

# 树形偏序自动机的同步问题

崔振河<sup>1)</sup> 王志喜<sup>2) 3)</sup> 何 勇<sup>2) 3)</sup>

<sup>1)</sup> (中山大学计算机学院 广州 510006)

<sup>2)</sup> (湖南科技大学计算机科学与工程学院 湖南 湘潭 411201)

<sup>3)</sup> (服务计算与软件服务新技术湖南省重点实验室 湖南 湘潭 411201)

**摘 要** 对于给定的自动机,能将所有状态都转换到同一状态的输入字被称为该自动机的同步字.有同步字的自动机称为同步自动机.同步自动机已广泛应用于系统测试、编码、工业自动化、机器人技术及生物计算等领域.同步自动机研究的基本问题是自动机的同步问题(含同步性判定问题和同步字查找问题),最具挑战性的课题是证实或证伪关于同步自动机最短同步字长度的 Černý 猜想.偏序自动机是具有一个相容偏序结构的自动机.同步自动机的研究从理论上可以归结到同步偏序自动机的研究上,因此,Černý 猜想成立当且仅当其对所有的偏序自动机都成立.现有的研究工作表明,Černý 猜想只对于一些结构较为特殊的偏序自动机类,包括单演自动机、广义单演自动机以及有界偏序自动机是成立的.作为偏序自动机的另一类特殊情形,本文研究关于树形偏序自动机的同步性检测问题,同步字查找问题以及 Černý 猜想,主要贡献包括:讨论了树形偏序自动机与现有的几类偏序自动机之间的关系,说明了树形偏序自动机包含所有单演自动机和有界偏序自动机,并且不同于广义单演自动机类;给出了树形偏序自动机的同步性判定和同步字计算方法,特别地,证明了 Černý 猜想对树形偏序自动机成立;设计了树形偏序自动机的专用同步算法,该算法的时间复杂度低于通用的自动机同步算法,且对任意  $n$ -状态同步树形偏序自动机都可以找到长度不超过  $(n-1)^2$  的同步字.

**关键词** 同步自动机;同步算法;Černý 猜想;相容偏序结构;树形偏序自动机

**中图法分类号** TP301 **DOI 号** 10.11897/SP.J.1016.2023.01961

## On the Synchronizing Problem of Tree-Like Partially Ordered Automata

CUI Zhen-He<sup>1)</sup> WANG Zhi-Xi<sup>2) 3)</sup> HE Yong<sup>2) 3)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Computer Science and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510006)

<sup>2)</sup> (School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201)

<sup>3)</sup> (Key Laboratory of Service Computing and New Technologies of Software Service of Hunan Province, Xiangtan, Hunan 411201)

**Abstract** An input word of an automaton is called a synchronizing word if it transfers all states to a single state. An automaton having a synchronizing word is called a synchronizing automaton. Synchronizing automata have been validly applied in many fields such as system testing, encoding, industrial automation, robotics and biological computation. For the researches on synchronizing automata, the fundamental problem is the synchronizing problem, while the most challenging issue is to prove or disapprove the Černý Conjecture concerning the lengths of the shortest synchronizing words of synchronizing automata. Partially ordered automata (in brief, po-automata) are the automata whose state set is equipped with a partial order that compatible to the input letters. Theoretically, the research of synchronizing automata can be ascribed to the research of synchronizing po-automata, thus, Černý Conjecture holds precisely when it holds for partially or-

收稿日期:2021-11-23;在线发布日期:2023-03-10. 本课题得到国家自然科学基金(No. 61572013)资助. 崔振河,博士,讲师,主要研究领域为自动机理论、知识表示与推理. E-mail: cuizh3@mail2.sysu.edu.cn. 王志喜,硕士,副教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为理论计算机科学、计算机算法. 何 勇(通信作者),博士,教授,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究领域为形式语言与自动机理论. E-mail: yonghe@hnust.edu.cn.

dered automata. Some classes of po-automata, such as monotonic automata, generalized monotonic automata and bounded po-automata, have been proved to satisfy Černý Conjecture. Tree-like po-automata are the po-automata whose partially ordered state set is tree-like, in order to extend the research of Černý Conjecture to a more general case of po-automata, this paper considers the synchronization of tree-like po-automata. A method to check the synchronization and find a synchronizing word (when it exists) for an arbitrary tree-like po-automaton is invented. With the application of such a method, the Černý Conjecture is confirmed for tree-like po-automata, and a synchronizing algorithm for tree-like po-automata is designed. Particularly, compared with the general synchronizing algorithms, the current algorithm has the lower time and space complexities, and it can find a synchronizing word for an  $n$ -state synchronizing tree-like po-automaton under the restriction of length at most  $(n-1)^2$ .

**Keywords** synchronizing automaton; synchronizing algorithm; the Černý Conjecture; compatible partially ordered structure; tree-like partially ordered automaton

## 1 引 言

对于给定的自动机,能将所有状态都转换到同一状态的输入字被称为该自动机的同步字.有同步字的自动机称为同步自动机.从定义上来看,同步自动机似乎是一类非常特殊的自动机,但从统计意义上来说绝大部分自动机是同步的<sup>[1]</sup>.

多个领域的研究人员曾相互独立地发现了同步自动机:1956年,计算机科学家 Ashby 首先发现了同步自动机<sup>[2]</sup>;1964年,控制学家 Černý 在研究计算机的重置问题时也发现了同步自动机<sup>[3]</sup>;同年,电子学家 Hennie 在研究电子设备的故障检测问题时又发现了同步自动机<sup>[4]</sup>;1985年,工业自动化专家 Natarajan 在考虑流水线上待装配部件的定位问题时再一次发现了同步自动机<sup>[5-6]</sup>.几十年来,同步自动机得到了深入的研究,并已被广泛应用于重启装置的设计、系统测试、编码、通信、工业自动化、机器人学以及生物计算等领域<sup>[7-17]</sup>.Volkov 对同步自动机的研究及应用进行了详细的介绍<sup>[18]</sup>.

同步自动机研究的基本问题是自动机的同步问题(包括自动机的同步性检测问题和同步自动机的同步字查找问题).对于自动机的同步性检测问题,Černý 和 Eppstein 先后发现了同步自动机的如下判定方法:一个自动机同步的充分必要条件是它的任意两个不同状态都同步<sup>[3,19]</sup>.Eppstein 根据该判定方法设计了一种时间复杂度和空间复杂度分别为  $O(mn^2)$  和  $O(n^2)$  的自动机同步性检测算法<sup>[19]</sup>,这里的  $m$  和  $n$  分别表示自动机的输入字母数和状态

数(后续类似的情况不再说明).

对于同步自动机的同步字查找问题,Natarajan 首先针对一类特殊的循环自动机设计了一种时间复杂度为  $O(mn^4)$  的同步字查找算法<sup>[5-6]</sup>.Eppstein 改进了 Natarajan 的算法,并针对所有自动机提出了一种同步字查找算法<sup>[19]</sup>.Eppstein 的同步字查找算法以他的上述同步性检测算法为基础.Eppstein 的同步性检测算法与他的同步字查找算法连接在一起就是一个能完整解决自动机同步问题的算法,称为 Eppstein 同步算法.该同步算法是目前最常用的自动机同步算法,其时间复杂度和空间复杂度分别为  $O(mn^2 + n^3)$  和  $O(n^2)$ .

对同步自动机的应用来说,较短的同步字通常意味着较小的开销.采用 Eppstein 同步算法找到的同步自动机的同步字一般较长,在一些情况下不能很好地满足应用需求.为计算同步自动机的较短同步字,研究者们设计了多种新的同步字查找算法<sup>[20-23]</sup>.但一般来说,算法找到的同步字的平均长度越短,则算法的复杂度越高.关于自动机同步算法的研究进展可参考文献<sup>[24]</sup>.

一个同步自动机的最短同步字的长度显然是该自动机所有同步字的长度的下确界,因此最短同步字的研究兼具重要的理论意义和巨大的应用价值,这自然激发了对最短同步字的研究兴趣.Eppstein 首先证明了最短同步字的计算是一个 NP-完全问题<sup>[19]</sup>.Olschewski 等进一步证明了最短同步字的计算是一个  $FP^{NP}$ -问题<sup>[25]</sup>.Martyugin 和 Vorel 则分别证明了同步循环自动机和同步欧拉自动机的最短同步字的计算问题是 NP-完全的<sup>[26-27]</sup>.

对于同步自动机的最短同步字的长度,Černý 于 1964 年提出了如下猜想<sup>[3]</sup>: $n$ -状态同步自动机的最短同步字的长度不超过  $(n-1)^2$ . Černý 猜想也可以表述为“所有  $n$ -状态同步自动机的最短同步字长度的上确界为  $(n-1)^2$ ”,或者“所有  $n$ -状态同步自动机都有长度不超过  $(n-1)^2$  的同步字”. Trahtman 通过穷举证实了 Černý 猜想对状态数不超过 10 且输入字母数不超过 4 的自动机以及状态数为 11 或 12 且输入字母数为 2 的自动机成立<sup>[28]</sup>. Kisielewicz 等设计了一种具有指数时间复杂度和空间复杂度的最短同步字查找算法,并用该算法计算了数十万个随机生成的状态数不超过 350 的同步自动机的最短同步字,没有发现否定 Černý 猜想的例子<sup>[29]</sup>. Pin 和 Szykuła 先后从理论上证明了任意同步自动机的最短同步字长度均不超过其状态数的立方<sup>[30-31]</sup>. Rystsov 等证明了 Černý 猜想对于可解自动机、循环自动机、欧拉自动机等若干类特殊自动机成立<sup>[32-39]</sup>. Martugin 等则讨论了一系列最短同步字长度接近或等于 Černý 界的自动机<sup>[40-45]</sup>. 尽管对 Černý 猜想的研究已取得许多进展,但该猜想仍未得到证实或证伪,且已经成为了自动机的组合理论领域存留时间最长的公开问题<sup>[46-50]</sup>.

Henckell 和 Pin 等在研究序么半群时通过对自动机的状态集赋予一个相容于所有输入字母的偏序关系引入了偏序自动机的概念<sup>[51]</sup>. 每个偏序自动机都具有相互联系的一个自动机结构和一个偏序集结构. 同步偏序自动机就是自动机结构是一个同步自动机的偏序自动机. 因为任何(同步)自动机关于其状态集上的离散序都能构成一个(同步)偏序自动机,所以同步自动机的研究从理论上可以归结为同步偏序自动机的研究,且 Černý 猜想成立的充分必要条件是它对所有的同步偏序自动机成立. 这既为同步偏序自动机的研究提供了理论背景,也为同步自动机和 Černý 猜想的研究提供了一条新途径.

Ananichev 和 Volkov 率先开展了对同步偏序自动机的研究. 他们首先证明了同步单演自动机(即具有一个相容全序结构的同步自动机)的最短同步字长度小于其状态数减 1,从而证实了 Černý 猜想对单演自动机成立<sup>[52]</sup>. 接下来,他们将同步单演自动机的上述特征完整地扩展到了同步广义单演自动机上<sup>[53]</sup>. 崔振河等则证实了同步单演自动机的上述特征也能完整地扩展到同步有界偏序自动机(即具有一个相容有界偏序结构的同步自动机)上<sup>[54]</sup>. 由

Ananichev 和 Volkov 开辟的这一研究路线的核心思想在于:首先针对一些结构较为特殊的偏序自动机证实或证伪 Černý 猜想,然后逐步推广至一般结构的偏序自动机的情形,进而寻求 Černý 猜想的彻底解决.

树形偏序自动机是具有相容树形偏序结构的自动机,从自动机的结构来看,它是比有界偏序自动机更为一般的一类偏序自动机. 然而,Černý 猜想对于树形偏序自动机是否成立目前仍然是未知的. 参考 Ananichev 和 Volkov 的研究思路,本文对树形偏序自动机的同步问题展开讨论,目的是给出树形偏序自动机的同步性检测和同步字查找方法,进而针对树形偏序自动机完全解决 Černý 猜想这一公开问题. 本文的研究意义在于:关于树形偏序自动机的研究此前主要聚焦于利用其揭示某些逻辑理论的可判定性等<sup>[55-56]</sup>,而对于树形偏序自动机的同步问题的研究基本上还是空白. 本文首次对树形偏序自动机的同步问题展开讨论,这不仅能够在一定程度上推动 Černý 猜想的研究,也能为后续的关于同步偏序自动机的研究提供借鉴.

本文总共分为 7 节:第 2 节介绍一些预备知识;第 3 节定义树形偏序自动机,讨论树形偏序自动机与单演自动机、广义单演自动机、有界偏序自动机之间的关系;第 4 节提出树形偏序自动机的同步检测方法和同步字查找方法,并证明树形偏序自动机满足 Černý 猜想;第 5 节描述树形偏序自动机的同步算法;第 6 节将树形偏序自动机的同步算法应用于单演自动机和有界偏序自动机,有力地加强了此前关于同步单演自动机和同步有界偏序自动机的结论;第 7 节简单总结全文的工作,并提出关于树形偏序自动机的几个有待进一步研究的问题.

## 2 基本概念与记号

为提高内容的完整性及避免不必要的误解,本节陈述关于自动机、同步自动机、偏序集和偏序自动机的一些基本概念和结论,并约定一些记号. 未说明的术语和记号可参阅文献<sup>[57-59]</sup>.

### 2.1 自动机

任意(完全确定有限)自动机可以形式化地定义为一个形如  $A=(Q, \Sigma, \delta)$  的三元组,其中  $Q$  为有限状态集,  $\Sigma$  为输入字母表,  $\delta$  是一个从集合  $Q \times \Sigma$  到集合  $Q$  的函数,称为状态转换函数. 集合  $Q \times \Sigma$

中的序对  $(q, a)$  在状态转移函数  $\delta$  下的像  $\delta(q, a)$  称为输入字母  $a$  在状态  $q$  上的作用, 通常记作  $qa$ . 下文只考虑状态集不为空集的自动机.

自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  的输入字母的有限序列称为  $A$  的输入字.  $A$  的所有输入字的集合记为  $\Sigma^*$ , 其中的空字用  $e$  表示.  $A$  的输入字  $w$  的长度记为  $|w|$ .  $A$  的输入字  $w, u$  的连接  $wu$  仍是  $A$  的输入字, 并且有

$$|wu| = |w| + |u|.$$

$A$  的输入字  $w$  在状态  $q$  上的作用  $qw$  归纳定义为

$$qw = \begin{cases} q & w = e, \\ (qu)a & u \in \Sigma^*, a \in \Sigma, w = ua. \end{cases}$$

$A$  的输入字  $w$  在  $Q$  的子集  $P$  上的作用定义为  $Pw = \{pw \mid p \in P\}$ . 如果等式  $pw = q$  对于  $A$  的两个状态  $p, q$  以及输入字  $w$  成立, 则称  $p$  能被转换为  $q$ , 或者称  $w$  能将  $p$  转换为  $q$ .

自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  的状态转换图是一个顶点集为  $Q$  的带标签的有向图.  $A$  的状态转换图中从顶点  $p$  到顶点  $q$  且标签为输入字母  $a$  的边表示为  $p \xrightarrow{a} q$ . 对于  $A$  的状态转换图中的道路  $p_1 \xrightarrow{a_1} p_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} q$ , 称输入字  $a_1 a_2 \dots a_k$  为该道路的标签. 下文不区分自动机与其状态转换图.

下述引理 1 给出了自动机的一个基本性质.

**引理 1**<sup>[58]</sup>.  $n$ -状态自动机  $A$  的状态  $p$  能被转换到状态  $q$  当且仅当  $A$  中存在从  $p$  到  $q$  的道路, 也当且仅当  $A$  中存在从  $p$  到  $q$  且长度不超过  $n-1$  的道路. 当  $A$  中存在从  $p$  到  $q$  的道路时, 这种道路的标签就是能将  $p$  转换到  $q$  的输入字.

### 2.2 同步自动机

给定自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$ . 如果  $A$  的状态  $p$  和  $q$  能被某输入字  $w$  转换到同一个状态, 即  $pw = qw$ , 则称  $p$  和  $q$  是同步的, 并称  $w$  为  $p$  和  $q$  的一个同步字. 如果  $A$  的状态集  $Q$  的子集  $P$  中所有状态都能被同一个输入字  $w$  转换到同一个状态, 即  $|Pw| = 1$ , 则称  $P$  是同步的, 并称  $w$  为  $P$  的一个同步字. 如果  $A$  的状态集  $Q$  是同步的, 则称  $A$  为一个同步自动机, 并称  $Q$  的同步字为  $A$  的同步字.

下面的例子来源于文献[18], 它不仅展示了同步自动机的一个实例, 还隐含了同步自动机应用的基本原理.

**例 1.** 假定要在流水线上为某个设备装配一个不规则部件  $P$ . 该部件由从左往右运行的传送带送达装配点, 在上传送带时可能朝向方向  $0, 1, 2,$

$3$  中的任意一个, 其中只有方向  $0$  才适合安装.  $P$  的形状和可能朝向的四个方向如图 1 所示.

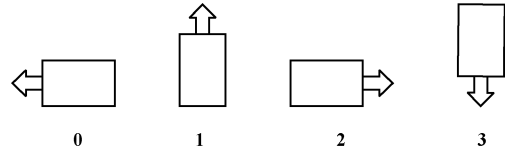


图 1 不规则部件  $P$  的形状及所有可能的方向

为了使得  $P$  在到达装配点时能定位为方向  $0$ , 可以在传送带右端设置  $H$  和  $L$  两种障碍物各若干, 它们按照如下方案调整  $P$  的方向: 当传送带右端触碰到障碍物  $H$  时, 将  $P$  顺时针旋转  $90^\circ$ ; 当传送带右端触碰到障碍物  $L$  时, 如果  $P$  处于方向  $3$ , 则将其顺时针旋转  $90^\circ$ , 否则保持其原方向不变. 这种定位方案可以描述为图 2 中的自动机. 该自动机是一个同步自动机, 其最短同步字  $LHHHLHHHL$  能将任意状态都转换到状态  $0$ . 因此, 只需按  $LHHHLHHHL$  的顺序在传送带右端设置九个障碍物即可解决  $P$  的定位问题.

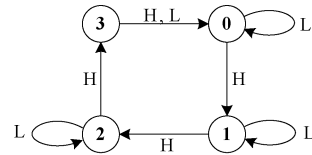


图 2 不规则部件  $P$  的定位方案

### 2.3 偏序关系

集合上的相等关系和泛关系分别记为  $\triangle$  和  $\nabla$ . 集合上自反的、反对称的、传递的二元关系称为偏序关系或偏序, 一般用符号  $\leq$  来表示. 偏序关系中的序对  $(x, z)$  通常表示为  $x \leq z$ , 特别地,  $x < z$  表示  $x \leq z$  且  $x \neq z$ . 若在集合上给定一个偏序关系  $\leq$ , 则称该集合按照偏序关系  $\leq$  构成一个偏序集合. 集合上的相等关系在看作偏序关系时通常称为离散序.

给定集合  $P$  上的偏序关系  $\leq$ , 对于  $P$  的元素  $x$  和  $z$ , 如果  $x < z$  且  $P$  的任何元素  $y$  都不满足条件  $x < y < z$ , 则称  $z$  是  $x$  的一个覆盖, 记为  $x < z$ . 由此可以诱导出偏序关系  $\leq$  的覆盖关系

$$\leq^c = \{(x, z) \mid x < z\},$$

当  $P$  是有限集时, 偏序关系  $\leq$  的覆盖关系  $\leq^c$  对应的有向图就是偏序关系  $\leq$  的哈斯图. 偏序关系  $\leq$  的反关系也是  $P$  上的二元关系  $\leq^{-1} = \{(x, z) \mid z \leq x\}$ , 它仍是  $P$  上的一个偏序关系, 通常称为  $\leq$  的对偶偏序. 偏序关系  $\leq$  的对称闭包是  $P$  上的二元关系  $\leq^R = \{(x, z) \mid x \leq z\} \cup \{(x, z) \mid z \leq x\}$ , 它



是一个对称关系,称为偏序关系  $\leq$  的可比关系. 对于  $P$  的元素  $x$  和  $z$ , 当  $(x, z)$  是  $\leq^R$  中的序对时, 称  $x$  与  $z$  关于偏序关系  $\leq$  是可比的; 否则, 称  $x$  与  $z$  关于偏序关系  $\leq$  是不可比的.

对于集合  $P$  上的偏序关系  $\leq$ , 如果  $P$  中任意两个不同元素关于  $\leq$  都是可比的, 则称  $\leq$  为  $P$  上的一个全序. 如果存在  $P$  的元素  $x$  满足条件  $(\forall z \in P) x \leq z$ , 则称  $\leq$  为  $P$  上的一个树形偏序, 并称  $x$  为  $P$  关于偏序关系  $\leq$  的最小元. 如果存在  $P$  中的元素  $y$  满足条件  $(\forall z \in P) z \leq y$ , 则称  $\leq$  为  $P$  上的一个对偶树形偏序, 并称  $y$  为  $P$  关于偏序关系  $\leq$  的最大元. 如果  $\leq$  既是  $P$  上的一个树形偏序, 也是  $P$  上的一个对偶树形偏序, 则称  $\leq$  为  $P$  上的一个有界偏序.

对于集合  $P$  上的偏序关系  $\leq$  和  $P$  的子集  $X$ , 如果  $X$  的元素  $x$  满足条件  $(\forall z \in X) [(z \leq x) \Rightarrow (z = x)]$ , 则称  $x$  为  $X$  关于  $\leq$  的一个极小元. 如果  $X$  的元素  $y$  满足条件  $(\forall z \in X) [(y \leq z) \Rightarrow (y = z)]$ , 则称  $y$  为  $X$  关于  $\leq$  的一个极大元.

**引理 2**<sup>[56]</sup>. 集合  $P$  关于其上的任意偏序关系最多有一个最小元, 也最多有一个最大元.  $P$  的非空有限子集关于  $P$  上任意偏序关系总有极小元和极大元.

### 2.4 偏序自动机

自动机的状态集上的偏序关系也称为自动机的偏序结构. 对应于集合上的偏序关系可以定义自动机的偏序结构. 下文不区分自动机的偏序结构与它们的哈斯图.

如果自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  的偏序结构  $\leq$  相容于所有输入字母, 即  $(\forall p, q \in Q) (\forall a \in \Sigma) [(p \leq q) \Rightarrow (pa \leq qa)]$ , 则称  $\leq$  为  $A$  的一个相容偏序结构, 此时,  $A$  的状态集关于偏序结构  $\leq$  的最小元也称为  $A$  关于  $\leq$  的最小状态(或简称为  $A$  的最小状态). 状态集的子集  $T$  关于  $\leq$  的极小元也称为  $T$  中关于  $\leq$  的极小状态(或简称为  $T$  中的极小状态). 其它类似概念不再定义.

**引理 3**<sup>[51]</sup>. 自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  的偏序结构  $\leq$  是相容的当且仅当其相容于所有输入字, 即  $(\forall p, q \in Q) (\forall w \in \Sigma^*) [(p \leq q) \Rightarrow (pw \leq qw)]$ , 当且仅当其覆盖关系  $<$  相容于所有输入字母, 即  $(\forall p, q \in Q) (\forall a \in \Sigma) [(p < q) \Rightarrow (pa \leq qa)]$ .

上述引理中的第一个充要条件事实上是相容偏序结构定义的一个推广, 即将定义中的输入字母的情形推广至输入字的情形; 第二个充要条件则是覆

盖关系在偏序结构中的一个简单应用.

**引理 4.** 假定  $p$  和  $q$  是自动机  $A$  的两个不同状态且存在  $A$  的输入字母  $x$  使得  $px = q, qx = p$ , 则  $p$  和  $q$  关于  $A$  的任意相容偏序结构都不可比.

证明. 对于  $A$  的任意相容偏序结构  $\leq$ , 当  $p \leq q$  时有  $q = px \leq qx = p$ ; 类似地, 当  $q \leq p$  时也有  $p \leq q$ . 因此  $p$  和  $q$  是可比的将导出与假设相矛盾的等式  $p = q$ .

证毕.

偏序自动机的一般定义是转移关系能够诱导出状态集上的一个偏序关系的自动机. 换言之, 如果一个自动机的状态转换图中唯一的环是自环, 则该自动机就是一个偏序自动机. 偏序自动机也被称为极弱自动机, 线性自动机或无环自动机. 对于偏序自动机的表达能力、复杂性以及应用方面的讨论可参考文献[55-56].

本文所考虑的偏序自动机指的是具有相容偏序结构的有限状态自动机. 这一定义实质上是上述定义的一般化. 在此定义下, 偏序自动机的状态转换图可以包含除自环以外的其他环. 然而, 相对于一般的自动机, 本文所考虑的偏序自动机的状态转换图又具有其特殊性. 例如, 在给定的自动机  $A$  的状态转换图中, 如果  $A$  的两个可比的态  $p$  和  $q$  出现在同一个环中, 且存在两个非空字  $w$  和  $w'$ , 使得  $pw = q$  和  $qw' = p$  成立, 则根据引理 3 可知  $w \neq w'$ . 关于偏序自动机的结构特点、性质以及表达能力等方面的问题还有待进一步研究. 本文的研究只针对偏序自动机的同步性.

由于任意自动机的离散序结构显然都是相容的, 因此任意自动机关于其状态集上的离散序都能构成一个偏序自动机, 从而任意同步自动机都是一个同步偏序自动机. 尽管如此, 自动机的离散序结构对接下来的研究不仅毫无价值可言, 还会带来一些理论上必要但实际上毫无意义的讨论. 有鉴于此, 特做如下约定: 下文中所考虑的自动机的偏序结构都不是离散序结构, 故所有自动机都至少有两个状态.

### 3 几类特殊的偏序自动机

本节首先介绍包括树形偏序自动机在内的几类特殊的偏序自动机, 然后讨论它们之间的区别与联系, 进而说明研究树形偏序自动机的同步问题的必要性.

具有相容树形偏序结构的自动机称为树形偏序自动机. 具有相容全序结构的自动机称为单演自动机<sup>[52]</sup>. 具有相容有界偏序结构的自动机称为有界偏序自动机<sup>[54]</sup>.  $\sigma$ -单演自动机和广义单演自动机是另外两类具有特殊相容偏序结构的自动机<sup>[53]</sup>, 它们的定义相对复杂, 下文再单独叙述.

下面的例 2 和例 3 分别给出了同步树形偏序自动机和同步有界偏序自动机的实例.

**例 2.** 分别定义自动机 **C** 及其树形偏序结构  $\leq_c$  如图 3 和图 4 所示.

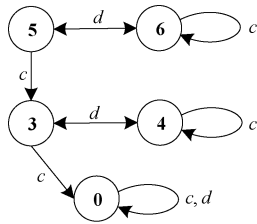


图 3 自动机 **C** 的状态转换图

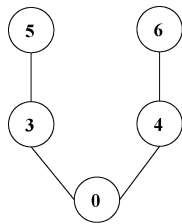


图 4 自动机 **C** 的树形偏序结构  $\leq_c$

对 **C** 的任意状态  $q$  和任意输入字母  $x$  都有

$$0x = 0 \leq_c qx,$$

$$3c = 0 \leq_c 3 = 5c, 3d = 4 \leq_c 6 = 5d,$$

$$4c = 4 \leq_c 6 = 6c, 4d = 3 \leq_c 5 = 6d.$$

下面利用穷举的方法来计算 **C** 的最短同步字, 具体步骤如下: **C** 的长度为 1 的输入字共有 2 个, 即  $c$  和  $d$ , 显然不能使得 **C** 同步; **C** 的长度为 2 的输入字共有 4 个, 即  $cc, cd, dc$  以及  $dd$ , 这四个输入字均不能使得 **C** 同步, 例如, **C** 的状态集在输入字  $cd$  的作用下被转换为集合  $\{5, 4, 3, 0\}$ ; 以此类推, 容易得到  $ccdcc$  是 **C** 唯一的最短同步字, 因此 **C** 是一个同步树形偏序自动机.

**例 3.** 分别定义自动机 **D** 及其有界偏序结构  $\leq_d$  如图 5 和图 6 所示.

与上述例 2 中通过穷举法计算最短同步字的方法类似, 可以得到输入字  $a$  是 **D** 的唯一最短同步字, 且对 **D** 的任意状态  $q$  和任意输入字母  $x$  都有

$$0x = 0 \leq_d qx,$$

$$1a = 0 \leq_d 1 = 3a, 1b = 2 \leq_d 3 = 3b,$$

$$2a = 0 \leq_d 1 = 3a, 2b = 1 \leq_d 3 = 3b.$$

因此, **D** 是一个同步有界偏序自动机.

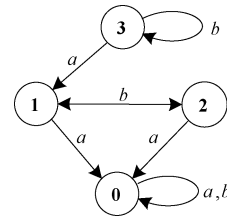


图 5 自动机 **D** 的状态转换图

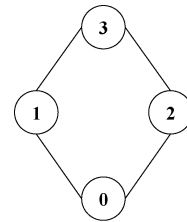


图 6 自动机 **D** 的有界偏序结构  $\leq_d$

引理 5 说明了单演自动机、有界偏序自动机和树形偏序自动机之间的基本关系.

**引理 5.** 单演自动机都是有界偏序自动机, 有界偏序自动机都是树形偏序自动机. 同步有界偏序自动机 **D** 不属于单演自动机, 同步树形偏序自动机 **C** 不属于有界偏序自动机.

证明. 因为自动机的全序结构都是有界偏序结构, 而有界偏序结构又都是树形偏序结构, 所以单演自动机都是有界偏序自动机, 且有界偏序自动机都是树形偏序自动机. 对于自动机 **D** 的任意相容偏序结构  $\leq$ , 由引理 4 可以知道 **D** 的状态 1 和 2 是不可比的, 从而  $\leq$  不是全序结构, 因此 **D** 不属于单演自动机. 对于自动机 **C** 的任意相容偏序结构  $\leq$ , 仍由引理 4 可以知道自动机 **C** 的状态 5 和 6 是不可比的, 且状态 3 和 4 也是不可比的, 从而 **C** 不可能同时有最大状态和最小状态, 因此  $\leq$  不是有界偏序结构. 这说明 **C** 不属于有界偏序自动机.

证毕.

下面介绍  $\sigma$ -单演自动机的定义并举例说明.

给定自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$ , 对于 **A** 的状态集  $Q$  上的等价关系  $\sigma$ , 记包含状态  $q$  的  $\sigma$ -一类为  $[q]_\sigma$  或  $[q]$ , 所有  $\sigma$ -一类组成的集合为  $Q/\sigma$ , 则  $Q/\sigma = \{[q] \mid q \in Q\}$ .

如果对 **A** 的任意状态  $p, q$  和任意输入字母  $a$  都有  $([p] = [q]) \Rightarrow ([pa] = [qa])$ , 则称  $\sigma$  为 **A** 的一个同余. **A** 的状态集上的相等关系  $\Delta$  和泛关系  $\nabla$  显然都是同余关系, 其中前者通常称为 **A** 的恒等同余. **A** 的不同于  $\Delta$  的同余都称为 **A** 的非恒等同余. 如果自动机 **A** 的某个相容偏序结构的可比关系是 **A**

的一个同余, 则称  $\mathbf{A}$  为一个  $\sigma$ -单演自动机<sup>[53]</sup>.

例 4. 分别定义自动机  $\mathbf{E}$  及其偏序结构  $\leq_e$ . 如图 7 和图 8 所示.

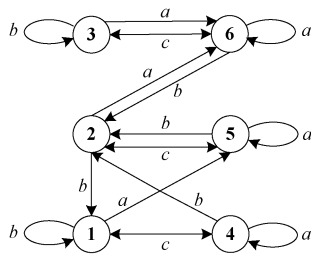


图 7 自动机  $\mathbf{E}$  的状态转换图

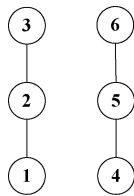


图 8 自动机  $\mathbf{E}$  的偏序结构  $\leq_e$

由引理 3 和下列不等式可以断定  $\leq_e$  是  $\mathbf{E}$  的一个相容偏序结构:

$$\begin{aligned} 1a &= 5 \leq_e 6 = 2a = 6 \leq_e 6 = 3a, \\ 1b &= 1 \leq_e 1 = 2b = 1 \leq_e 3 = 3b, \\ 1c &= 4 \leq_e 5 = 2c = 5 \leq_e 6 = 3c, \\ 4a &= 4 \leq_e 5 = 5a = 5 \leq_e 6 = 6a, \\ 4b &= 2 \leq_e 2 = 5b = 2 \leq_e 2 = 6b, \\ 4c &= 1 \leq_e 2 = 5c = 2 \leq_e 3 = 6c. \end{aligned}$$

显然, 偏序结构  $\leq_e$  的可比关系  $\leq_e^r$  是  $\mathbf{E}$  的状态集上的一个不同于相等关系的等价关系, 且

$$\begin{aligned} [1] &= [2] = [3] = \{1, 2, 3\}, \\ [4] &= [5] = [6] = \{4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

由下列等式可以断定  $\leq_e^r$  是  $\mathbf{E}$  的一个同余:

$$\begin{aligned} [1a] &= [2a] = [3a] = [4], [1b] = [2b] = [3b] = [1], \\ [1c] &= [2c] = [3c] = [4], [4a] = [5a] = [6a] = [4], \\ [4b] &= [5b] = [6b] = [1], [4c] = [5c] = [6c] = [1]. \end{aligned}$$

进一步地, 容易验证  $ab$  是  $\mathbf{E}$  的一个同步字. 因此,  $\mathbf{E}$  是一个同步  $\sigma$ -单演自动机.

引理 6 说明了有界偏序自动机和  $\sigma$ -单演自动机是互不包含的两类偏序自动机, 进而说明了并非所有自动机都是  $\sigma$ -单演的.

引理 6. 同步  $\sigma$ -单演自动机  $\mathbf{E}$  不属于树形偏序自动机, 同步有界偏序自动机  $\mathbf{D}$  不属于  $\sigma$ -单演自动机.

证明. 由引理 4 可以知道: 关于自动机  $\mathbf{E}$  的任意相容偏序结构,  $\mathbf{E}$  的状态 1 和 4 是不可比的, 2 和

5 是不可比的, 3 和 6 也是不可比的, 从而  $\mathbf{E}$  不可能有最小状态, 故  $\mathbf{E}$  不属于树形偏序自动机.

如果自动机  $\mathbf{D}$  是一个  $\sigma$ -单演自动机, 则  $\mathbf{D}$  的某相容偏序结构  $\leq$  的可比关系  $\leq^r$  是一个同余. 由引理 4 可以知道  $\mathbf{D}$  的状态 1 和 2 是不可比的, 即

$$[1] \neq [2] \tag{1}$$

如果  $[0] = [2]$ , 则由  $\leq^r$  是  $\mathbf{D}$  的一个同余以及等式  $0b = 0, 2b = 1$  可以得到与 (1) 相矛盾的等式

$$[1] = [2b] = [0b] = [0] = [2].$$

因此

$$[0] \neq [2] \tag{2}$$

类似于 (2) 也有

$$[0] \neq [1] \tag{3}$$

如果  $[0] = [3]$ , 则由  $\leq^r$  是  $\mathbf{D}$  的一个同余以及等式  $3a = 1, 0a = 0$  可以得到与 (3) 相矛盾的等式

$$[1] = [3a] = [0a] = [0].$$

因此

$$[0] \neq [3] \tag{4}$$

如果  $[1] = [3]$ , 则由  $\leq^r$  是  $\mathbf{D}$  的一个同余以及等式  $3b = 3, 1b = 2$  可以得到与 (1) 相矛盾的等式

$$[1] = [3] = [3b] = [1b] = [2].$$

因此

$$[1] \neq [3] \tag{5}$$

如果  $[2] = [3]$ , 则由  $\leq^r$  是  $\mathbf{D}$  的一个同余以及等式  $3b = 3, 2b = 1$  可以得到与 (1) 相矛盾的等式

$$[1] = [2b] = [3b] = [3] = [2].$$

因此

$$[2] \neq [3] \tag{6}$$

综合不等式 (1)~(6) 可知  $\leq$  是  $\mathbf{D}$  的离散序结构, 这违反了此前对所考虑的偏序结构都不是离散序结构的约定, 因而  $\mathbf{D}$  不属于  $\sigma$ -单演自动机.

证毕.

下面介绍广义单演自动机的定义并对其进行举例说明.

给定自动机  $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta)$ , 如果  $\sigma$  是  $\mathbf{A}$  的一个同余, 则可以定义函数  $\delta_\sigma: (Q/\sigma) \times \Sigma \rightarrow Q/\sigma$ ,  $([q]_\sigma, a)[qa]_\sigma$ , 进而以  $\delta_\sigma$  作为状态转移函数定义自动机  $\mathbf{A}/\sigma = (Q/\sigma, \Sigma, \delta_\sigma)$ , 此时称自动机  $\mathbf{A}/\sigma$  称为  $\mathbf{A}$  模  $\sigma$  的商自动机. 如果  $\sigma, \tau$  都是  $\mathbf{A}$  的同余且  $\sigma \subseteq \tau$ , 则可以定义  $\mathbf{A}$  模  $\sigma$  的商自动机  $\mathbf{A}/\sigma$  的同余  $\tau/\sigma$  如下:  $\tau/\sigma = \{([p]_\sigma, [q]_\sigma) \mid (p, q) \in \tau\}$ . 如果存在自动机  $\mathbf{A}$  的一系列严格单调递增的同余  $\Delta = \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_l = \nabla$ , 使得自动机  $\mathbf{A}/\sigma_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 存在相容偏序结构  $\leq_{i-1}$  满足条件  $\leq_{i-1}^r =$

$\sigma_i/\sigma_{i-1}$ , 则称  $\mathbf{A}$  为一个  $l$ -级广义单演自动机<sup>[47]</sup>.

例 5. 分别定义自动机  $\mathbf{F}$  及其偏序结构  $\leq_f$  如图 9 和图 10 所示.

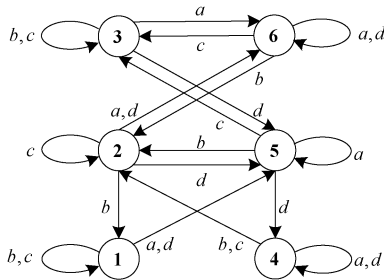


图 9 自动机  $\mathbf{F}$  的状态转换图

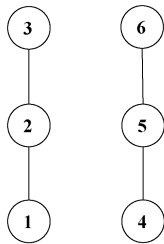


图 10 自动机  $\mathbf{F}$  的偏序结构  $\leq_f$

进一步还可以验证  $\mathbf{F}$  模  $\leq_f^r$  的商自动机  $\mathbf{F}/\leq_f^r$  (状态转换图见图 11) 关于图 12 所示的全序结构形成一个单演自动机, 因此,  $\mathbf{F}$  是一个同步 2-级广义单演自动机.

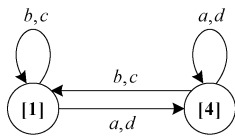


图 11 商自动机  $\mathbf{F}/\leq_f^r$  的状态转换图



图 12 商自动机  $\mathbf{F}/\leq_f^r$  的一个全序结构

引理 7 说明了广义单演自动机与单演自动机,  $\sigma$ -单演自动机和树形偏序自动机三者之间的关系.

引理 7. 单演自动机都是广义单演自动机, 广义单演自动机都是  $\sigma$ -单演自动机. 同步广义单演自动机  $\mathbf{F}$  不属于树形偏序自动机. 同步  $\sigma$ -单演自动机  $\mathbf{E}$  不属于广义单演自动机.

证明. 显然, 单演自动机都是广义单演自动机, 且广义单演自动机都是  $\sigma$ -单演自动机. 关于同步广

义单演自动机  $\mathbf{F}$  的任意相容偏序结构  $\leq$ ,  $\mathbf{F}$  的状态 1 不可能是最小状态, 否则,

$$[1 \leq 4] \Rightarrow [5 = 1d \leq 4d = 4] \Rightarrow [3 = 5c \leq 4c = 2] \Rightarrow [3 = 3b \leq 2b = 1];$$

$\mathbf{F}$  的状态 2 也不可能是最小状态, 否则,

$$[2 \leq 5] \Rightarrow [5 = 2d \leq 5d = 4] \Rightarrow [3 = 5c \leq 4c = 2];$$

$\mathbf{F}$  的状态 3 仍不可能是最小状态, 否则,

$$[3 \leq 6] \Rightarrow [5 = 3d \leq 6d = 6], \\ [3 \leq 1] \Rightarrow [6 = 3a \leq 1a = 5].$$

类似地可以说明  $\mathbf{F}$  的状态 4, 5, 6 都不可能是最小状态. 因此,  $\mathbf{F}$  的任意相容偏序结构都不是树形偏序结构, 从而  $\mathbf{F}$  不属于树形偏序自动机.

如果同步  $\sigma$ -单演自动机  $\mathbf{E}$  是一个广义单演自动机, 则存在自动机  $\mathbf{E}$  的一列严格单调递增的同余关系

$$\Delta = \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_l = \nabla,$$

使得自动机  $\mathbf{E}/\sigma_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) 存在相容偏序结构  $\leq_{i-1}$  满足条件

$$\leq_{i-1}^r = \sigma_i / \sigma_{i-1}.$$

因为  $\sigma_i$  是  $\mathbf{E}$  的状态集上的泛关系, 所以有

$$[1]_{\sigma_i} = [4]_{\sigma_i},$$

从而一定存在最小的正整数  $k$  满足以下条件:

$$[1]_{\sigma_{k-1}} \neq [4]_{\sigma_{k-1}}, [1]_{\sigma_k} = [4]_{\sigma_k}.$$

由于在自动机  $\mathbf{E}/\sigma_{k-1}$  中有

$$[1]_{\sigma_{k-1}} c = [1c]_{\sigma_{k-1}} = [4]_{\sigma_{k-1}}, [4]_{\sigma_{k-1}} c = [4c]_{\sigma_{k-1}} = [1]_{\sigma_{k-1}},$$

则根据引理 4 可以断定  $[1]_{\sigma_{k-1}}$  和  $[4]_{\sigma_{k-1}}$  关于  $\mathbf{E}/\sigma_{k-1}$  的相容偏序结构  $\leq_{k-1}$  是不可比的, 从而由等式

$$\leq_{k-1}^r = \sigma_k / \sigma_{k-1}$$

导出与上述等式  $[1]_{\sigma_k} = [4]_{\sigma_k}$  相矛盾的不等式

$$[1]_{\sigma_k} \neq [4]_{\sigma_k}.$$

因此,  $\mathbf{E}$  不属于广义单演自动机.

证毕.

由引理 5~7 可以得到以下的推论 8 成立:

推论 8. 同步有界偏序自动机  $\mathbf{D}$  不属于广义单演自动机. 同步广义单演自动机  $\mathbf{F}$  不属于有界偏序自动机, 更不属于单演自动机.

证明. 引理 6 说明了同步有界偏序自动机  $\mathbf{D}$  不属于  $\sigma$ -单演自动机, 引理 7 则说明了不存在不属于  $\sigma$ -单演自动机的广义单演自动机, 因此  $\mathbf{D}$  不属于广义单演自动机. 类似地, 根据引理 7 和引理 5 可以断定同步广义单演自动机  $\mathbf{F}$  不属于有界偏序自动机, 因而更不属于单演自动机.



证毕.

综合引理 5~7 以及推论 8 可以得到如下结论:

**定理 9.** 作为(同步)偏序自动机类,(同步)单演自动机、(同步)广义单演自动机、(同步) $\sigma$ -单演自动机、(同步)有界偏序自动机、(同步)树形偏序自动机和(同步)偏序自动机关于包含关系形成一个图 13 所示的偏序集.

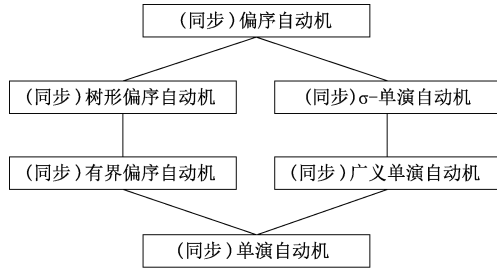


图 13 几类(同步)偏序自动机之间的关系

综上所述,一方面,对于现有的偏序自动机而言,树形偏序自动机是比有界偏序自动机更为广泛的一类自动机,并且是与广义单演自动机和 $\sigma$ -单演自动机不同的一类自动机;另一方面, $\check{C}$ erný 猜想成立的充分必要条件是它对所有的同步偏序自动机成立,而目前 $\check{C}$ erný 猜想对于树形偏序自动机是否成立仍然是未知的.因此,研究树形偏序自动机的同步问题将有利于推动 $\check{C}$ erný 猜想的解决.

### 4 树形偏序自动机的同步问题

为了解决树形偏序自动机的同步问题,就有必要对该类自动机的同步过程进行讨论.对于任给  $n$ -状态树形偏序自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$ ,现在令  $\leq$  是  $A$  的一个相容树形偏序结构,并记  $A$  的最小状态为  $0$ .  $A$  的同步过程可以分为三种情形,下面进行具体分析:

第一种情形是:存在一个输入字  $w$  能够将最小状态  $0$  转换到  $Q$  的某个极大状态.此时根据引理 3 可知,  $w$  一定是  $A$  的一个同步字.进一步地,在最坏情况下,  $0$  在  $w$  的作用下的像能够遍历  $Q$  中除其自身以外的所有的状态,故输入字  $w$  的长度为  $n-1$ , $\check{C}$ erný 猜想成立.

第二种情形是:对于所有的输入字  $w$ ,最小状态  $0$  在  $w$  的作用下仍然为  $0$ .此时则需要将  $Q$  中的每一个极大状态都分别转换到  $0$ ,然后将所有对应的字都顺序连接起来就构成了  $A$  的一个同步字.进一步地,在最坏情况下,每个将极大状态转换到  $0$  的字的长度为  $n-1$ ,故  $A$  的同步字的长度为  $(n-1)^2$ ,

$\check{C}$ erný 猜想也成立.

第三种情况是最为复杂的一类情况,它既不同于第一种情况,也不同于第二种情况.换言之,对于所有的输入字  $w$ ,最小状态  $0$  在  $w$  的作用下都不会被转换到  $Q$  的某个极大状态,且并非所有的  $Q$  中的极大状态都能够被转换到最小状态  $0$ .在这种情况下,  $A$  的同步过程如下:首先找到  $Q$  的一个子集  $T$ ,使得对任意的输入字  $w, 0$  在  $w$  的作用下的像都能够包含在  $T$  中,容易说明  $T$  是  $Q$  的一个同步子集;接着,对于  $Q-T$  中的每一个状态  $p$ ,分别寻找一个输入字  $w_p$ ,使得  $w_p$  能够将  $p$  的转换到  $T$  中;然后,顺次连接  $w_p$  以及  $T$  的一个同步字就构成了  $A$  的一个同步字;最后对该同步字的长度进行讨论.

下面分别对上述第三种情况的同步过程进行具体分析,其中,引理 10~12 描述了集合  $T$  的一些性质;引理 13 给出了集合  $Q-T$  与自动机的同步性之间的联系;引理 14 对自动机的同步字的长度进行了讨论;定理 15 给出了本节的主要结论;推论 16 则说明了 $\check{C}$ erný 猜想对于树形偏序自动机是成立的.

给定自动机  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  是一个  $n$ -状态树形偏序自动机,  $\leq$  是  $A$  的一个相容树形偏序结构,考虑集合  $S = \{s \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*) s = 0w\}$ ,并令  $T = \{t \in Q \mid (\exists s \in S) t \leq s\}$ ,则显然有

$$S \subseteq T = \{t \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*) t \leq 0w\} \quad (7)$$

下面的引理 10~12 给出了  $Q$  的子集  $T$  的若干有用的性质.

**引理 10.** 集合  $S$  和  $T$  是  $Q$  的非空子集,且  $A$  的输入字在  $T$  上的作用是封闭的,即

$$(\forall w \in \Sigma^*) \quad Tw \subseteq T \quad (8)$$

证明.由  $0 = 0e$  可得  $0 \in S$ ,因此  $S$  是  $Q$  的一个非空子集,进而由公式(7)可以知道  $T$  也是  $Q$  的一个非空子集.对任意的  $t \in T$ ,仍由公式(7)可以知道存在输入字  $w$  使得  $t \leq 0w$ ,从而根据引理 3 可以断定对任意输入字  $u$  都有  $tu \leq (0w)u = 0(wu)$ ,进而得到  $tu \in T$ .这就证明了  $A$  的输入字在  $T$  上的作用是封闭的.

证毕.

**引理 11.** 集合  $T$  中有极大状态,且最小状态  $0$  能被转换到  $T$  中任意极大状态.

证明.由引理 10 可以知道  $T$  是  $Q$  的一个非空子集  $T$ ,因而根据引理 2 可以断定  $T$  中有极大状态.对  $T$  中任意极大状态  $d$ ,由公式(7)可以知道存在输入字  $w$  使得  $d \leq 0w$ .注意到  $0w$  仍是  $T$  中的状态,这说明  $d = 0w$ .

证毕.

**引理 12.** 集合  $T$  是  $Q$  的一个同步子集,且任意能够将最小状态  $\mathbf{0}$  转换为  $T$  中一个极大状态的输入字都是  $T$  的同步字.

证明. 引理 11 说明了一定存在  $A$  的输入字能够将最小状态  $\mathbf{0}$  转换为  $T$  中一个极大状态. 任取能够将最小状态  $\mathbf{0}$  转换为  $T$  中一个极大状态的输入字  $w$ , 则  $\mathbf{0}w$  是  $T$  中的一个极大状态. 对  $T$  中任意状态  $t$ , 由  $\mathbf{0} \leq t$  和引理 3 可得  $\mathbf{0}w \leq tw$ . 公式(8)说明了  $tw \in T$ , 从而  $\mathbf{0}w = tw$ . 这就证明了  $Tw = \mathbf{0}w$ , 故  $w$  是  $T$  的一个同步字.

证毕.

引理 13 利用  $T$  的性质给出了  $A$  的一种同步性检测及同步字查找方法.

**引理 13.**  $A$  是一个同步自动机的充分必要条件是  $Q - T$  中任意状态都能被转换到  $T$  中.

证明. 命题在  $Q = T$  的情形下显然成立. 下面考虑  $Q \neq T$  的情形. 如果  $A$  是一个同步自动机, 则对  $A$  的任意同步字  $u$  总存在相应状态  $p$  满足条件  $Qu = \{p\}$ , 从而  $(Q - T)u = \{p\} = Tu$ .

由公式(8)可以知道  $p \in T$ , 因此  $A$  的任意同步字  $u$  都能将  $Q - T$  中所有状态转换到  $T$  中.

反过来, 假定  $Q - T$  中任意状态都能被转换到  $T$  中, 先置  $Q_0 = Q - T$ , 再定义  $Q$  的子集序列  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ ,  $A$  的状态序列  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , 及  $A$  的输入字序列  $u_1, u_2, u_3, \dots$  如下: 对任意正整数  $i, q_i$  是  $Q_{i-1}$  中的一个状态,  $u_i$  是一个能将  $q_i$  转换到  $T$  中的输入字, 且  $Q_i = Q_{i-1}u_i - T$ , 则显然有

$$Q_i \subseteq Q - T \tag{9}$$

$$|Q_{i-1}| > |Q_i| \tag{10}$$

$$Q_{i-1}u_i \subseteq Q_i \cup T \tag{11}$$

由公式(9)和(10)可以断定一定存在不超过  $|Q - T|$  的正整数  $l$  使得  $Q_{l-1} \neq \emptyset = Q_l$ .

现在令  $u = u_1u_2 \dots u_l$ , 根据公式(11)和(8)可以得到

$$\begin{aligned}
Q_0u &= Q_0u_1u_2u_3 \dots u_l \\
&\subseteq (Q_1 \cup T)u_2u_3 \dots u_l \\
&\subseteq [Q_1u_2u_3 \dots u_l] \cup T \\
&\subseteq [(Q_2 \cup T)u_3 \dots u_l] \cup T \\
&\subseteq [Q_2u_3 \dots u_l] \cup T \\
&\dots \dots \dots \\
&\subseteq [Q_{l-1}u_l] \cup T \\
&= T.
\end{aligned}$$

由上述公式(11)和公式(8)还可以进一步得到

$$Qu = (Q_0 \cup T)u = (Q_0u) \cup (Tu) \subseteq T.$$

因此,对  $T$  的任意同步字  $w$  都有

$$|Quw| = |(Qu)w| \leq |Tw| = 1,$$

即  $uw$  是  $A$  的一个同步字.

证毕.

引理 14 说明了同步树形偏序自动机的最短同步字的长度不超过  $(n - 1)^2$ .

**引理 14.** 如果  $A$  是同步的, 则它一定有长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字.

证明. 假定  $A$  是同步的, 分别用  $t$  和  $s$  表示  $T$  和  $Q - T$  中的状态数, 则显然有

$$n = t + s \tag{12}$$

下面考察引理 13 的证明中构造的  $A$  的同步字

$$uw = u_1u_2 \dots u_lw \tag{13}$$

首先, 在引理 13 的证明中已经说明了

$$l \leq |Q - T| = s \tag{14}$$

其次, 由引理 12 可以知道  $T$  中全体极大状态的集合  $\max(T)$  是非空的, 且在  $A$  中一定存在从最小状态  $\mathbf{0}$  到  $\max(T)$  的道路. 令  $\pi$  为从  $\mathbf{0}$  到  $\max(T)$  的一条最短道路. 由  $\mathbf{0} \in T$  以及公式(8)可以断定  $\pi$  经过的所有状态都在  $T$  中, 因此  $\pi$  的长度不超过  $t - 1$ . 由引理 12 可以知道  $\pi$  的标签是  $T$  的一个同步字. 取公式(13)中  $T$  的同步字  $w$  为  $\pi$  的标签, 则

$$|w| \leq t - 1 \tag{15}$$

最后, 由引理 13 可以知道  $Q - T$  中任意状态都可以被转换到  $T$  中. 这说明, 对于  $Q - T$  中的任意状态  $q$ , 在  $A$  中一定存在从  $q$  到  $T$  的道路. 显然,  $A$  中从  $q$  到  $T$  的最短道路的长度不超过  $s$ , 从而  $Q - T$  中任意状态都可以被一个长度不超过  $s$  的输入字转换到  $T$  中. 据此, 可以选择输入字  $u_i$  使得

$$|u_i| \leq s \quad (i = 1, 2, \dots, l) \tag{16}$$

利用等式(12)以及不等式(14)~(16)可以得到

$$\begin{aligned}
|uw| &= |u| + |w| \\
&\leq s^2 + (t - 1) \\
&= [s + (t - 1)]^2 - 2s(t - 1) - (t - 1)^2 + (t - 1) \\
&= (n - 1)^2 - [2s + (t - 1) - 1](t - 1) \\
&= (n - 1)^2 - (n + s - 2)(t - 1) \\
&\leq (n - 1)^2.
\end{aligned}$$

因此,  $A$  有长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字.

证毕.

综合引理 10~14 可以得到以下结论.

**定理 15.** 假定  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  为一个  $n$  - 状态树形偏序自动机,  $\leq$  为  $A$  的一个相容树形偏序结构. 记  $A$  的最小状态为  $\mathbf{0}$ , 定义  $S = \{s \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*)s = \mathbf{0}w\}$ , 并令  $T = \{t \in Q \mid (\exists s \in S)t \leq s\}$ .

则  $T$  是  $Q$  的一个非空同步子集,且任意能将最小状态  $\mathbf{0}$  转换为  $T$  中一个极大状态的输入字都是  $T$  的同步字.  $\mathbf{A}$  是一个同步树形偏序自动机的充分必要条件是  $Q - T$  中所有状态都能被转换到  $T$  中.  $\mathbf{A}$  在同步的情形下,它有长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字.

结合上述定理以及 Černý 猜想的内容,可得以下的定理 16.

**定理 16.** Černý 猜想对所有同步树形偏序自动机都成立.

## 5 树形偏序自动机的同步算法

本节介绍关于树形偏序自动机的同步问题的两种同步算法:第一种是通用的自动机 Eppstein 同步算法;第二种则是根据定理 15 设计的树形偏序自动机的专用同步算法.由这两种算法的复杂度之间的差异可以说明自动机的相容偏序结构对自动机的同步问题的解决是有益的.

### 5.1 自动机的 Eppstein 同步算法

自动机的 Eppstein 同步算法包括 Eppstein 同步性检测算法和 Eppstein 同步字查找算法.这两个算法均以对自动机的概念为基础.

给定自动机  $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta)$ ,令  $Q' = Q'' \cup \{\infty\}$  (其中  $Q''$  为  $Q$  的所有二元子集的集合,  $\infty$  是一个不属于  $Q$  的符号),再定义从  $Q' \times \Sigma$  到  $Q'$  的函数  $\delta'$  如下:

$$\delta'(P, a) = \begin{cases} Pa & P, Pa \in Q'', \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此构造的自动机  $\mathbf{A}' = (Q', \Sigma, \delta')$  称为  $\mathbf{A}$  的对自动机<sup>[19-20]</sup>.

下述引理 17 给出了对自动机的一个性质.

**引理 17**<sup>[19]</sup>. 自动机  $\mathbf{A}$  的两个不同状态  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  同步的充分必要条件是在  $\mathbf{A}$  的对自动机  $\mathbf{A}'$  中存在从状态  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  到状态  $\infty$  的路径.  $\mathbf{A}'$  中从  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  到  $\infty$  的最短路径的标签就是  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的最短同步字. 进一步地,自动机  $\mathbf{A}$  同步的充分必要条件是它的任意两个不同状态都是同步的.

自动机的 Eppstein 同步性检测算法以引理 17 作为理论基础,其设计思想如下:对于输入自动机  $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta)$ ,先构造其对自动机  $\mathbf{A}'$ ,再在  $\mathbf{A}'$  中以状态  $\infty$  为起点执行反向广度优先搜索,如果能搜索到  $\mathbf{A}'$  的所有状态,则  $\mathbf{A}$  是同步的;否则,  $\mathbf{A}$  是非同步的.此算法的时间复杂度和空间复杂度分别为  $O(mn^2 + n^3)$  和  $O(n^2)$ .

自动机的 Eppstein 同步字查找算法的设计思想如下:对于输入同步自动机  $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta)$ ,先构造其对自动机  $\mathbf{A}'$ ,再在  $\mathbf{A}'$  中以状态  $\infty$  为起点执行反向广度优先搜索,并记录每个状态  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  到状态  $\infty$  的最短路径的标签  $w_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ ;从集合  $Q$  中任取两个不同状态  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{q}$ ,将  $w_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$  在  $Q$  上的作用  $Qw_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$  作为新的集合  $Q$ ;重复上述作用过程直到  $Q$  为一个单元集,则在此过程中选用的所有输入字  $w_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$  的顺序连接就是  $\mathbf{A}$  的一个同步字.此算法的时间复杂度和空间复杂度分别为  $O(mn^2 + n^3)$  和  $O(n^2)$ <sup>[19]</sup>.

### 5.2 树形偏序自动机的专用同步算法

算法 1 是树形偏序自动机的一个专用同步算法,其中自动机中的路径是指该路径的标签.

**算法 1.** 树形偏序自动机的专用同步算法

输入:自动机  $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta)$  及其相容树形偏序结构的 Hasse 图  $G$ .

输出:  $\mathbf{A}$  的同步性和  $\mathbf{A}$  的一个同步字.

(1) 确定  $\mathbf{A}$  的最小状态  $\mathbf{0}$

(2) 在  $\mathbf{A}$  中计算集合

$$S = \{\mathbf{s} \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*) \mathbf{s} = \mathbf{0}w\}$$

(3) 在  $G$  中计算集合

$$T = \{\mathbf{t} \in Q \mid (\exists \mathbf{s} \in S) \mathbf{t} \leq \mathbf{s}\}$$

(4) 在  $G$  中计算  $T$  中所有极大状态的集合  $\max(T)$

(5) 在  $\mathbf{A}$  中查找从  $\mathbf{0}$  到  $\max(T)$  的最短路径  $w$

(6) 置  $u$  为空字

(7) 若  $Q - T = \emptyset$ , RETURN (True,  $uw$ )

(8) 在  $\mathbf{A}$  中计算  $Q - T$  中各状态  $\mathbf{q}$  到  $T$  的最短路径  $u_{\mathbf{q}}$ ,若存在状态  $\mathbf{q}$  没有到  $T$  的路径, RETURN (False, 空字)

(9) 任取  $Q - T$  中的状态  $\mathbf{q}$ ,置

$$u = uu_{\mathbf{q}}, Q - T = (Q - T)u_{\mathbf{q}}$$

(10) 若  $Q - T \neq \emptyset$ , 转到(9)

(11) RETURN (True,  $uw$ )

**定理 18.** 算法 1 的时间和空间复杂度分别为  $O(\max(n^2, mn))$  和  $O(n^2)$ . 它不仅能判定任意  $n$ -状态树形偏序自动机  $\mathbf{A}$  的同步性,还能在  $\mathbf{A}$  同步的情形下找到它的长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字.

证明. 引理 13-14 和定理 15 可以保证算法 1 的正确性,下面给出算法 1 的时间复杂度和空间复杂度进行的具体分析:

(1) 输入自动机  $\mathbf{A}$  的最小状态  $\mathbf{0}$  就是有向图  $G$  中唯一的入度为 0 的顶点,因此,在  $G$  中以任意顶点为起点进行反向搜索得到的无后续的顶点就是  $\mathbf{0}$ . 这个过程需要时间为  $O(n)$ ,空间为常数.

(2) 集合  $S$  就是在  $\mathbf{A}$  中最小状态  $\mathbf{0}$  能到达的所有状态的集合,因此可以通过在  $\mathbf{A}$  中执行以  $\mathbf{0}$  为起

点的广度优先搜索来完成,所需时间和空间分别为  $\mathbf{A}$  的边数  $O(mn)$  和顶点数  $O(n)$ .

(3) 集合  $T$  就是在  $G$  中到  $S$  有路径的顶点的集合,因此可以通过在  $G$  中执行以  $S$  为起点的反向广度优先搜索来完成,所需时间和空间分别为  $G$  的边数  $O(n^2)$  和顶点数  $O(n)$ .

(4) 由集合  $T$  的定义可以知道  $T$  中的状态  $\mathbf{q}$  是  $T$  中一个极大状态的充分必要条件为  $\mathbf{q}$  在  $G$  中没有任何覆盖仍在  $T$  中,因此,对  $T$  做如下处理得到的集合就是  $\max(T)$ ;对  $T$  中的每个状态  $\mathbf{q}$ ,在  $G$  中检查以  $\mathbf{q}$  为起点的边,如果其中一条边的终点仍在  $T$  中,则将  $\mathbf{q}$  从  $T$  中删除.这个过程所需时间和空间分别为  $G$  的边数  $O(n^2)$  和顶点数  $O(n)$ .

(5) 在  $\mathbf{A}$  中以状态  $\mathbf{0}$  为起点,按照到  $\mathbf{0}$  的距离由近及远地顺序执行广度优先搜索至  $\max(T)$  中的状态即终止,对此期间搜索到的每个状态都只需记录搜索到它的边.这个过程需要的时间和空间分别为  $\mathbf{A}$  的边数  $O(mn)$  和状态数  $O(n)$ .

(8) 在  $\mathbf{A}$  中以  $T$  为起始集合,按照到  $T$  的距离由近及远地顺序执行反向广度优先搜索,直至找不到新的状态即终止,在此期间记录搜索到的每个状态及搜索到该状态的边.这个过程需要的时间和空间分别为  $\mathbf{A}$  的边数  $O(mn)$  和状态数  $O(n)$ .

(9)和(10) 这是一个与 Eppstein 同步字查找算法中的迭代过程类似的迭代过程,这个过程需要的时间和空间都为  $O(n^2)$ .

根据上述分析可知算法 1 的时间复杂度为

$$O(n) + O(mn) + O(n^2) + O(n^2) + O(mn) + O(mn) + O(n^2) = O(\max(n^2, mn, n)) = O(\max(n^2, mn)),$$

空间复杂度为  $O(1) + O(n) + O(n) + O(n) + O(n) + O(n) + O(n^2) = O(\max(n^2, n, 1)) = O(n^2)$ .

证毕.

综上所述,树形偏序自动机作为特殊形式的自动机,其同步算法相比于通用的自动机的 Eppstein 同步算法可以有更少的时间耗损.此外,需要特别说明的是通过算法 1 找到的同步字并不能保证是最短同步字.

单演自动机和有界偏序自动机是树形偏序自动机的两类特殊情形,因此,基于这两类自动机的结构的特殊性,还可以将算法 1 分别改进为这两类自动机的专用同步算法,下面具体分析.

考虑算法 1 的输入为自动机  $\mathbf{A}$  及其相容有界偏序结构的 Hasse 图:由于有界偏序自动机的一个重要特征是既有最小状态也有最大状态,因此,算法

1 第 1 行中不仅需要确定  $\mathbf{A}$  的最小状态,还需要确定  $\mathbf{A}$  的最大状态,这一过程需要的时间为  $O(n)$ ;崔振河等<sup>[54]</sup>指出如果一个字  $w$  能够将  $\mathbf{A}$  的最小状态和最大状态转换到同一个状态,则  $w$  就是  $\mathbf{A}$  的一个同步字,据此,在算法 1 第 8 行中,只需要计算最大状态到  $T$  的最短路径  $u$ ,并且算法不再需要进入 9-10 行中的循环;此外,如果算法 1 中的第 8 行能够找到最大状态到  $T$  的最短路径  $u$ ,则将  $u$  与算法 1 第 5 行中的  $w$  连接在一起并输出,否则自动机  $\mathbf{A}$  不同步.最后,根据定理 18 证明中的时间和空间复杂度的分析过程可得基于算法 1 改进的有界偏序自动机的专用同步算法的时间和空间复杂度分别为  $O(\max(n^2, mn))$  和  $O(n^2)$ .

此前,崔振河等基于对自动机提出了有界偏序自动机的同步算法(见文献[54],算法 3),主要思想是:首先构造给定有界偏序自动机的对自动机的状态转换图,然后在该图中寻找一条从最大最小状态对到单一状态对的最短路径,该路径的标签即为输入的有界偏序自动机的最短同步字.这一算法的时间和空间复杂度均为  $O(n^2)$ ,与此相比,上述基于本文算法 1 改进的有界偏序自动机的专用同步算法并不具备明显的优势.

对于单演自动机,Ananichev 和 Volkov 并未给出其专用的同步算法<sup>[53]</sup>,但仍然可以通过改进算法 1 来得到单演自动机的专用同步算法.由于单演自动机是一类特殊的有界偏序自动机,因此,上述基于算法 1 改进的有界偏序自动机的专用同步算法也同样适用于单演自动机,特别地,由于单演自动机的状态集合关于偏序关系构成一条链,因此,算法 1 第 4 行中的集合  $\max(T)$  事实上仅包含一个元素,即最小状态能够到达的所有状态中最大的一个.

广义单演自动机以及  $\sigma$ -单演自动机均采用 Eppstein 算法作为其同步算法.考虑到树形偏序自动机与这两类自动机的结构之间的显著差异,这两类自动机的同步算法无法通过简单地改进树形偏序自动机的同步算法而得到,需要重新设计针对这两类自动机的专用同步算法,这一问题还有待进一步研究.

## 6 对偶情形及特殊情形

自动机  $\mathbf{A}$  的任意偏序结构  $\leq$  的对偶偏序  $\leq^{-1}$  也是  $\mathbf{A}$  的一个偏序结构,容易证明: $\leq$  是  $\mathbf{A}$  的一个相容偏序结构当且仅当  $\leq^{-1}$  是  $\mathbf{A}$  的一个相容偏序



结构;  $\leq$  是  $A$  的一个树形偏序结构当且仅当  $\leq^{-1}$  是  $A$  的一个对偶树形偏序结构. 据此有如下结论:

**推论 19.** 自动机  $A$  具有一个相容对偶树形偏序结构当且仅当  $A$  是一个树形偏序自动机, 因此, Černý 猜想对具有相容对偶树形偏序结构的自动机成立, 即具有相容对偶树形偏序结构的  $n$ -状态同步自动机都有长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字.

对于  $n$ -状态同步有界偏序自动机和  $n$ -状态同步单演自动机, 此前只是证明了它们的最短同步字长度不超过  $n - 1$  [52,54]. 利用引理 14 和引理 17 可以将关于  $n$ -状态同步有界偏序自动机和  $n$ -状态同步单演自动机的上述结论加强如下:

**推论 20.** 假定  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  是一个有  $m$  个输入字母的  $n$ -状态有界偏序自动机, 它关于其相容有界偏序结构  $\leq$  的最小和最大状态分别为  $\mathbf{0}$  和  $\mathbf{1}$ , 则  $A$  是同步的当且仅当其状态  $\mathbf{0}$  和  $\mathbf{1}$  是同步的. 当  $A$  同步时, 可以在  $O(\max(n^2, mn))$  时间内找到  $A$  的一个长度不超过  $n - 1$  的最短同步字.

证明. 时间复杂度的结果见 5.2 节的分析, 下面证明在  $A$  是一个同步有界偏序自动机的前提下,  $A$  存在一个长度不超过  $n - 1$  的最短同步字.

考虑  $A$  的最短同步字的长度特征, 并令  $T = \{t \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*) t \leq \mathbf{0}w\}$ , 则由引理 10 可以知道  $T$  是  $Q$  的一个非空子集且

$$(\forall w \in \Sigma^*) Tw \subseteq T \quad (17)$$

由引理 12 和引理 14 的证明还可以知道  $T$  是  $Q$  的一个同步子集, 且它有同步字  $w$  满足条件  $|w| \leq |T| - 1$ . 再由引理 13 可以知道  $A$  的最大状态  $\mathbf{1}$  能被转换到  $T$  中, 即  $A$  中存在从  $\mathbf{1}$  到  $T$  的道路. 显然,  $A$  中从  $\mathbf{1}$  到  $T$  的任意最短路径的标签  $u$  满足条件  $|u| \leq |Q - T|$ . 由  $\mathbf{1}u \in T$  以及集合  $T$  的定义可知存在输入字  $v$  使得  $\mathbf{1}u \leq \mathbf{0}v$ , 因此对  $Q - T$  中的任意状态  $q$  都有  $qu \leq \mathbf{1}u \leq \mathbf{0}v$ , 从而有  $qu \in T$ . 这说明  $(Q - T)u \subseteq T$ , 从而有  $Qu \subseteq T$ . 据此可以得到  $|Quw| \leq |Tw| = 1$ , 即  $uw$  是  $A$  的一个同步字, 且  $|uw| = |u| + |w| \leq |Q - T| + |T| - 1 = n - 1$ . 因此,  $A$  的最短同步字长度不超过  $n - 1$ .

证毕.

**推论 21.** 假定  $A = (Q, \Sigma, \delta)$  是一个有  $m$  个输入字母的  $n$ -状态单演自动机, 它关于其相容全序结构  $\leq$  的最小状态和最大状态分别为  $\mathbf{0}$  和  $\mathbf{1}$ , 则  $A$  是同步的当且仅当其状态  $\mathbf{0}$  和  $\mathbf{1}$  是同步的. 当  $A$  同步时, 可以在  $O(\max(n^2, mn))$  时间内找到  $A$  的一个长度不超过  $n - 1$  的最短同步字.

## 7 总 结

本文考虑了树形偏序自动机的同步问题, 主要贡献包括以下几个方面: 第一, 讨论了现有的偏序自动机之间的关系, 说明了树形偏序自动机包含所有单演自动机和有界偏序自动机, 但不同于广义单演自动机类和  $\sigma$ -单演自动机类; 第二, 证明了 Černý 猜想对树形偏序自动机成立, 即任意  $n$ -状态同步树形偏序自动机都有长度不超过  $(n - 1)^2$  的同步字; 第三, 给出了树形偏序自动机的同步性检测和同步字查找算法, 并证明了所有  $m$  个输入字母的  $n$ -状态树形偏序自动机的同步性检测问题和同步字查找问题可以在  $O(\max(n^2, mn))$  时间内解决.

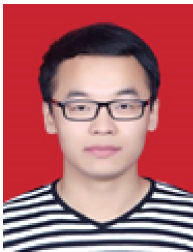
本文也存在以下几个方面的不足: 第一, 本文只针对树形偏序自动机的同步性这一单一指标进行讨论. 除同步性以外, 树形偏序自动机的复杂性和表达能力也是值得深入研究的课题; 第二, 本文对于同步自动机关系的讨论仅仅局限于几类特殊的偏序自动机. 从同步自动机的研究现状来讲, Černý 猜想不仅对于本文所讨论的几类特殊的偏序自动机成立, 还对于其他若干特殊自动机(例如交换自动机、可解自动机、循环自动机以及欧拉自动机等)也成立, 本文并未讨论树形偏序自动机与其他特殊自动机之间的关系; 第三, 树形偏序自动机的专用同步算法性能优势不明显且可扩展性较弱. 本文提出的树形偏序自动机的专用同步算法的时间和空间复杂度相对于一般的同步算法而言并无相当明显的优势, 该同步算法对于其他特殊偏序自动机的可扩展性相对较弱, 且对于给定的树形偏序自动机, 该算法并不能保证找到的同步字是最短的.

综合上述不足, 未来本文将从以下几个方面展开研究: 第一, 在树形偏序自动机的基础上对其结构进一步扩展, 得到一些结构更为一般的偏序自动机, 例如网状偏序自动机(即具有相容网状偏序的自动机), 然后对这些偏序自动机的同步问题进行讨论, 进一步推动 Černý 猜想的研究; 第二, 关于树形偏序自动机的其它评价指标, 例如复杂度和表达能力, 的讨论也是未来工作的一个有趣的方向; 第三, 说明偏序自动机与其他若干特殊自动机之间的关系并不是一项简单的工作, 目前尚无文献对这一问题展开讨论, 深入分析这些自动机之间的关联可能有助于解决 Černý 猜想, 因此, 这也将作为本文的未来工作.

## 参 考 文 献

- [1] Higgins P. The range order of a product of  $i$  transformations from a finite full transformation semigroup. *Semigroup Forum*, 1988, 37(1): 31-36
- [2] Ashby W. *An Introduction to Cybernetics*. London, UK: Chapman & Hall, 1956
- [3] Černý J. Poznam k akhomogenym eksperimentom s konečnymi automatami. *Matematično-fyzikalny Casopis Slovenia Akadmic Vied*, 1964, 14 (3): 208-215
- [4] Hennie F. Fault detecting experiments for sequential circuits. //Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. New Jersey, USA, 1964: 95-110
- [5] Natarajan B. An algorithmic approach to the automated design of parts orienters//Proceedings of the Symposium on Foundations Computer Science. Toronto, Canada, 1986: 132-142
- [6] Natarajan B. Some paradigms for the automated design of part feeders. *International Journal of Robotics Research*, 1989, 8 (6): 89-109
- [7] Kohavi Z. *Switching and Finite Automata Theory*. New York, USA: McGraw-Hill, 1970
- [8] Cho H, Jeong S, Somenzi F. Synchronizing sequences and symbolic traversal techniques in test generation. *Journal of Electronic Testing*, 1993, 4(1): 19-31
- [9] Boppana V, Rajan S, Takayama K. Model checking based on sequential ATPG. *Lecture Notes in Computer Science*, 1999, 2586: 418-430
- [10] Krishnaswamy S, Plaza S, Markov I. Signature-based SER analysis and design of logic circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2009, 28 (1): 74-86
- [11] Kochte M, Wunderlich H. SAT-based fault coverage evaluation in the presence of unknown values//Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition. Grenoble, France, 2011:1-6
- [12] Goemans O, Goldberg K, Stappen A. Blades for feeding 3D parts on vibratory tracks. *Assembly Automation*, 2006, 23 (3): 221-226
- [13] Becker A, Bretl T. Approximate Steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control. *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, 28 (3): 580-591
- [14] Wiegley J, Goldberg K, Peshkin M. A complete algorithm for designing passive fences to orient parts. *Assembly Automation*, 1997, 17 (2): 129-136
- [15] Lee D, Yannakakis M. Principles and methods of testing finite state machines-A survey//Proceedings of the IEEE. Osaka, Japan, 1996: 1090-1123
- [16] Jürgensen H. Synchronization. *Information and Computation*, 2008, 206: 1033-1044
- [17] Benenson Y, Elizur T, Adar R. Programmable and autonomous computing machine made of biomolecules. *Nature*, 2001, 414 (1): 430-434
- [18] Volkov M. Synchronizing automata and the Černý conjecture. *Lecture Notes in Computer Science*, 2008, 5196: 11-27
- [19] Eppstein D. Reset sequences for monotonic automata. *SIAM Journal on Computing*, 1990, 19(3): 500-510
- [20] Roman A. New algorithms for finding short reset sequences in synchronizing automata//Proceedings of the International Enformatika Conference. Prague, Czech Republic, 2005:13-17
- [21] Kudłacik R, Roman A, Wagner H. Effective synchronizing algorithms. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39 (14): 11746-11757
- [22] Podolak I, Roman A, Szykuła M, Zielinski B. A machine learning approach to synchronization of automata. *Expert Systems with Applications*, 2018, 97: 357-371
- [23] Ege Sara N, et al. Boosting expensive synchronizing heuristics. *Expert Systems with Applications*, 2021, 167: 114203
- [24] Zhu K, Wu G Q, Liang Z Q, Yuan M T. Advances on algorithms for problems of resetting finite automata. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2021, 49 (2): 20-27  
(朱凯,毋国庆,梁早清,袁梦霆. 有限自动机重置问题的算法研究进展. 华中科技大学学报(自然科学版), 2021, 49(2): 20-27)
- [25] Olschewski J, Ummels M. The complexity of finding reset words in finite automata//Proceedings of the International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Brno, Czech Republic, 2010: 568-579
- [26] Martyugin P. Complexity of problems concerning reset words for cyclic and Eulerian automata. *Theoretical Computer Science*, 2012, 450 (7): 3-9
- [27] Vorel V. Complexity of a problem concerning reset words for Eulerian binary automata. *Information and Computation*, 2017, 253: 497-509
- [28] Trahtman A. An efficient algorithm finds noticeable trends and examples concerning the Černý Conjecture. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, 4162: 789-800
- [29] Kisielewicz A, Kowalski J, Szykuła M. Computing the shortest reset words of synchronizing automata. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2015, 29 (1): 88-124
- [30] Pin J E. On two combinatorial problems arising from automata theory//Proceedings of the International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics. Pennsylvania, USA, 1983: 535-548
- [31] Szykuła M. Improving the upper bound on the length of the shortest reset word//Proceedings of the International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Caen, France, 2018:1-13
- [32] Rystsov I. Reset words for commutative and solvable automata. *Theoretical Computer Science*, 1997, 172: 273-279
- [33] Dubuc L. Sur les automates circulaires et la conjecture de Černý. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 1998, 32(1): 21-34

- [34] Kari J. Synchronising finite automata on Eulerian digraphs. *Theoretical Computer Science*, 2003, 259(1): 223-232
- [35] Berlinkov M. Synchronizing automata on quasi-Eulerian digraph. *Lecture Notes in Computer Science*, 2012, 7381: 90-100
- [36] Trahtman A. The Černý conjecture for aperiodic automata. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2007, 9 (2): 3-10
- [37] Almeida J, Magolis S, Steinberg B, Volkov M. Representation theory of finite semigroups, semigroup radicals and formal language theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2009, 361 (3): 1429-1461
- [38] Steinberg B. The Černý conjecture for one-cluster automata with prime length cycle. *Theoretical Computer Science*, 2011, 412 (9): 5487-5491
- [39] Volkov M. Synchronizing automata preserving a chain of partial orders. *Theoretical Computer Science*, 2009, 410 (37): 3513-3519
- [40] Martugin P. A series of slowly synchronizing automata with a zero state over a small alphabet. *Information and Computation*, 2008, 206 (9): 1197-1203
- [41] Ananichev D, Gusev V, Volkov M. Slowly synchronizing automata and digraphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 2010, 6281: 55-65
- [42] De Bondt M, Don H, Zantema H. DFAs and PFAs with long shortest synchronizing word length. *Lecture Notes in Computer Science*, 2017, 10396: 122-133
- [43] De Bondt M, Don H, Zantema H. Lower bounds for synchronizing word lengths in partial automata. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2019, 30 (1): 29-60
- [44] De Bondt M, Don H, Zantema H. Slowly synchronizing automata with fixed alphabet size. *Information and Computation*, 2021, 279: 104614
- [45] He Y, Chen X P, Li G, Sun S Y. Extremal synchronizing circular automata. *Information and Computation*, 2021, 281: 104817
- [46] Kari J, Volkov M. Černý's conjecture and the road colouring problem. *Handbook of Automata Theory*, 2021: 525-565
- [47] Trahtman A. The Černý conjecture for aperiodic automata. arXiv preprint arXiv: 2105.09105, 2021
- [48] Gonze F, Gusev V, Jungers R, et al. On the interplay between Černý and Babai's conjectures. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2019 30(1): 93-114
- [49] Carpi A, D'Alessandro F. Locally strongly transitive automata in the Černý conjecture and related problems. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 2019 24 (2): 165-184
- [50] Nicaud C. The Černý conjecture holds with high probability. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 2019 24 (2): 343-365
- [51] Henckell K, Pin J E. Ordered monoids and j-trivial monoids//*Proceedings of the International Conference on Algorithmic Problems in Groups and Semigroups*. Lincoln, USA, 1999:121-137
- [52] Ananichev D, Volkov M. Synchronizing monotonic automata. *Theoretical Computer Science*, 2004, 327 (3): 225-239
- [53] Ananichev S, Volkov M. Synchronizing generalized monotonic automata. *Theoretical Computer Science*, 2005, 330 (1):3-13
- [54] Cui Z H, He Y, Sun S Y. Synchronizing bounded partially ordered automata. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42 (3): 610-623  
(崔振河,何勇,孙士远. 同步有界偏序自动机. *计算机学报*, 2019,42 (3): 610-623)
- [55] Tomáš Masopust, Markus Krötzsch. Partially ordered automata and piecewise testability. *Logical Methods in Computer Science*, 2021, 17 (2):1-36
- [56] Héam P C. A note on partially ordered tree automata. *Information Processing Letters*, 2008, 108 (4):242-246
- [57] Grätzer G. *Lattice Theory: Foundation*. Basel, Switzerland: Birkhaeuser, 2011
- [58] Howie J. *Automata and Languages*. Oxford, UK: Clarendon Press. 1991
- [59] Cormen T H, Leiserson C E, Rivest R L, et al. *Introduction to algorithms*. 3th Edition. Cambridge, USA: MIT press, 2009



**CUI Zhen-He**, Ph. D., lecturer.

His current research interests include automata theory and knowledge representation and reasoning.

**WANG Zhi-Xi**, M. S., associate professor. His research interests include theoretical computer science and com-

puter algorithm.

**HE Yong**, Ph. D., professor. His research interests include formal languages and automata theory.

## Background

An input word of an automaton is called a synchronizing word if it transfers all states to a single state. An automaton

having a synchronizing word is called a synchronizing automaton. Synchronizing automata have been validly applied in

many fields such as system testing, encoding, industrial automation, robotics and biological computation. For the researches on synchronizing automata, the fundamental problem is the synchronizing problem, the most challenging issue is to prove or disapprove the Černý Conjecture concerning the lengths of the shortest synchronizing words of synchronizing automata. Some special classes of automata, such as circular automata, aperiodic automata, Eulerian automata et al., have been proved to satisfy Černý Conjecture.

Partially ordered automata (in brief, po-automata) are the automata whose state set is equipped with a partial order that compatible to the input letters. Theoretically, the research of synchronizing automata can be ascribed to the research of synchronizing po-automata, thus, Černý conjecture

is true if and only if it is true for po-automata. It has been shown that monotonic automata, generalized monotonic automata and bounded po-automata satisfy Černý conjecture.

In this work, we firstly defined the tree-like po-automata, it is shown that tree-like po-automata satisfies Černý conjecture. Then, we proposed an algorithm for checking the synchronization and finding synchronizing words of a given tree-like po-automaton. Finally, some examples are designed to illustrate that tree-like po-automata is proper generalization of monotonic automata and bounded po-automata, and tree-like po-automata and generalized monotonic automata have distinct expression abilities.

This work was supported by National Natural Science Foundation of China (No. 61572013).