短为优, 因此, 若 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) / \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) > 1$ 成立, 则 $E_h^a > E_h^b$, 结论成立.

(2) 当演化算法 a 和 b 均收敛且其中仅有一个演化算法有限时间收敛时, 如果性能对比不等式 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) / \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) > 1$ 成立, 则必有 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) > M$ 且 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) < M$, 即演化算法 a 不满足有限时间收敛, 而演化算法 b 有限时间收敛, 因此, 根据定理 1, $E_h^a > E_h^b$, 结论成立.

(3) 当演化算法 a 和 b 均收敛, 但都不满足有限时间收敛时, 根据定义 5, 两个演化算法的期望首达时间均为无穷大, 若性能对比不等式 $\sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a) / \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^b) > 1$ 成立, 则演化算法 a 的期望首达时间的无穷大阶数大于演化算法 b , 即在无穷级数意义下 $E_h^a > E_h^b$ 成立. 证毕.

定理 4 说明了在非空演化算法集合中, 如果任意两个演化算法(满足吸收 Markov 过程性质)都收敛, 根据性能对比不等式可以判断这两个演化算法在期望首达时间上的收敛性能. 通过定理 4 的证明也说明了, 性能对比不等式是基于期望首达时间的

计算理论而提出的一种方法, 但当进行比较的演化算法期望首达时间是正无穷时, 可以通过性能对比不等式定理比较两个无穷大的阶来实现算法的性能对比.

在定理 4 中, 分别通过三种收敛情况进行了分析证明. 由于性能对比不等式以等同关系模型为基础建立, 不需要借用距离函数等辅助工具, 就可以实现演化算法在期望首达时间上的直接比较, 因而在理论上实现了不同演化算法的直接对比分析. 当对比的演化算法均收敛时, 采用本文所提的性能对比不等式可以实现期望首达时间的准确比较, 第 3 部分将通过案例分析对上述理论方法进行实证分析.

3 案例分析

本节根据经典演化算法的设计, 分别通过设计不同选择算子和不同变异算子的 (1+1)-EA 算法展开分析.

3.1 不同选择算子的 (1+1)-EA 算法

案例分析之前, 本节首先给出目标函数的描述如下:

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i=1, 2, \dots, m$. 当 X 中 1 的个数为奇数时, $f_1(X)$ 为 1 的个数; 当 X 中的 1 的个数为偶数时, $f_1(X)$ 为 1 的个数的 $1/2$.

假设二进制串长度 m 为奇数, 显然, 该函数的最优解为二进制串全为 1, 即 $X = \{1, 1, \dots, 1\}$. 本文通过不同演化算法求解同一目标函数来实现算法性能的对比较. (1+1)-EA 算法^[35-37]符合算法 1 的通用框架, 且具有种群规模为 1、算法结构简单便于分析等特点, 因此, 本文选用 (1+1)-算法进行案例分析. 下文给出了不同选择算子的 (1+1)-EA 算法流程框架.

算法 2. 不同选择算子的 (1+1)-EA 算法流程.

输入: 目标函数 $f_1(X)$ 和解的长度 m

输出: 目前为止的最优解

1. 生成 1 个 m 位全为 0 的二进制串作为初始种群, 记为 $X_0 = \{0, 0, \dots, 0\}$, $t=0$;
2. 对种群 X_0 中的个体进行评价;
3. WHILE X_t 中不包含最优解
4. 变异操作, 通过将父代 X_t 以 $1/m$ 的概率随机选择一个 0 位取反, 生成子代种群 X'_t ;
5. 对子代种群 X'_t 中的个体进行评价;
6. 选择操作, 通过适应值函数进行选取, 生成新一代

种群 X_{t+1} , 其中不同选择算子:

EA-I: 择优选择, 根据定义 6, 若 $f_1(X_t) < f_1(X'_t)$, 则 $X_{t+1} = X'_t$, 否则, $X_{t+1} = X_t$;

EA-II: 按适应值比例选择, 根据

$P(X_{t+1} = X'_t) = f_1(X'_t) / (f_1(X_t) + f_1(X'_t))$, 且

$P(X_{t+1} = X_t) = f_1(X_t) / (f_1(X_t) + f_1(X'_t))$ 进行选取;

7. $t = t + 1$;

8. END

下面通过性能对比不等式来分析 (1+1)-EA 算法分别在 EA-I 和 EA-II 情况下的性能对比. 为了便于分析, 首先给出两种演化算法在迭代过程的对比情况, 如表 1 所示.

表 1 EA-I 和 EA-II 迭代过程的对比情况

迭代次数	$1 - \lambda_t^I$	$1 - \lambda_t^{II}$
$t = 0$	1	1
$t = 1$	1	1
$t = 2$	1	1
...	...	...
$t = m$	1	$1 - (1/m)^m R_t$
$t > m$	1	$1 - \binom{t}{t-m} \left(\frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m R_t$

由算法 2 可知, 两种算法 EA-I 和 EA-II 的初始种群相同, 因此当 $t = 0$ 时, $\lambda_t^I = \lambda_t^{II} = 0$. 当 $t < m$ 时, EA-I 和 EA-II 均不能通过一次迭代达到最优, 因此, $\lambda_t^I = \lambda_t^{II} = 0$. 在 $t = m$ 时, EA-II 每次都可能搜索到更优的二进制串并通过选择机制进入下一代种群, 而 EA-I 因为偶数个 1 的二进制串适应值小于奇数个 1 的二进制串, 而在某个奇数个 1 的状态停滞不前, 即 $\lambda_t^{II} = (1/m)^m R_t > \lambda_t^I = 0$, 其中, $R_t =$

$$\prod_{i=1}^t (f_1(X'_i) / (f_1(X_i) + f_1(X'_i))).$$

同理, 当 $t > m$ 时, 有 $\lambda_t^{II} > \lambda_t^I = 0$, 因此, $\sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^I) / \sum_{t=0}^{+\infty} (1 - \lambda_t^{II}) > 1$

成立, 根据定理 4, EA-II 在期望首达时间上比 EA-I 更快收敛到 $\mathcal{P}_{opt}$.

为了验证理论分析的可行性, 本研究通过算法 2 求解目标函数 $f_1(X)$ 来进行实验观察. 对选择算子 EA-I 和 EA-II 对应的 (1+1)-EA 算法作对比分析. 对比实验中为了得到一个整齐分析结果的算例, 令初始种群均为 $X_0 = \{0, 0, \dots, 0\}$, 即初始种群设置为全 0 的二进制串, 种群规模设置为 1, 分别对解的长度 $m = 10$ 和 $m = 19$ 进行实验分析, 在初始种群和解的长度不变的情况下重复运行 30 次来求平均计算时间, 不同选择算子对应的 (1+1)-EA 算法的对比实验结果如图 1 和图 2 所示.

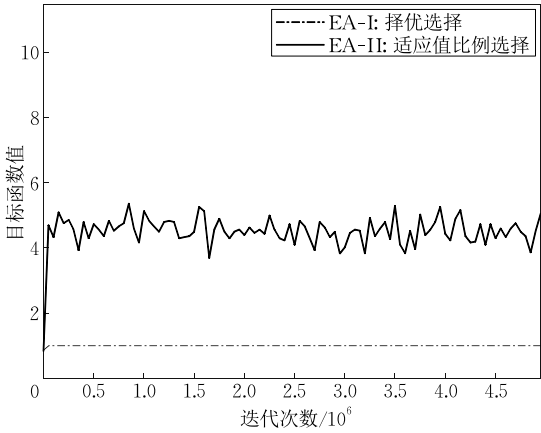


图 1 $m = 10$ 时 EA-I 和 EA-II 的平均计算时间对比分析结果

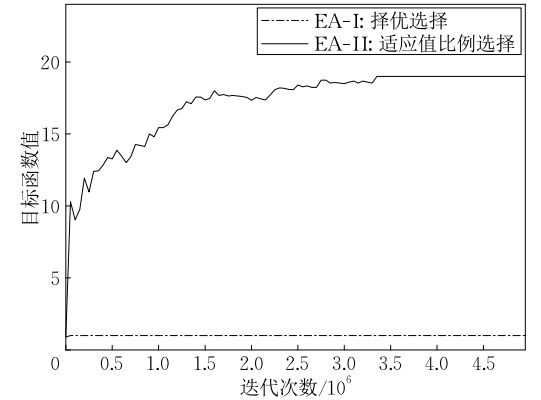


图 2 $m = 19$ 时 EA-I 和 EA-II 的平均计算时间对比分析结果

图 1 和图 2 给出了 $m = 10$ 和 $m = 19$ 的实验对比结果. 针对所给的目标函数 $f_1(X)$, 在初始种群相同的情况下, 算法 2 采用 EA-II (适应值比例选择算子) 搜索最优解的平均计算时间小于 EA-I (择优选择算子), 且 EA-I 在奇数 1 的状态时会停滞不前, 这与理论分析的结果一致. 通过对实验结果的观察可知, 随着解的长度的增大, EA-I 与 EA-II 的对比差异越明显. 这进一步验证了等同关系模型和性能对比不等式的可行性.

为了分析初始种群随机生成情况下对 EA-I 与 EA-II 的性能对比是否有影响, 也为了进一步验证本文所提方法的有效性, 将初始种群设置为随机生成, 解的长度设为 $m = 19$, 为了便于比较分析, 其他条件不变 (算法为 EA-I 和 EA-II 对应的 (1+1)-EA 算法, 种群规模为 1, 目标函数为 $f_1(X)$, 运行次数为 30 次), 初始种群随机生成情况下 EA-I 与 EA-II 的对比实验结果如图 3 所示.

图 3 表明, 针对不同选择算子的 (1+1)-EA 算法的对比分析问题, 由于初始种群的随机性, EA-I (择优选择算子) 在迭代开始的平均计算时间小于 EA-II (适应值比例选择算子), 但随着迭代次数的增

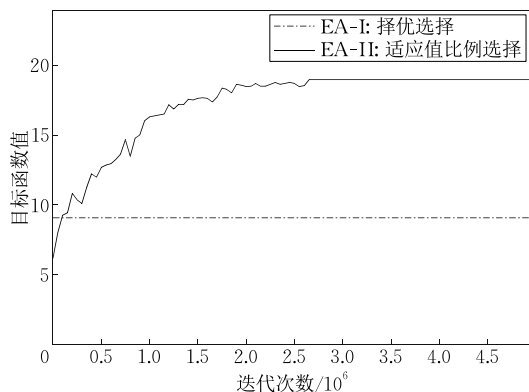


图 3 $m=19$ 时 EA-I 和 EA-II 的平均计算时间对比分析结果

加,算法 2 采用 EA-II(适应值比例选择算子)搜索到最优解的平均计算时间将快于 EA-I(择优选择算子),因此,初始种群随机生成情况下并没有影响演化算法的整体性能对比分析结果,这与理论分析的结果一致,进一步验证了定理 4 的正确性与有效性.

3.2 不同变异算子的(1+1)-EA 算法

本小节通过设计不同变异算子的(1+1)-EA 算法来分析本文所提理论方法的可行性,首先给出不同变异算子的(1+1)-EA 算法流程.

算法 3. 不同变异算子的(1+1)-EA 算法流程.

输入: 目标函数 $f_2(X)$ 和解的长度 m

输出: 目前为止的最优解

1. 生成 1 个 m 位全为 0 的二进制串作为初始种群,记为 $X_0 = \{0, 0, \dots, 0\}, t=0$;
2. 对种群 X_0 中的个体进行评价;
3. WHILE X_t 中不包含最优解
4. 变异操作,通过将 X_t 进行变异操作,生成子代种群 X'_t ,其中不同变异算子:
EA-a: 通过将 X_t 以每一位有 $1/m$ 的概率进行逐位取反,生成子代种群 X'_t ;
EA-b: 通过将 X_t 以 $1/m$ 的概率选一位进行取反,生成子代种群 X'_t ;
5. 对子代种群 X'_t 中的个体进行评价;
6. 选择操作,通过适应值函数进行择优选取,生成新一代种群 X_{t+1} ,其中选择算子采用算法 2 中的 EA-I(择优选择);
7. $t=t+1$;
8. END

为了便于分析算法 EA-a 和 EA-b 的性能,本文给出更为具体的演化算法期望首达时间计算方法.

定理 5. 期望首达时间的计算定理. 已知 S_{EA} 为给定的非空演化算法集合,对于 $\forall a \in S_{EA}$,对应的吸收 Markov 过程为 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$,令 $p_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^a \notin \mathcal{P}_{opt}\}$ 则

$$E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} \left[(1-\lambda_0^a) \prod_{i=1}^t (1-p_i^a) \right] \quad (5)$$

证明. 由定理 1 可知,

$$\lambda_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt}\} = P\{h \leq t\},$$

因此, $\lambda_t^a = (1-\lambda_{t-1}^a)P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^a \notin \mathcal{P}_{opt}\} +$

$$\lambda_{t-1}^a P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^a \in \mathcal{P}_{opt}\},$$

因为 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 为吸收态 Markov 链,

满足 $P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^a \in \mathcal{P}_{opt}\} = 1$,

所以 $\lambda_t^a = (1-\lambda_{t-1}^a)p_t^a + \lambda_{t-1}^a$,

因此有 $1-\lambda_t^a = 1-\lambda_{t-1}^a - (1-\lambda_{t-1}^a)p_t^a$

$$= (1-p_t^a)(1-\lambda_{t-1}^a)$$

$$= (1-\lambda_0^a) \prod_{i=1}^t (1-p_i^a),$$

所以 $E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a)$

$$= \sum_{t=0}^{+\infty} \left[(1-\lambda_0^a) \prod_{i=1}^t (1-p_i^a) \right]$$

证毕.

根据定理 5 可知,演化算法的期望首达时间由 λ_0^a 和 p_t^a 决定,其中, λ_0^a 表示演化算法 a 初始化过程中搜索到最优解的概率, p_t^a 表示演化算法 a 在第 $t-1$ 次迭代过程中未搜索到最优解的条件下,第 t 次迭代搜索到最优解的概率. 定理 5 可以用来简化定理 1 中 λ_t^a 的分析难度,通过将 λ_t^a 进行分解来推导出 $E_h^a = \sum_{t=0}^{+\infty} (1-\lambda_t^a)$ 的具体计算方法. 下面给出目标函数:

设 $f_2(X) = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$, 其中

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n,$$

权重 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n > 0, w_0 \geq 0$. 该函数的最优解为二进制串全为 1, 即 $X = \{1, 1, \dots, 1\}$.

下面通过性能对比不等式来分析(1+1)-EA 算法分别在 EA-a 和 EA-b 情况下的性能对比.

设算法 EA-a 和 EA-b 对应的随机过程 $\{X_t^a, t=0, 1, \dots\}$ 和 $\{X_t^b, t=0, 1, \dots\}$ 满足吸收态 Markov 性且初始种群相同,根据定理 5,

$$\text{令 } p_t^a = P\{X_t^a \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^a \notin \mathcal{P}_{opt}\},$$

$$p_t^b = P\{X_t^b \in \mathcal{P}_{opt} | X_{t-1}^b \notin \mathcal{P}_{opt}\},$$

因为 $\lambda_t^a = (1-\lambda_{t-1}^a)p_t^a + \lambda_{t-1}^a$,

所以有 $1-\lambda_t^a = 1-\lambda_{t-1}^a - (1-\lambda_{t-1}^a)p_t^a$,

则 $1-\lambda_t^a = (1-p_t^a)(1-\lambda_{t-1}^a)$

$$= (1-\lambda_0^a) \prod_{i=1}^t (1-p_i^a),$$

令 $q_t^a = \prod_{i=1}^t (1 - p_i^a)$, 其中, $l(t)$ 表示第 t 次迭代时二进制位中 1 的个数. 为了便于分析, 我们给出了 EA-a 和 EA-b 两种演化算法在迭代过程的对比情况, 如表 2 所示.

表 2 EA-a 和 EA-b 迭代过程的对比情况

迭代次数	$1 - \lambda_t^a$	$1 - \lambda_t^b$
$t=0$	1	1
$t=1$	$(1 - \lambda_0^a) q_1^a$	1
...	...	...
$t=m$	$(1 - \lambda_0^a) q_m^a$	$1 - \left(\frac{1}{m}\right)^m$
$t > m$	$(1 - \lambda_0^a) q_t^a$	$1 - \binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{t-m} \left(\frac{1}{m}\right)^m$

表 2 中根据 EA-a 和 EA-b 两种演化算法的迭代情况对 $1 - \lambda_t^a$ 和 $1 - \lambda_t^b$ 进行了详细的描述, 下面通过推导的方式对 EA-a 和 EA-b 的性能对比情况展开讨论分析.

根据定理 5, 结合表 2 的描述, 得到

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^a) &= \sum_{t=1}^N \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{l(t)} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-l(t)} \right], \\
 \sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^b) &= \sum_{t=m}^N \left[1 - \binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{t-m} \left(\frac{1}{m}\right)^m \right], \\
 \text{已知 } l(t) \text{ 表示第 } t \text{ 次迭代时二进制位中 1 的个数, } m &\text{ 表示解的长度 (二进制串的长度), 所以有 } m \geq l(t), \\
 \text{于是 } \left(\frac{1}{m-1}\right)^{l(t)} &\geq \left(\frac{1}{m-1}\right)^m, \text{ 则} \\
 \frac{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^a)}{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^b)} &> \frac{N - \sum_{t=1}^N \left[\left(\frac{1}{m}\right)^{l(t)} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-l(t)} \right]}{N - \sum_{t=m}^N \left[\binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{t-m} \left(\frac{1}{m}\right)^m \right]} \\
 &= \frac{N - \sum_{t=1}^N \left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{l(t)} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \right]}{N - \sum_{t=m}^N \left[\binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^t \left(\frac{1}{m-1}\right)^m \right]} \\
 &> \frac{N - \sum_{t=1}^N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m}{N - \sum_{t=m}^N \left[\binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^t \right]} \\
 &= \frac{N - N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m}{N - \sum_{t=m}^N \left[\binom{t}{t-m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^t \right]} \\
 &= \frac{N - N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m}{N - \sum_{t=0}^{N-m} \left[\binom{t+m}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^t \right] \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m},
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } T = \sum_{t=0}^{N-m} \left[\binom{t+m}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^t \right].$$

下面通过对上式的讨论, 来分析 EA-a 和 EA-b 两种演化算法的性能对比关系. 当 $m = 1$ 时,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = 0, \text{ 从而可得 } \frac{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^a)}{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^b)} > 1, \text{ 根据定}$$

理 4, EA-b 在期望首达时间上比 EA-a 更快收敛到 $\mathcal{P}_{opt}$. 当 $m = N$ 时, EA-a 和 EA-b 的迭代次数等于解的长度, 根据算法 3 可知, 这时二者均未能搜索到最优解, 结合 N 和 T 的对比分析可知, $T \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m <$

$$N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m, \text{ 即 } \frac{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^a)}{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^b)} > 0. \text{ 随着 EA-a 和}$$

EA-b 的迭代次数远大于解的长度时, 根据 N 和 T 的对比分析可知, $T \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m > N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$, 即

$$\frac{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^a)}{\sum_{t=0}^N (1 - \lambda_t^b)} > 1, \text{ 根据定理 4, EA-b 在期望首达时间}$$

上比 EA-a 更快收敛到 $\mathcal{P}_{opt}$. 下面通过实验的方法对上述推导分析进行验证.

为了验证不同变异算子的 (1+1)-EA 算法理论分析的正确性, 通过算法 3 求解目标函数 $f_2(x)$ 进行实验观察. 分别对变异算子 EA-a 和 EA-b 对应的 (1+1)-EA 算法作对比分析. 初始种群均为 $X_0 = \{0, 0, \dots, 0\}$, 解的长度分别设置为 $m = 10$ 和 $m = 20$, 在初始种群和解的长度不变的情况下重复运行 30 次, 对比实验结果如图 4 和图 5 所示.

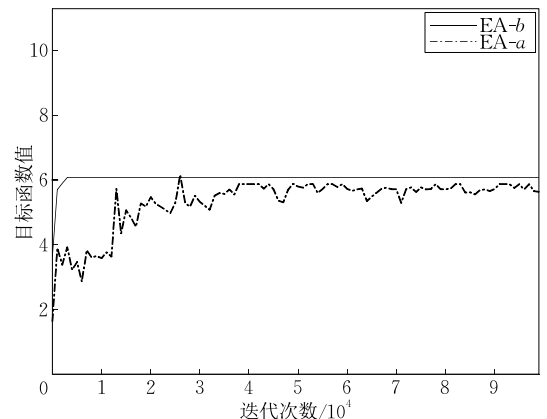


图 4 $m=10$ 时 EA-a 和 EA-b 的平均计算时间对比分析结果

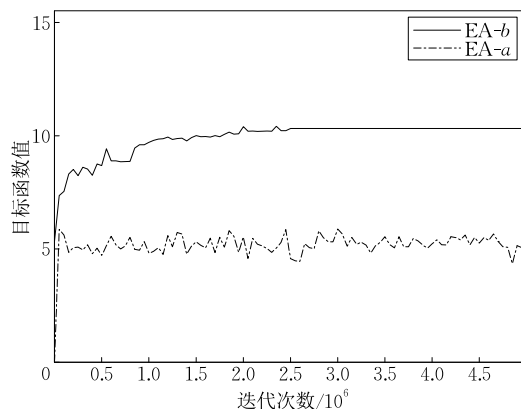


图 5 $m=20$ 时 EA-a 和 EA-b 的平均计算时间对比分析结果

实验结果表明,根据已知目标函数 $f_2(X)$,在初始种群相同的情况下采用变异算子 EA-b 搜索到最优解的平均计算时间比采用变异算子 EA-a 更快,且通过对图 4 和图 5 的观察可知,当解的长度不断增大时,EA-a 与 EA-b 的平均计算时间的对比性能差异更加明显.实验结果进一步验证了等同关系模型和性能对比不等式的正确性和有效性.

下面通过实验的方式分析初始种群随机生成情况下是否影响 EA-a 和 EA-b 的对比分析结果.为了便于分析,令解的长度为 $m=20$,其他条件不变(种群规模为 1,目标函数为 $f_2(X)$,重复运行次数为 30 次),对比实验结果如图 6 所示.

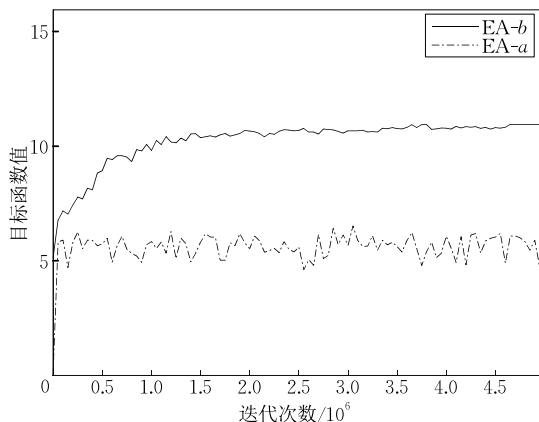


图 6 $m=20$ 时 EA-a 和 EA-b 的平均计算时间对比分析结果

从图 6 可以看出,针对初始种群随机生成情况,在其他条件(解的长度,目标函数,运行次数)不变的情况下,实际运行结果和初始种群均为 $X_0 = \{0, 0, \dots, 0\}$ 的实验结果(图 5)在性能对比实验上基本一致,即算法 3 采用变异算子 EA-b 搜索到最优解的平均计算时间比采用变异算子 EA-a 更快,这与理论分析的结果一致.

4 结 论

演化算法的期望首达时间是研究算法性能对比分析的重要指标,本文基于吸收态 Markov 性,建立了便于直接分析演化算法期望首达时间的随机过程模型.以该模型为基础,将参与首达时间对比分析的演化算法定义为集合 S_{EA} ,建立了可用演化算法期望首达时间进行对比分析的等同关系模型,证明了满足等同关系模型的演化算法在期望首达时间上满足定价关系,在期望首达时间等同的情况下可以实现演化算法的等价类划分.基于等同关系模型,本文提出了一种便于演化算法性能对比分析的方法——性能对比不等式,该方法不需要借用距离函数等辅助工具,就可以实现演化算法在期望首达时间上的直接对比分析.

通过分别设计不同选择算子和不同变异算子的 $(1+1)$ -EA 算法对所提理论模型进行验证分析.理论上,文中所提模型不仅适用于 $(1+1)$ -EA 算法的对比分析,只要满足算法 1 求解框架的演化算法都可以用性能对比不等式进行分析.未来研究工作将主要在:(1)进一步改进等同关系模型,通过级数收敛的性质完善性能对比不等式,为不同演化算法在求解具有实际背景的优化问题上提供理论依据;(2)设计不需要满足吸收 Markov 性的更为一般的性能对比不等式,并用其分析现有的演化算法,为算法的改进提供理论依据.

参 考 文 献

- [1] Eiben A E, Smith J. From evolutionary computation to the evolution of things. *Nature*, 2015, 521(7553): 476-482
- [2] He J, Yao X. Average drift analysis and population scalability. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 426-439
- [3] Borisovsky P A, Ereemeev A V. Comparing evolutionary algorithms to the $(1+1)$ -EA. *Theoretical Computer Science*, 2008, 403(1): 33-41
- [4] Yildiz A R. A comparative study of population-based optimization algorithms for turning operations. *Information Sciences*, 2012, 210(1): 81-88
- [5] Yildiz A R. Comparison of evolutionary-based optimization algorithms for structural design optimization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2013, 26(1): 327-333

- [6] Siegmund F, Ng A H C, Deb K. A comparative study of fast adaptive preference-guided evolutionary multi-objective optimization//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Münster, Germany, 2017: 560-574
- [7] He J, Yao X. Towards an analytic framework for analysing the computation time of evolutionary algorithms. *Artificial Intelligence*, 2003, 145(1-2): 59-97
- [8] He J, Yao X. Drift analysis and average time complexity of evolutionary algorithms. *Artificial Intelligence*, 2001, 127(1): 57-85
- [9] Zhang Y S, Huang H, Hao Z F, et al. First hitting time analysis of continuous evolutionary algorithms based on average gain. *Cluster Computing*, 2016, 19(3): 1323-1332
- [10] Yu Y, Zhou Z H. A new approach to estimating the expected first hitting time of evolutionary algorithms. *Artificial Intelligence*, 2008, 172(15): 1809-1832
- [11] Chen H, Zhang F. The expected hitting times for finite Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 2008, 428(11-12): 2730-2749
- [12] Chen T, He J, Sun G, et al. A new approach for analyzing average time complexity of population-based evolutionary algorithms on unimodal problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, 39(5): 1092-1106
- [13] Huang Han, Xu Wei-Di, Zhang Yu-Shan, et al. Runtime analysis for continuous (1+1) evolutionary algorithm based on average gain model. *Scientia Sinica Informationis*, 2014, 44(6): 811-824(in Chinese)
(黄翰, 徐威迪, 张宇山等. 基于平均增益模型的连续型(1+1)进化算法计算时间复杂性分析. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44(6): 811-824)
- [14] Zhang Yu-Shan, Hao Zhi-Feng, Huang Han, et al. A stopping time theory model of first hitting time analysis of evolutionary algorithms. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1582-1591(in Chinese)
(张宇山, 郝志峰, 黄翰等. 进化算法首达时间分析的停时理论模型. *计算机学报*, 2015, 38(8): 1582-1591)
- [15] He J, Lin G. Average convergence rate of evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 316-321
- [16] He J. An analytic expression of relative approximation error for a class of evolutionary algorithms//Proceedings of the Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on. Vancouver, Canada, 2016: 4366-4373
- [17] Bi W, Maier H R, Dandy G C. Impact of starting position and searching mechanism on the evolutionary algorithm convergence rate. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 2016, 142(9): 04016026
- [18] Corus D, Oliveto P S. Standard steady state genetic algorithms can hillclimb faster than mutation-only evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5): 720-732
- [19] Qian C, Yu Y, Tang K, et al. On the effectiveness of sampling for evolutionary optimization in noisy environments. *Evolutionary Computation*, 2018, 26(2): 237-267
- [20] Yu Y, Qian C, Zhou Z H. Switch analysis for running time analysis of evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(6): 777-792
- [21] Derrac J, García S, Hui S, et al. Analyzing convergence performance of evolutionary algorithms: A statistical approach. *Information Sciences*, 2014, 289: 41-58
- [22] Veček N, Mernik M, Crepinšek M. A chess rating system for evolutionary algorithms: a new method for the comparison and ranking of evolutionary algorithms. *Information Sciences*, 2014, 277: 656-679
- [23] Veček N, Crepinšek M, Mernik M. On the influence of the number of algorithms, problems, and independent runs in the comparison of evolutionary algorithms. *Applied Soft Computing*, 2017, 54: 23-45
- [24] Eftimov T, Korošec P, Seljak B K. A novel approach to statistical comparison of meta-heuristic stochastic optimization algorithms using deep statistics. *Information Sciences*, 2017, 417: 186-215
- [25] Liu Q, Chen W N, Deng J D, et al. Benchmarking stochastic algorithms for global optimization problems by visualizing confidence intervals. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2924-2937
- [26] Dolan E D, Moré J J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 2002, 91(2): 201-213
- [27] Moré J J, Wild S M. Benchmarking derivative-free optimization algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 20(1): 172-191
- [28] He J, Yao X. From an individual to a population: An analysis of the first hitting time of population-based evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(5): 495-511
- [29] Huang Han, Lin Zhi-Yong, Hao Zhi-Feng, et al. Convergence analysis and comparison of evolutionary algorithms based on relation model. *Chinese Journal of Computers*, 2011, 34(5): 801-811(in Chinese)
(黄翰, 林智勇, 郝志峰等. 基于关系模型的进化算法收敛性分析与对比. *计算机学报*, 2011, 34(5): 801-811)
- [30] Goldberg D E, Segrest P. Finite Markov chain analysis of genetic algorithms//Proceedings of the 2nd International Conference on Genetic Algorithms. New Jersey, USA, 1987: 1-8
- [31] Meyn S P, Tweedie R L. *Markov Chains and Stochastic Stability*. London: Springer-Verlag, 1993
- [32] Suzuki J. A Markov chain analysis on simple genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1995, 25(4): 655-659
- [33] Huang Han, Hao Zhi-Feng, Wu Chun-Guo, Qin Yong. The convergence speed of ant colony optimization. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(8): 1344-1353(in Chinese)

(黄翰, 郝志峰, 吴春国, 秦勇. 蚁群算法的收敛速度分析. 计算机学报, 2007, 30(8): 1344-1353)

- [34] Huang Han, Hao Zhi-Feng, Qin Yong. Time complexity of evolutionary programming. *Journal of Computer Research and Development*, 2008, 45(11): 1850-1857(in Chinese)

(黄翰, 郝志峰, 秦勇. 进化规划算法的时间复杂度分析. 计算机研究与发展, 2008, 45(11): 1850-1857)

- [35] Droste S, Jansen T, Wegener I. On the analysis of the $(1+1)$ evolutionary algorithm. *Theoretical Computer Science*,

2002, 276(1-2): 51-81

- [36] Sung C W, Yuen S Y. Analysis of $(1+1)$ evolutionary algorithm and randomized local search with memory. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(2): 287-323

- [37] Qian C, Bian C, Jiang W, et al. Running time analysis of the $(1+1)$ -EA for OneMax and LeadingOnes under bit-wise noise // *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Berlin, Germany, 2017: 1399-1406



FENG Fu-Jian, Ph. D. candidate, lecturer. His main research interests include theoretical foundation of evolutionary computation.

HUANG Han, Ph. D. , professor, Ph.D. supervisor. His main research interests include theoretical foundation

and application of evolutionary computation.

ZHANG Yu-Shan, Ph.D. , associate professor. His main research interests include theoretical foundation of evolutionary algorithms.

HAO Zhi-Feng, Ph. D. , professor, Ph.D. supervisor. His main research interests include machine learning, design and analysis of algorithms, combinatorial optimization and algebra.

Background

Evolutionary algorithms (EAs) are widely applied to many optimization problems, but there is still few research results on the fundamental theory. The performance comparative analysis of evolutionary algorithms is an important and difficult problem in the field of evolutionary computation, it can help reveal the comparison of EAs in convergence time. The existing work on comparative analysis of EAs mainly includes population scalability based on drift analysis and significance difference based on visualizing confidence interval.

In this paper, the expected first hitting time of EAs can be estimated by a probability model based on the property of Markov chain. Equal-in-time model is introduced to analyze relationship between the EAs, to determine whether the algorithms is equivalent in the expected first hitting time, and to derive the equivalence class partition of EAs on convergence time. Performance comparison inequality is proposed, as a mathematical tool, to analyze the comparison relation of EAs on convergence. We verify the feasibility of the theoretical method, by a case study of $(1+1)$ -EA, in which the different selection operator and different mutation operator are designed to analyze the comparison relation. Case analysis shows that the presented model can be a theorem foundation to study the comparative analysis of evolutionary algorithms.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (61772225, 61876207), Science Technique Department of Guizhou Province ([2019] 1164), the Guangdong Natural Science Funds for Distinguished Young Scholar (2014A030306050), the Guangdong High-Level Personnel of Special Support Program (2014TQ01X664), the Guangzhou Science and Technology Project (201804010276), the International Cooperation Project of Guangzhou (201807010047) and the Youth Science and Technology Talents Cultivating Object of Guizhou Province (Qian education cooperation KY word [2016] 165). Supported by these projects, our research group conducts research around theoretical foundation and optimization design of evolutionary computation, and has achieved some theoretical achievements on the comparative analysis and time complexity analysis of evolutionary computation such as equivalence-in-status relation model, average gain model. We have published some related research papers on authoritative journals at home and abroad such as *Science China*, *Chinese Journal of Computers*, *Journal of Computer Research and Development*, *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, *Information Sciences*, *Cluster Computing*, *Neural Computing and Applications*, etc.