同步有界偏序自动机

崔振河　何　勇　孙士远

（湖南科技大学计算机科学与工程学院　湖南 湘潭　411201）

摘　要　所有状态都能被同一个字转换到同一状态（完全确定有限状态）的自动机称为同步自动机. 同步自动机在许多方面都有着广泛的应用，如重启装置的设计、系统测试、编码、工业自动化、机器人技术以及生物计算等. 同步自动机研究的最基本的问题是自动机的同步性问题，同步性问题主要包括同步性检测和同步字查找. 最短同步字问题是同步自动机研究的核心课题，关于这个问题，Černý 提出了如下猜想：所有 n-状态同步自动机的最短同步字长度的上确界为 $(n-1)^2$. 现有研究结果表明，对于某些特殊类型的自动机 Černý 猜想是成立的，例如循环自动机、欧拉自动机等. 然而，对于一般的同步自动机 Černý 猜想尚未得到证实或否定. 由于任何自动机都能看作偏序自动机，因而 Černý 猜想成立的充分必要条件是它对所有偏序自动机都成立. 单演自动机和广义单演自动机等偏序自动机都已被证实满足 Černý 猜想. 作为偏序自动机的另一类特殊情形，该文定义了有界偏序自动机，运用组合分析方法证明了 n-状态有界偏序自动机最短同步字的长度为 $n-1$. 作为主要结果的推论，得出 n-状态格序自动机的最短同步字的长度也是 $n-1$. 这就意味着有界偏序自动机（特别是格序自动机）满足 Černý 猜想. 进一步地，该文设计了有界偏序自动机的同步性检测及同步字查找算法. 最后，该文还对单演自动机、广义单演自动机和有界偏序自动机的关系进行了讨论，得出以下结论：广义单演自动机和有界偏序自动机同为单演自动机的真推广，且它们的表达能力不相容.

关键词　同步自动机；最短同步字；Černý 猜想；有界偏序自动机；格序自动机

中图法分类号　TP301　　**DOI 号**　10.11897/SP.J.1016.2019.00610

Synchronizing Bounded Partially Ordered Automata

CUI Zhen-He　HE Yong　SUN Shi-Yuan

(*School of Computer Science and Engineering*, *Hunan University of Science and Technology*, *Xiangtan*, *Hunan*　411201)

Abstract　An (completely deterministic finite state) automaton is synchronizing if its states can be transited to a single state under the action of the same word, which is called synchronizing word. Synchronizing automata has been widely used in many fields such as the design of restart device, system testing, encoding, industrial automation, robotics and biological computation. The synchronization problem is the basic problem of synchronizing automata research, which includes synchronization detection and finding synchronizing words, the former is aimed at discussing how to determine whether an automaton is synchronizing and the latter mainly studies how to find shorter synchronizing words (preferably the shortest synchronizing words) as quickly as possible. The problem of the shortest synchronizing word is the core problem of synchronizing automaton, with respect to this problem, Černý conjectured that each n-state synchronizing automaton possesses a synchronizing word of length at most $(n-1)^2$. Such a conjecture is called Černý conjecture. Some special class of automata such as circular automaton, Eulerian automaton, aperiodic automaton has been proved to satisfy Černý Conjecture. However, this conjecture has not yet

收稿日期：2016-08-08；在线出版日期：2017-08-28. 本课题得到国家自然科学基金（61572013）、湖南省研究生科研创新基金（CX2015B509）资助. **崔振河**，男，1992 年生，硕士研究生，中国计算机学会（CCF）学生会员，主要研究方向为自动机理论. E-mail：gsZhenheCui@163.com. **何　勇**，男，1970 年生，博士，教授，中国计算机学会（CCF）会员，主要研究领域为形式语言与自动机理论. **孙士远**，男，1995 年生，学士，主要研究方向为自动机理论.

been confirmed or denied for general synchronizing automata so far, and it has become one of the open problems in automata theory. Partially ordered automata are the automata whose state sets are equipped with a partial order relation that compatible to the input letters. Since each automaton can be dealt with a partially ordered automaton, Černý Conjecture holds precisely when it holds for partially ordered automata. Some classes of partially ordered automata such as monotonic automata and generalized monotonic automata have been proved to satisfy Černý Conjecture. As a kind of special cases of partially ordered automata, bounded partially ordered automata are defined. In the aids of combinatoric analyses, it is shown that the shortest synchronizing words of a n-state synchronizing bounded partially ordered automaton are of length at most $n-1$. As an immediate consequence, the shortest synchronizing words of a n-state synchronizing lattice-ordered automaton are also of length at most $n-1$. This means that bounded partially ordered automata (especially, lattice-ordered automata) satisfy Černý conjecture. Furthermore, an algorithm is proposed for checking the synchronization and finding a shortest synchronizing word of a bounded partially ordered automaton. Also, the relationships of the classes of monotonic automata, generalized monotonic automata and bounded partially ordered automata are discussed. It is illustrated that both the classes of generalized monotonic automata and that of bounded partially ordered automata are proper generalizations of the class of monotonic automata which have distinct expression abilities.

Keywords synchronizing automaton; shortest synchronizing word; Černý Conjecture; bounded partially ordered automaton; lattice-ordered automaton

1 引 言

同步自动机是由控制学家 Černý 在 1964 年发现的一类特殊的(有限状态)自动机[1]. 同年, Hennie 在研究电子设备的故障检测问题时也发现了同步自动机[2]. 1986 年, Natarajan 提出了一种在流水线上对设备部件进行定位的方案,并将该方案抽象成以下问题:对于给定的某有限集 Q 上保持循环序的函数序列

$$f_1, f_2, \cdots, f_k: Q \rightarrow Q,$$

如何找出它们的一个常值函数组合[3-4]. 1990 年, Eppstein 将 Natarajan 的方案归结为查找单演自动机的同步字的问题[5]. 此后,同步自动机被广泛应用于重启装置的设计、系统测试、编码等诸多方面以及工业自动化的全过程(包括输送、定位、装载、装配及包装等环节),“同步自动机在机器人上的应用”甚至成为了机器人学的一个专门的研究方向[6-16]. Benenson 等人近期发表于《Nature》和《Proceedings of National Academic Science》的论文表明同步自动机还可应用于生物计算[17-18]. 从定义上来看,同步自动机是一类要求比较苛刻的自动机,但从统计意义上来看大部分自动机是同步的[19].

同步性的判定和同步字的查找是同步自动机研究的基本课题. 1990 年, Eppstein 基于对自动机提出了两种复杂度为 $O(n^3+mn^2)$ 的自动机同步性判定和同步字搜索算法,其中 n 为自动机的状态数, m 为输入字母表的基数[5]. 这两个算法是目前最常用的同步性判定和同步字查找算法. Roman 也基于对自动机设计了两个复杂度为 $O(n^5/8)$ 的同步性判定及同步字查找算法,其中 n 为自动机的状态数[20], 该算法特色是与输入字母表的基数无关.

最短同步字是同步自动机理论研究的主要对象. Eppstein 首先证明了确定同步自动机的最短同步字问题是一个 NP-完全问题[5]. Martyugin 和 Vorel 则分别证明了确定同步循环自动机和同步欧拉自动机的最短同步字问题仍是 NP-完全问题[21-22]. Kisielewicz, Kowalski 和 Szykula 设计了一种查找最短同步字的近似算法[23],但该算法结构复杂,实现困难,在实验过程中未得到广泛应用. 最短同步字研究的核心问题是 Černý 提出的如下猜想:任意 n 状态同步自动机都有长度不超过 $(n-1)^2$ 的同步字[1]. 这个猜想称为 Černý 猜想. 迄今为止,已证实 n 状态同步自动机都有长度不超过 $(n^3-n)/6$

的同步字[24-25]，并证明了循环自动机、欧拉自动机、非周期自动机和素数阶的单簇自动机等都满足 Černý 猜想[26-33]. 尽管如此，目前 Černý 猜想对一般情形仍成立未得到证实或否定，它已经成为了自动机组合理论领域存留时间最长的猜想. Volkov 对同步自动机的研究及应用的起源与发展、最短同步字的查找算法、Černý 猜想的研究等进行了经典概括[34].

序结构是很多实际问题的抽象. 所谓序自动机就是状态集具有与输入指令相容的序关系的自动机. Eppstein 研究的定位自动机就是一类循环序自动机[5]. Henckell 和 Pin 在研究序幺半群时引入了偏序自动机(即序关系为偏序的序自动机)的概念[35]. 因为集合上的离散序都是偏序，所以任何自动机都可以看作偏序自动机，因而 Černý 猜想成立的充分必要条件是它对所有偏序自动机都成立. Ananichev 和 Volkov 将状态集形成链的自动机称为单演自动机，他们证明了同步单演自动机满足 Černý 猜想[36]，并在此后将这项研究推进到广义单演自动机和弱单演自动机上[37-38].

考虑到有界序集(特别是有限格)是一类特别常见的序结构，本文将对状态集是有界序集的序同步自动机进行研究，主要结果是证明这类同步自动机最短同步字长度不超过其状态数减 1，从而证实这类自动机满足 Černý 猜想. 由该结果很容易知道状态集形成格的序同步自动机(特别是同步单演自动机)一定满足 Černý 猜想. 接着，本文将给出同步有界偏序自动机的同步性判定算法及同步字查找算法；此外，还将用具体的例子说明状态集是有界序集的序同步自动机确实是与同步广义单演自动机表达能力不相容的一类序同步自动机.

2　预备知识

设 P 为一个偏序集. 对任意的 $x, y \in P$，当 $x \leq y$ 时，记

$$[x, y] = \{q \in P \mid x \leq q \leq y\}.$$

如果 P 既有最大元也有最小元，就称 P 为一个有界偏序集. 如果 C 是 P 的一个子集且其元素两两都可比，就称 C 为 P 的一条子链；如果 C 是 P 的一条子链且不是其它子链的真子集，就称 C 为 P 的一条极大子链. 如果 P 的某些极大子链 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 满足条件

$$P = \bigcup_{i=1}^{t} C_i,$$

就称 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 为 P 的一个极大链覆盖. 关于偏序集的其它未定义的术语和记号可参阅文献[39]. 有限偏序集的下述性质将会在文中用到.

引理 1[39]. 　每个有限偏序集都有极大链覆盖.

有限状态自动机(以下简称为自动机)是一个形如 $A = (Q, \Sigma, \delta)$ 的三元组，其中 Q 是一个有限集，称为 A 的状态集，其元素称为状态；Σ 是一个非空有限集，称为 A 的输入字母表，其元素称为输入字母；δ 是一个从 $Q \times \Sigma$ 到 Q 的幂集的函数，称为 A 的状态转换函数，它定义了输入字母在 Q 上的作用. 特别地：

(1) 如果对任意的 $q \in Q$ 和 $a \in \Sigma$，都有 $|qa| \leq 1$，就称 A 是确定的；否则，称 A 是非确定的；

(2) 如果对任意的 $q \in Q$ 和 $a \in \Sigma$，都有 $|qa| \geq 1$，就称 A 是完全的；否则，称 A 是不完全的.

据此，自动机可以分为完全确定自动机、完全非确定自动机、确定非完全自动机、非完全非确定自动机这四类. 下面的图 1～图 4 用状态转换图给出了这四类自动机的例子. 显然，自动机 $A = \{Q, \Sigma, \delta\}$ 是完全确定的意味着状态转换函数 δ 是一个从 $Q \times \Sigma$ 到 Q 的函数. 本文的讨论仅限于完全确定自动机.

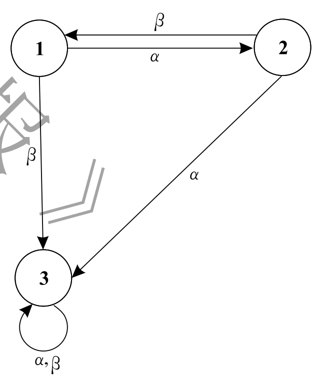


图 1　一个完全确定自动机

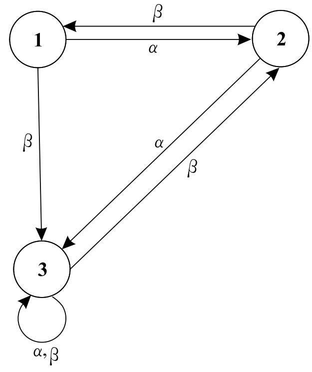


图 2　一个完全非确定自动机

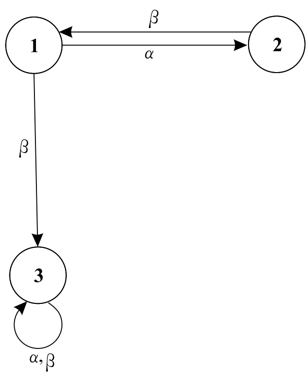


图 3　一个确定非完全自动机

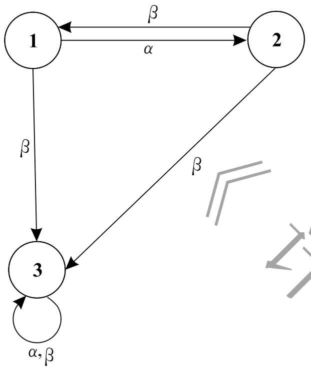


图 4　一个非完全非确定自动机

对于自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$，其输入字母的有限序列称为输入字，它们的全体构成字母表 Σ 上的自由幺半群 Σ^*，其中的空字用 e 表示. 状态转换函数 δ 可以唯一地扩展为一个从 $Q\times\Sigma^*$ 到 Q 的函数，它定义了输入字在状态集上的作用. 输入字 w 在状态 $\boldsymbol{q}$ 上的作用通常记为 $\boldsymbol{q}w$，在 Q 的子集 P 上的作用定义为

$$Pw=\{\boldsymbol{p}w\mid\boldsymbol{p}\in P\}.$$

若存在输入字 $w\in\Sigma^*$ 使得 $|Qw|=1$，即 w 可以将所有状态都转换为同一个状态，就称该自动机为同步的，并称具有这种性质的输入字 w 为 A 的同步字[1].

给定 n-状态自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$. 对于状态集 Q 上的等价关系 ρ，记 $[\boldsymbol{q}]_\rho$ 为包含状态 $\boldsymbol{q}$ 的 ρ-类，并记 Q/ρ 为 Q 模 ρ 的商集. 如果对任意 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\in\rho$ 和任意输入字母 σ 都有 $(\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{q}\sigma)\in\rho$，就称 ρ 为 A 上的一个同余. 此时，可以定义 A 关于同余关系 ρ 的商自动机 $A/\rho=(Q/\rho,\Sigma,\delta_\rho)$，其状态转换函数为

$$[\boldsymbol{q}]_\rho\sigma=[\boldsymbol{q}\sigma]_\rho.$$

令 Q' 为 A 的所有一元状态集和二元状态集组成的集合，定义从 $Q'\times\Sigma$ 到 Q' 的函数 δ' 如下：

$$\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}\sigma=\begin{cases}\boldsymbol{p}\sigma, & \boldsymbol{p}\sigma=\boldsymbol{q}\sigma\\ \{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{q}\sigma\}, & \text{其他}\end{cases}.$$

由此得到的自动机 $A'=(Q',\Sigma,\delta')$ 称为 A 的对自动机. 令 Q'' 为 A 的所有二元状态集和一个特殊符号 ∞ 组成的集合，定义 $Q''\times\Sigma$ 到 Q'' 的函数 δ'' 如下：

$$\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}\sigma=\begin{cases}\infty, & \boldsymbol{p}\sigma=\boldsymbol{q}\sigma\\ \{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{q}\sigma\}, & \text{其他}\end{cases}.$$

由此得到的自动机 $A''=(Q'',\Sigma,\delta'')$ 称为 A 的退化对自动机. 实际上，A'' 是 A' 的一个商自动机. 下面的引理给出了自动机同步性的两种判定方法.

引理 2[1].　自动机 A 是同步的当且仅当 A' 的每个二元状态到某一元状态是可达的当且仅当 A'' 的每个二元状态到特殊状态是可达的.

如果自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 的状态集 Q 具有一个与输入字母都相容的偏序 $\leq$，即对任意满足条件 $\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{q}$ 的状态 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 和任意输入字母 σ 都有 $\boldsymbol{p}\sigma\leq\boldsymbol{q}\sigma$，就称 A 为一个偏序自动机. 状态集是有界偏序集的(同步)偏序自动机称为(同步)有界偏序自动机. 下面的例 1 给出了同步有界偏序自动机的一个例子，引理 3 则给出了该类自动机的一个基本性质.

例 1.　设 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 是一个自动机，其状态集为 $Q=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$，输入字母表为 $\Sigma=\{\alpha,\beta\}$，状态转换图如图 5，

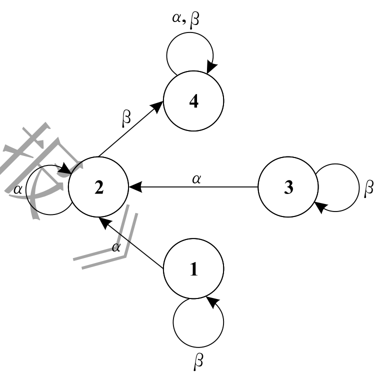


图 5　自动机 A 的状态转换图

状态集 Q 上的偏序关系

$$\leq=\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{4}),(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{1},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{4}),(\mathbf{2},\mathbf{4}),(\mathbf{3},\mathbf{4})\}$$

可用 Hasse 图表示如图 6.

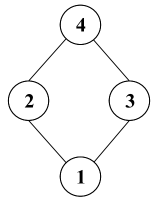


图 6　状态集的 Hasse 图

根据状态转换图可知，对于字母 α 有

$$\mathbf{1}\alpha=2\leq 2=\mathbf{2}\alpha,\ \mathbf{1}\alpha=2\leq 2=\mathbf{3}\alpha,$$
$$\mathbf{1}\alpha=2\leq 4=\mathbf{4}\alpha,\ \mathbf{2}\alpha=2\leq 4=\mathbf{4}\alpha,$$
$$\mathbf{3}\alpha=2\leq 4=\mathbf{4}\alpha.$$

对于字母 β 有

$$\mathbf{1}\beta=1\leq 4=\mathbf{2}\beta,\ \mathbf{1}\beta=1\leq 3=\mathbf{3}\beta,$$
$$\mathbf{1}\beta=1\leq 4=\mathbf{4}\beta,\ \mathbf{2}\beta=4\leq 4=\mathbf{4}\beta,$$
$$\mathbf{3}\beta=3\leq 4=\mathbf{4}\beta.$$

因此,A 关于偏序关系$\leq$行成一个有界偏序自动机.容易验证,$\alpha\beta$ 是 A 的一个同步字.

引理 3. 当 A 是一个偏序自动机时,其状态集上的偏序相容于所有输入字,即对任意满足条件 $\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{q}$ 的状态 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 和任意输入字 w 都有 $\boldsymbol{p}w\leq\boldsymbol{q}w$.

证明. 若 $w=e$,结论显然成立,因此只考虑 $w\neq e$ 的情形.对 w 的长度进行归纳,当 $|w|=1$ 时,根据偏序自动机的定义可知命题成立.假设 $|w|=k$ 时命题成立,再讨论 $|w|=k+1$ 时的情形.令

$$w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k\sigma_{k+1},$$

对任意满足条件 $\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{q}$ 的状态 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$,记

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,\ \boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,$$

则由归纳假设可得 $\boldsymbol{p}'\leq\boldsymbol{q}'$.又由于

$$\boldsymbol{p}w=\boldsymbol{p}'\sigma_{k+1},\ \boldsymbol{q}w=\boldsymbol{q}'\sigma_{k+1},$$

因此必然有 $\boldsymbol{p}w\leq\boldsymbol{q}w$. 证毕.

3 主要结果及其证明与应用

下面的定理是本文的主要结论,它说明了有界偏序自动机满足 Černý 猜想.

定理 1. 任意 n 状态同步有界偏序自动机都有长度不超过 $n-1$ 的同步字.

为了证明上述定理,首先要找到这样的一个集合 I,它必须满足如下条件:

(1) 对每个 $w\in\Sigma^*$,有 $\boldsymbol{a}w\in I$;

(2) 对每个 $w\in\Sigma^*$,有 $Iw\in I$;

(3) 存在 $v\in\Sigma^*$和状态 $\boldsymbol{q}$,使得 $Iv=\boldsymbol{q}$.

其次,基于有界偏序自动机同步的前提,证明必存在一个字 $u\in\Sigma^*$,使得 $\boldsymbol{b}u\in I$.此时 $w=uv$ 为该自动机的同步字.最后对该同步字的长度进行讨论.

证明. 因为单状态自动机都以空字为同步字,所以只须考虑 $n>1$ 的情形. 令 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 为一个 n 状态同步有界偏序自动机. 分别记 Q 的最小元和最大元为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并定义 Q 的子集

$$X=\{\boldsymbol{a}w\mid w\in\Sigma^*\}.$$

取定 Q 的一个极大链覆盖 $C_1,C_2,\cdots,C_t$,并令

$$X_i=X\cap C_i,\ i=1,2,\cdots,t.$$

则显然有

$$X=\bigcup_{i=1}^{t}X_i \tag{1}$$

对每个 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$,由 $\boldsymbol{a}\in X_i$以及 $X_i\subseteq C_i$可以断定 X_i为 Q 的一条子链.记 X_i的最大元为 $\boldsymbol{b}_i$,则

$$X_i\subseteq[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_i] \tag{2}$$

且必定存在 $w_i\in\Sigma^*$ 使得

$$\boldsymbol{a}w_i=\boldsymbol{b}_i \tag{3}$$

现在令

$$M=\{\boldsymbol{b}_i\mid i=1,2,\cdots,t\},I=\bigcup_{i=1}^{t}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_i],\ Z=Q-I.$$

接下来用 5 个步骤完成证明.

第 1 步. 证明存在长度不超过$|Z|$的字 u 满足条件 $\boldsymbol{b}u\in I$.令

$$L=\{w\in\Sigma^*\mid\boldsymbol{b}w\in I\}.$$

同步有界偏序自动机 A 的任意同步字 w 显然具有性质 $\boldsymbol{b}w=\boldsymbol{a}w\in X$,进而由(1)和(2)可以知道 $\boldsymbol{b}w\in I$,因而 $L\neq\varnothing$.取 L 中的一个最短字

$$u=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s,\ \sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s\in\Sigma,$$

考虑 u 作用于 $\boldsymbol{b}$ 的路径:

$$\boldsymbol{b}\xrightarrow{\sigma_1}\boldsymbol{b}\sigma_1\xrightarrow{\sigma_2}\boldsymbol{b}\sigma_1\sigma_2\xrightarrow{\sigma_3}\cdots\xrightarrow{\sigma_s}\boldsymbol{b}u.$$

显然,$\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\sigma_1,\boldsymbol{b}\sigma_1\sigma_2,\cdots,\boldsymbol{b}\sigma_1\cdots\sigma_{s-1}$是 Z 中两两不相同的状态,而 $\boldsymbol{b}u\in I$,因此

$$|u|=s\leq|Z|.$$

第 2 步. 证明

$$Iw\subseteq I,\ \forall w\in\Sigma^* \tag{4}$$

对任意的 $\boldsymbol{q}\in I$ 和 $w\in\Sigma^*$,由 I 的定义可知必存在某整数 $i(1\leq i\leq t)$使得 $\boldsymbol{q}\leq\boldsymbol{b}_i$,根据等式(3)和引理 3 还可以进一步得到

$$\boldsymbol{q}w\leq\boldsymbol{b}_iw=\boldsymbol{a}w_iw.$$

因为 $\boldsymbol{a}w_iw\in X$,所以一定存在某整数 $j(1\leq j\leq t)$使得 $\boldsymbol{a}w_iw\in X_j$,从而

$$\boldsymbol{q}w\leq\boldsymbol{b}_iw=\boldsymbol{a}w_iw\leq\boldsymbol{b}_j.$$

这就证明了 $\boldsymbol{q}w\in I$.因此式(4)确实成立.

第 3 步. 证明

$$Iw_i=\boldsymbol{b}_i,\ i=1,2,\cdots,t \tag{5}$$

对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$和 $\boldsymbol{q}\in I$,由 $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{q}$ 以及等式(3)和引理 3 可以知道

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}w_i\leq\boldsymbol{q}w_i,$$

而由式(4)还可以知道 $\boldsymbol{q}w_i\in I$,即存在某整数 $j(1\leq j\leq t)$使得 $\boldsymbol{q}w_i\leq\boldsymbol{b}_j$,因而

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}w_i\leq\boldsymbol{q}w_i\leq\boldsymbol{b}_j.$$

因为 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_j$ 显然都是 X 的极大元，所以上面的不等式只有在 $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}_j$ 时才成立，因而

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}w_i=\boldsymbol{q}w_i.$$

这就证明了等式(5).

第 4 步. 证明存在长度不超过 $|I|-|M|$ 的字 v 和某整数 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}v=\boldsymbol{b}_i$. 令

$$K=\{w\in\Sigma^*\,|\,\boldsymbol{a}w\in M\}.$$

根据 $\boldsymbol{a}\in I$ 的事实和式(5)可以断定 $K\neq\varnothing$. 取 K 中的一个最短字 $v=\tau_1\tau_2\cdots\tau_t$，其中 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_t\in\Sigma$，考虑 v 作用于 $\boldsymbol{a}$ 的路径：

$$\boldsymbol{a}\xrightarrow{\tau_1}\boldsymbol{a}\tau_1\xrightarrow{\tau_2}\boldsymbol{a}\tau_1\tau_2\xrightarrow{\tau_3}\cdots\xrightarrow{\tau_t}\boldsymbol{a}v.$$

由 v 的最短性和式(4)可知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\tau_1,\boldsymbol{a}\tau_1\tau_2,\cdots,\boldsymbol{a}\tau_1\cdots\tau_{t-1}$ 是 $I-M$ 中两两不相同的状态而 $\boldsymbol{a}v\in M$，因此

$$|v|=t\leq|I-M|=|I|-|M|.$$

第 5 步. 证明自动机 A 存在长度不超过 $n-1$ 的同步字. 令 $w=uv$，其中 u 和 v 分别是上面第 1 步和第 4 步中确定的字，并假定 $\boldsymbol{a}v=\boldsymbol{b}_i$. 则当然有

$$\begin{aligned}|w|&=|u|+|v|\leq|Z|+|I|-|M|\\&=|Q|-|M|\leq n-1.\end{aligned}$$

由于对任意的 $\boldsymbol{q}\in I$，由 $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{q}$ 以及引理 3 和式(4)可知

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}v\leq\boldsymbol{q}v\in I,$$

因而存在某整数 $j(1\leq j\leq t)$ 使得

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}v\leq\boldsymbol{q}v\leq\boldsymbol{b}_j.$$

因为 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_j$ 都是 X 的极大元，所以上面的不等式只有在 $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}_j$ 时才成立，因而

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}v=\boldsymbol{q}v.$$

特别地，由 $\boldsymbol{a}u,\boldsymbol{b}u\in I$ 和式(5)可以得到

$$\boldsymbol{b}_i=(\boldsymbol{a}u)v=(\boldsymbol{b}u)v.$$

对任意的 $\boldsymbol{q}\in Q$，由于 $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{q}\leq\boldsymbol{b}$，根据引理 3 和上述等式可以得到

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{a}uv=\boldsymbol{a}w\leq\boldsymbol{q}w\leq\boldsymbol{b}w=\boldsymbol{b}uv=\boldsymbol{b}_i,$$

因而 $\boldsymbol{q}w=\boldsymbol{b}_i$. 这说明 w 是 A 的长度不超过 $n-1$ 的同步字.　　证毕.

任意两个元素都有上确界和下确界的偏序集称为格，状态集形成格的偏序自动机称为格自动机. 由于有限格都是有界偏序集，由定理 1 可以直接得到下面的结论.

推论 1.　n 状态同步格自动机都有长度不超过 $n-1$ 的同步字，因而格自动机满足 Černý 猜想.

任意两个元素都可比的偏序集称为全序集，状态集形成全序集的偏序自动机称为单演自动机[36].

由于全序集都是格，推论 1 可以特殊化如下：

推论 2[36].　n 状态同步单演自动机都有长度不超过 $n-1$ 的同步字.

例 2.　下面的例子来源于文献[34]，它说明了同步自动机应用于工业自动化的基本原理. 假定要在流水线上为某设备装配一个不规则部件 P. 该部件由从左往右运行的传送带送达至装配点，在送上传送带时可能朝向 0、1、2、3 四个方向中的任意一个，但只有方向 0 才适合安装. 部件 P 的形状和可能朝向的四个方向如图 7 所示. 要使 P 在到达装配点时能定位到方向 0，可以在传送带右端设置高、低两种障碍物各若干，再按以下方案控制 P 的方向变化：

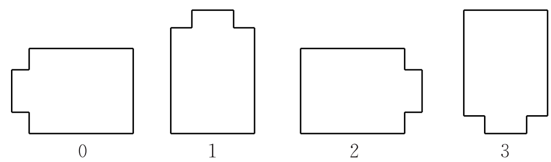


图 7　不规则部件

当传送带右端触碰到高障碍物时，将 P 顺时针旋转 $90°$；当传送带右端触碰到低障碍物时，如果 P 处于方向 3，则将其顺时针旋转 $90°$；否则保持其原方向不变. 这种控制方案可以描述为图 8 中的有限状态自动机，

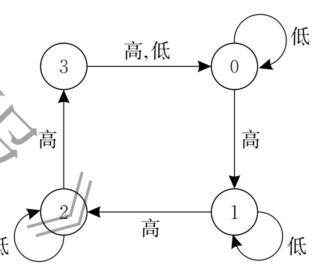


图 8　部件定位方案

由 Černý[1] 的结果可以知道"低高高高低高高高低"是可以将 P 的方向定位为 0 的最短指令. 因此，只需按"低高高高低高高高低"的次序在传送带右端设置九个特殊障碍物即可达到目的. 综上，Černý 猜想成立的意义可以表述如下：对于某些离散控制系统，不管其当前状态如何，总可以通过输入某个长度不超过 $(n-1)^2$ 的指令(即同步字)使其到达某特定状态. 由定理 1 可知，对于可以抽象为同步有界偏序自动机的离散控制系统而言，这种指令的长度不超过 $n-1$.

4　同步性判定及同步字查找算法

给定自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$. 对于状态集 Q，首先

确定一个单元状态 $\boldsymbol{r}$，然后在 $Q-\{\boldsymbol{r}\}$ 中找到某个与状态 $\boldsymbol{r}$ 同步的单元状态 $\boldsymbol{q}$，并将其最短同步字记为 $w(\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}\})$；接着将 $w(\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}\})$ 作用于 Q' 上并将 $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}\}\cdot w(\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}\})$ 赋值为初始单元状态 $\boldsymbol{r}$；重复上述步骤直至 $|Q'|=1$. 此时，由上述引理 2 可知自动机 A 是同步的，顺序连接所有的 $w(\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}\})$ 就可以得到 A 的一个同步字. 根据这个原理，Eppstein 设计了自动机同步性判定与同步字查找的循环算法[5]. 下面介绍该算法，为了简化算法描述，记

$$d(\boldsymbol{q})=\min_{w\in A^*}\{|w|:|\boldsymbol{q}w|=1\},$$

为将二元状态 $\boldsymbol{q}$ 转换为单元状态的最短字的长度，长度恰为 $d(\boldsymbol{q})$ 的字记为 $w(\boldsymbol{q})$.

算法 1. 同步性判定及同步字查找的循环算法.

输入：自动机 A

输出：A 的同步字 w

$A'=(Q',\Sigma,\delta')\leftarrow A'(A)$；

$w\leftarrow e$；

FIND $\boldsymbol{r}$：$d(\{\boldsymbol{r},\_\})=1$；

WHILE $|Q'|\,!=1$ DO{

  FIND $\boldsymbol{p}=\{\boldsymbol{r},\_\}$：$d(\boldsymbol{p})=\min\{d(\boldsymbol{q})$：$\boldsymbol{q}$ in $Q'\}$；

  $w\leftarrow w\cdot w(\boldsymbol{p})$；$Q'\leftarrow Q'w(\boldsymbol{p})$；

  $\boldsymbol{r}\leftarrow \boldsymbol{p}\cdot w(\boldsymbol{p})$；}

RETURN w；

借助于退化对自动机，Eppstein 又设计了自动机同步性判定与同步字查找的贪心算法[5]，算法思想具体如下：

记 Q'' 中的状态 $\boldsymbol{q}$ 在 A'' 的状态转换图中到达 ∞ 的最小距离为

$$d(\boldsymbol{q})=\min_{w\in A^*}\{|w|:\boldsymbol{q}w=\infty\},$$

并形式化地将从 $\boldsymbol{q}$ 到 ∞ 的任意最短路径的标签记为 $w(\boldsymbol{q})$；对于给定的输入字 w，称 Qw 中的状态为活动状态，并称 $Q-Qw$ 中的状态称为稳定状态. 在 A'' 中优先检测与 ∞ 距离较短的活动状态 $\boldsymbol{q}$ 并记录相应的标签 $w(\boldsymbol{q})$，如果最后剩余活动状态仅为 $Q''=\{\infty\}$，则自动机 A 是同步的，此时顺序连接所有记录的标签就可以得到 A 的一个同步字. 具体算法描述如下.

算法 2. 同步性判定及同步字查找的贪心算法.

输入：自动机 A

输出：A 的同步性及同步字 w

$A''=(Q'',\Sigma,\delta'')\leftarrow A''(A)$；

$w\leftarrow e$；

WHILE $(Q''!=\infty)$ DO{

  FIND $\boldsymbol{p}$：$d(\boldsymbol{p})=\min\{d(\boldsymbol{q})$：$\boldsymbol{q}$ in $Q''\}$；

  $w\leftarrow w\cdot w(\boldsymbol{p})$；

  $Q''\leftarrow Q''w(\boldsymbol{p})$；}

RETURN w；

对于任意同步有界偏序自动机 A，由定理 1 及其证明可以知道：A 是同步的当且仅当存在某个输入字 $w\in\Sigma^*$ 使得 $\boldsymbol{a}w=\boldsymbol{b}w$（其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别为 A 的最小状态和最大状态），且此时 w 为 A 的一个长度不超过 $n-1$ 的同步字. 据此，可以基于退化对自动机设计有界偏序自动机同步性判定和同步字查找的如下算法.

算法 3. 有界偏序自动机的同步性检测及同步字查找算法.

输入：自动机 A

输出：A 的最短同步字 w

1. $A''=(Q'',\Sigma,\delta'')\leftarrow A''(A)$；
2. $w\leftarrow e$；
3. IF（存在字 $w(\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\})$，使得 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}w=\infty$）
4. {
5. $w\leftarrow w\cdot w(\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\})$；
6.   RETURN w；
7. }；
8. ELSE
9.   RETURN FALSE；

算法 3 的第 1 行构造自动机 A 的退化对自动机，第 2 行初始化 w，第 3 行判断状态 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 与 ∞ 之间是否存在最短路径，若存在，输出最短字 w；若不存在，则该自动机不同步. 由于 A 的退化对自动机的状态数为 $(|Q|^2+|Q|)/2$，可以在 $O(|Q|^2)$ 时间内完成构造，按照算法 1 和算法 2 的复杂性的分析标准，算法 3 的时间复杂度为 $O(|Q|^2)$，且算法 3 得到的同步字长度远远低于由算法 1 和算法 2 得到的同步字长度.

5 三者的关系

本节主要讨论同步单演自动机、同步广义单演自动机、同步有界偏序自动机三者的关系，主要说明同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机同为单演自动机的真推广，且它们是具有不同的表达能力的自动机类.

下面首先给出广义单演自动机的定义. 令 ρ 是自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 上的一个同余关系. 若存在状态集 Q 上的偏序关系 $\leq$，使得 A 满足以下两个条件：

(1) 两个状态可比当且仅当它们同属 Q/ρ 中的一个子类；换言之，偏序关系 $\leq$（作为 $Q\times Q$ 的子集）包含在 ρ 中，且它在每一个子类上的限制是一个全序集；

(2) 任给 $\sigma\in\Sigma$，状态转换函数 $\delta(\_,\sigma):Q\to Q$ 保序，即对任意满足条件 $\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{q}$ 的状态 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 和输入字 w 都有 $\boldsymbol{p}w\leq\boldsymbol{q}w$，此时称自动机 A 为 ρ-单演的.

对于自动机 A，若存在一列从恒等同余 ρ_0 到泛同余 ρ_l 的严格单调递增同余链

$$\rho_0\subset\rho_1\subset\cdots\subset\rho_l$$

使得对每一个 $i=1,2,\cdots,l$，商自动机 A/ρ_{i-1} 是 ρ_i/ρ_{i-1}-单演的，就称 A 是 l 级广义单演的. 各级广义单演自动机统称为广义单演自动机. 下面引用 Volkov 在文献[37]中构造的例 1.1 来说明同步广义单演自动机的定义.

例 3. 令自动机 A 的状态集为 $Q=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$，输入字母表为 $\Sigma=\{\alpha,\beta\}$，状态转换图如图 9（此处状态转换图采用文献[37]中的表示方法，下同），则自动机 A 是 2 级广义单演自动机.

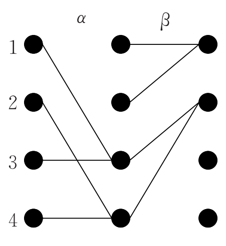


图 9 自动机 A

证明. 容易看出自动机 A 是同步的，并且字母 α 和 β 的作用与状态集上的 24 种线性序相矛盾，于是 A 不是单演自动机，考虑同余链

$$\rho_0\subset\rho_1\subset\rho_2,$$

ρ_1 将状态集 Q 划分为两个子类 Q_1 和 Q_2，其中

$$Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{2}\},\ Q_2=\{\mathbf{3},\mathbf{4}\},$$

并且定义 Q 上的偏序关系 $\leq_1$ 为 $\mathbf{1}\leq_1\mathbf{2}$，$\mathbf{3}\leq_1\mathbf{4}$，由此可知自动机 A 为 ρ_1/ρ_0-单演的，且构成的商自动机 A/ρ_1 如图 10 所示. 若定义 Q/ρ_1 上的偏序关系 $\leq_2$ 为 $Q_1\leq_2 Q_2$，此时字母 α 和 β 都保序，则自动机 A/ρ_1 是 ρ_2/ρ_1-单演的，于是自动机 A 是 2 级广义单演自动机. 证毕.

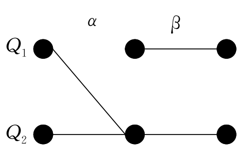


图 10 商自动机 A/ρ_1

由广义单演自动机和有界偏序自动机的定义容易得到以下结论.

命题 1. （同步）单演自动机既是（同步）广义单演自动机，也是（同步）有界偏序自动机.

上述命题 1 说明同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机同为单演自动机的推广，因此有必要对这两者的关系进行讨论. 对于同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机，有以下的定理成立.

定理 2. 同步有界偏序自动机是与同步广义单演自动机表达能力不相容的一类自动机.

对定理 2 的说明主要分为以下两点：

(1) 同步有界偏序自动机不能定义为同步广义单演自动机（简称：正向不可定义）；

(2) 同步广义单演自动机不能定义为同步有界偏序自动机（简称：逆向不可定义）.

5.1 正向不可定义

命题 2. 设 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 是有界偏序自动机，状态集 Q 上的偏序关系为 $\leq$，若存在互不相同的两个状态 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{q}_1$ 以及某个输入字母 σ，使得

$$\boldsymbol{p}_1\sigma=\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_1\sigma=\boldsymbol{p}_1 \tag{6}$$

则自动机 A 不能定义为广义单演自动机.

证明. 由于式(6)与单演自动机的保序性相违背，因此 A 必不能定义为单演自动机.

下面证明 A 在任何严格增的同余链的作用之下都不能定义为广义单演自动机. 利用反证法，假设存在一条可以将 A 定义为广义单演自动机的同余链，记为

$$\rho_0\subset\rho_1\subset\cdots\subset\rho_l,$$

其中 ρ_0 是等价关系，ρ_l 是泛关系. 则 A 在经过该条同余链的作用之后必能构成一个单演自动机且每一级构成的商自动机 A/ρ_{i-1} 是 ρ_i/ρ_{i-1}-单演的. 现在讨论该同余链对 A 的作用：

首先，已知 ρ_1 是 Q 的一个分类，对于状态 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_1$，若 $(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1)\in\rho_1$，则任给偏序关系 $\leq$，根据 ρ-单演的定义，必有

$$\boldsymbol{p}_1\leq\boldsymbol{q}_1\text{ 或 }\boldsymbol{q}_1\leq\boldsymbol{p}_1$$

成立，则由式(6)可知，对于输入字母 σ，函数 $\delta(\_,\sigma):Q\to Q$ 不保序，而这与自动机 ρ-单演的定义相矛盾，故 $(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1)\notin\rho_1$，于是必存在

$$[\boldsymbol{p}_1]_{\rho_1},\ [\boldsymbol{q}_1]_{\rho_1}\in Q/\rho_1,$$

此时自动机 A 为 ρ_1/ρ_0-单演的. 现在记

$$\boldsymbol{p}_2=[\boldsymbol{p}_1]_{\rho_1},\ \boldsymbol{q}_2=[\boldsymbol{q}_1]_{\rho_1},$$

并将 Q/ρ_1 中的其他子类也用类似的方式进行标记，

则根据式(6)以及同余关系 ρ_1 可得

$$\boldsymbol{p}_2\sigma=\boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{q}_2\sigma=\boldsymbol{p}_2 \tag{7}$$

由此可知自动机 A 在同余关系 ρ_4 1之下构成的商自动机 A/ρ_1 不能定义为单演自动机.

其次,考虑 ρ_2,此时 ρ_2 是自动机 A/ρ_1 的状态集 Q/ρ_1 的一个分类,同理可得,$(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{q}_2)\notin\rho_2$,于是必有

$$[\boldsymbol{p}_2]_{\rho_2},\ [\boldsymbol{q}_2]_{\rho_2}\in Q/\rho_2,$$

且自动机 A/ρ_1 为 ρ_2/ρ_1-单演的. 又记

$$\boldsymbol{p}_3=[\boldsymbol{p}_2]_{\rho_2},\ \boldsymbol{q}_3=[\boldsymbol{q}_2]_{\rho_2},$$

并将 Q/ρ_2 中的其他子类也用类似的方式进行标记,则根据式(7)以及同余关系 ρ_2 可得

$$\boldsymbol{p}_3\sigma=\boldsymbol{q}_3,\ \boldsymbol{q}_3\sigma=\boldsymbol{p}_3,$$

由此可知自动机 A/ρ_1 在同余关系 ρ_2 之下构成的商自动机 A/ρ_2 也不能定义为单演自动机.

以此类推,由于自动机 A/ρ_{l-2} 不能定义为单演自动机,于是考虑 ρ_{l-1},此时 ρ_{l-1} 是自动机 A/ρ_{l-2} 的状态集 Q/ρ_{l-2} 的一个分类,并且状态 $\boldsymbol{p}_{l-1},\boldsymbol{q}_{l-1}$ 包含在状态集 Q/ρ_{l-2} 中,另外,对于输入字母 σ,由前面的分析可知

$$\boldsymbol{p}_{l-1}\sigma=\boldsymbol{q}_{l-1},\ \boldsymbol{q}_{l-1}\sigma=\boldsymbol{p}_{l-1} \tag{8}$$

若$(\boldsymbol{p}_{l-1},\boldsymbol{q}_{l-1})\in\rho_{l-1}$,则任给偏序关系$\leq$,根据 ρ-单演的定义,必有

$$\boldsymbol{p}_{l-1}\leq\boldsymbol{q}_{l-1}\text{ 或 }\boldsymbol{q}_{l-1}\leq\boldsymbol{p}_{l-1}$$

成立,此时由式(8)可知,对于输入字母σ,函数$\delta(_,\sigma)$:$Q/\rho_{l-2}\rightarrow Q/\rho_{l-2}$不保序,这与自动机 ρ-单演的定义相矛盾,故$(\boldsymbol{p}_{l-1},\boldsymbol{q}_{l-1})\notin\rho_{l-1}$,于是有

$$[\boldsymbol{p}_{l-1}]_{\rho_1},\ [\boldsymbol{q}_{l-1}]_{\rho_{l-1}}\in Q/\rho_{l-1},$$

且自动机 A/ρ_{l-2} 为 ρ_{l-1}/ρ_{l-2}-单演的. 现在记

$$\boldsymbol{p}_l=[\boldsymbol{p}_{l-1}]_{\rho_{l-1}},\ \boldsymbol{q}_l=[\boldsymbol{q}_{l-1}]_{\rho_{l-1}},$$

并将 Q/ρ_{l-1} 中的其他子类也用类似的方式进行标记,则根据式(8)以及同余关系 ρ_{l-1} 可得

$$\boldsymbol{p}_l\sigma=\boldsymbol{q}_l,\ \boldsymbol{q}_l\sigma=\boldsymbol{p}_l \tag{9}$$

将自动机 A/ρ_{l-2} 在同余关系 ρ_{l-1} 之下构成的商自动机记为 A/ρ_{l-1}.

最后,考虑 ρ_l 是泛关系,由式(9)可知不存在任何偏序关系可以使得状态转换函数

$$\delta(\_,\sigma):Q/\rho_{l-1}\rightarrow Q/\rho_{l-1}$$

保序,因此自动机 A/ρ_{l-1} 不能定义成单演自动机,与假设相矛盾!

综上,有界偏序自动机 A 不能够定义成广义单演自动机. 证毕.

下面的命题3说明满足命题2条件的有界偏序自动机是存在的.

命题3. 设 $A_1=(Q,\Sigma,\delta)$ 为同步有界偏序自动机,字母表为 $\Sigma=\{\alpha,\beta\}$,状态集为

$$Q=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8},\mathbf{9}\},$$

状态集在偏序关系$\leq$之下的 Hasse 图如图11,转换函数 $\delta:Q\times\Sigma\rightarrow Q$ 如图12,则 A_1 不能定义为同步广义单演自动机.

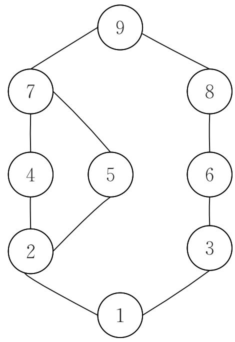


图11 状态集的 Hasse 图

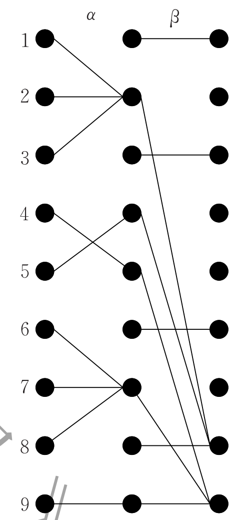


图12 同步有界偏序自动机 A_1

不难验证,自动机 A_1 是同步的,且 $\alpha\beta\alpha\beta$ 是它的一个同步字. 一方面,A_1 满足同步有界偏序自动机的定义,另一方面,存在状态 **4** 和 **5**,以及字母 α 使得:

$$\mathbf{4}\alpha=5,\ \mathbf{5}\alpha=4.$$

从而由命题2可知,自动机 A_1 不能定义为同步广义单演自动机.

5.2 逆向不可定义

5.2.1 最小元定义方法

有界偏序自动机的显著特征在于其状态集关于某个偏序关系存在最大元和最小元,因此,若能给同步广义单演自动机的状态集补充定义适当的偏序关系,使其状态转换函数保序且关于该偏序关系存在最大元和最小元,就说明可以将广义单演自动机定义为有界偏序自动机. 本节主要说明广义单演自动机不能通过补充定义偏序关系的方式转化为有界偏

序自动机，下面首先说明补充定义定义偏序关系的方法：

不失一般性，此处仍采用上述例 3 来说明定义的方法，并且只对最小元的情形进行讨论，最大元的情形与之相类似.

根据有界偏序自动机最小元的定义可知，若状态 $\boldsymbol{p}$ 为有界偏序自动机 $A=(Q,\Sigma,\delta)$ 的最小元，则对于任意的状态 $\boldsymbol{q}$ 都有 $\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{q}$，且对于任意的输入字母 σ 有 $\boldsymbol{p}\sigma\leq\boldsymbol{q}\sigma$. 现在基于例 3 中广义单演自动机 A 的状态转换函数，补充定义状态集上的偏序关系$\leq_1$如下：

$$\mathbf{1}\leq_1\mathbf{2},\ \mathbf{1}\leq_1\mathbf{3},\ \mathbf{1}\leq_1\mathbf{4},$$

则对于字母 $\alpha,\beta\in\Sigma$，有

$$\mathbf{1}\alpha\leq_1\mathbf{2}\alpha,\ \mathbf{1}\alpha\leq_1\mathbf{3}\alpha,\ \mathbf{1}\alpha\leq_1\mathbf{4}\alpha,$$

$$\mathbf{1}\beta\leq_1\mathbf{2}\beta,\ \mathbf{1}\beta\leq_1\mathbf{3}\beta,\ \mathbf{1}\beta\leq_1\mathbf{4}\beta,$$

显然，状态 **1** 满足最小元的定义. 事实上，若定义偏序关系$\leq_1$为

$$\mathbf{1}\leq_1\mathbf{2},\ \mathbf{1}\leq_1\mathbf{3},\ \mathbf{1}\leq_1\mathbf{4},\ \mathbf{2}\leq_1\mathbf{4},$$

则可以将自动机 A 定义为有界偏序自动机，且其最小元和最大元分别为 **1** 和 **4**.

5.2.2　实例论证

由 5.2.1 节的分析看出，通过定义恰当的偏序关系可以使得广义单演自动机存在最小元. 然而并非所有同步广义单演自动机都可以通过类似的方式将其定义为同步有界偏序自动机，以下的命题 4 说明了这一事实.

命题 4.　设 $A_2=(Q,\Sigma,\delta)$是一个自动机，输入字母表为 $\Sigma=\{\alpha,\beta\}$，状态集为

$$Q=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8}\},$$

转换函数如图 13 所示，则自动机 A_2不能被定义为有界偏序自动机.

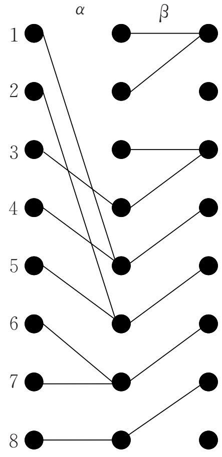


图 13　自动机 A_2

首先说明自动机 A_2不是同步单演自动机. 不难验证，自动机 A_2是同步的，且 $\alpha\beta\beta\beta\beta\beta$ 是其一个同步字. 又由于字母 α 和 β 的作用与状态集 Q 上的 40 320 种线性序相违背[(1)]，因此，自动机 A_2不是同步单演自动机.

现在证明自动机 A_2是同步广义单演自动机. 根据广义单演自动机的定义，考虑严格增的同余链

$$\rho_0\subset\rho_1\subset\rho_2,$$

其中 ρ_0是等价关系，ρ_2是泛关系，ρ_1是状态集 Q 的分类，通过验证可知[(2)]，ρ_1对状态集 Q 的分类情况以及在相应分类的子类上定义的偏序关系的情况分别如下：

(I) ρ_1对 Q 的分类仅有以下两种情形：

(1) $Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$，$Q_2=\{\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7}\}$，$Q_3=\{\mathbf{8}\}$；

(2) $Q_1'=\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$，$Q_2'=\{\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8}\}$.

(II) 对应于 Q 的上述两种分类，每种分类的每个子类上能够定义的偏序关系如下：

(1) 第一种分类的每个子类上能够定义的偏序关系$\leq_1$仅有以下两种情形：

① $\mathbf{1}\leq_1\mathbf{2}$，$\mathbf{3}\leq_1\mathbf{4}\leq_1\mathbf{5}\leq_1\mathbf{6}\leq_1\mathbf{7}$；

② $\mathbf{2}\leq_1\mathbf{1}$，$\mathbf{7}\leq_1\mathbf{6}\leq_1\mathbf{5}\leq_1\mathbf{4}\leq_1\mathbf{3}$.

(2) 第二种分类的每个子类上能够定义的偏序关系$\leq_1'$仅有以下两种情形：

③ $\mathbf{1}\leq_1'\mathbf{2}$，$\mathbf{3}\leq_1'\mathbf{4}\leq_1'\mathbf{5}\leq_1'\mathbf{6}\leq_1'\mathbf{7}\leq_1'\mathbf{8}$；

④ $\mathbf{2}\leq_1'\mathbf{1}$，$\mathbf{8}\leq_1'\mathbf{7}\leq_1'\mathbf{6}\leq_1'\mathbf{5}\leq_1'\mathbf{4}\leq_1'\mathbf{3}$.

首先说明论断(I)成立：

ρ_1对 Q 的分类必须满足 ρ_1/ρ_0-单演的条件，回顾自动机 ρ-单演的定义，具体的有：

(a) Q 在 ρ_1之下的每一个子类关于偏序关系构成一条链；

(b) 任给输入字母 σ，转换函数 $\delta(\_,\sigma):Q\rightarrow Q$ 保持(a)中的偏序关系；

基于以上两个条件，通过验证所有的分类方式，最终得到了(I)中的分类方式，这里举例说明其它分类不可行的原因：假设状态 **1** 和 **3** 可以在 ρ_1的作用下归为一类，即 Q 存在子类 $Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$，由于 ρ_1是同余关系，则 Q 必存在另一个至少包含状态 **4** 和 **5** 的子类，假定为 $Q_2=\{\mathbf{4},\mathbf{5}\}$，此时有

$$Q_2\beta=Q_1,\ Q_2\beta=Q_2,$$

显然，以这种分类方式构成的商自动机 A_2/ρ_1与完全确定自动机的确定性相矛盾，因此 Q 不存在 $Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$的子类. 同理，可以考虑其余分类的情形，并且得出与此相同的结论.

需要特别指出的是，存在一个分类 ρ_1'可将 Q 分

为以下三个类：

$$Q_1=\{\mathbf{1,3,4,5,6,7}\},\ Q_2=\{\mathbf{2}\},\ Q_3=\{\mathbf{8}\},$$

使得自动机 A_2/ρ_1 满足确定性，但容易验证字母表上字母的作用与 Q_1 上的 720 种线性序相违背[3]，因此这一种分类方式不能够使得自动机 A_2 满足 ρ_1/ρ_0-单演的条件(b)，与这一情况类似的还有以下两种情形：

(1) $Q_1=\{\mathbf{1,3,4,5,6,7,8}\}$，$Q_2=\{\mathbf{2}\}$；

(2) $Q_1=\{\mathbf{1,2,3,4,5,6,7}\}$，$Q_2=\{\mathbf{8}\}$.

综上，通过对 Q 上所有的分类方式进行讨论得出论断(I)成立.

接下来说明论断(II)成立：

首先讨论在第一种分类下定义偏序关系的情况，通过验证，所有字母的作用与 $Q_2=\{\mathbf{3,4,5,6,7}\}$ 上的 120 种线性序中的 118 种相违背[4]，仅在以下两种情形时成立：

(1) $\mathbf{3}\le_1\mathbf{4}\le_1\mathbf{5}\le_1\mathbf{6}\le_1\mathbf{7}$；

(2) $\mathbf{7}\le_1\mathbf{6}\le_1\mathbf{5}\le_1\mathbf{4}\le_1\mathbf{3}$.

相应地，Q_1 上的偏序关系分别定义为

$$\mathbf{1}\le_1\mathbf{2},\ \mathbf{2}\le_1\mathbf{1}.$$

由此可知，论断(II)中的(1)成立.

同理可知，论断论断(II)中的(2)也成立.

至此，自动机 A_2 在 ρ_1 的作用下满足 ρ_1/ρ_0-单演的条件，构成的商自动机记为 A_2/ρ_1.

现在考虑根据分类情况(1)构成的自动机 A_2/ρ_1，其状态为

$$Q/\rho_1=\{Q_1,Q_2,Q_3\},$$

若要使自动机 A_2/ρ_1 在 ρ_2 的作用之下是 ρ_2/ρ_1-单演的，则在 Q/ρ_1 上定义的偏序关系 $\le_2$ 仅为以下两种情况：

(1) $Q_1\le_2 Q_2\le_2 Q_3$；

(2) $Q_3\le_2 Q_2\le_2 Q_1$；

若非如此，将导致字母 α,β 的作用与 Q_1,Q_2,Q_3 的线性序相违背[5]，从而导致自动机 A_2/ρ_1 不满足 ρ_2/ρ_1-单演的条件.

综上，自动机 A_2 转换成的同步广义单演自动机 A'_2，如图 14 所示，容易论证，根据上述分类情况(2)分析，自动机 A_2 能够定义成的另一种形式的同步广义单演自动机 A''_2，如图 15 所示.

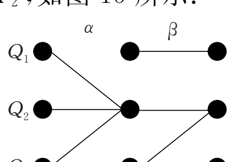


图 14　广义单演自动机 A'_2

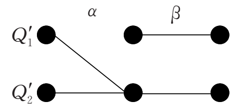


图 15　广义单演自动机 A''_2

通过 5.2.1 节的定义方法得出，不存在任何偏序关系能够使得同步广义单演自动机 A_2 具有最小元，从而说明了同步广义单演自动机不能定义为同步有界偏序自动机.

综合 5.1 节和 5.2 节的结论最终得出，同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机是两种表达能力互不相容的自动机.

同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机同为偏序自动机的特殊形式且为单演自动机的推广，如果能够从同步单演自动机这一类最为特殊的偏序自动机出发，推广同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机中的任何一类自动机直至离散序的情形，Černý 猜想便可得到彻底证明，因此，同步有界偏序自动机与同步广义单演自动机的不同无疑是为 Černý 猜想的证明提供了另一种途径.

6　结　论

本文考虑了偏序自动机一类特殊情形，定义了有界偏序自动机，主要贡献在于：(1) 证明了 n-状态有界偏序自动机最短同步字的长度为 $n-1$，此结论意味着对于这一类特殊的偏序自动机，Černý 猜想是成立的；(2) 由于有限格(特别是链)必是有界偏序，所以作为主要结果的推论，得出 n-状态同步格序自动机(同步单演自动机)的最短同步字的长度也是 $n-1$；(3) 给出了同步有界偏序自动机的同步性检测及同步字查找算法；(4) 考虑了同步单演、广义单演、有界偏序自动机三者的关系，基于同步广义单演自动机和同步有界偏序自动机同为同步单演自动机的推广这一事实，讨论了同步有界偏序自动机和同步广义单演自动机的关系，构造了具体的例子说明同步有界偏序自动机是与同步广义单演自动机表达能力不相容的一类自动机.

致　谢　在此，我们向为本文的工作给予支持和提出宝贵建议的各位评审专家、编辑表示衷心感谢！

参　考　文　献

[1] Černý J. Poznámka k homogénnym eksperimentom s konečnými

automatami. Matematicko-fyzikálny Časopis Slovenskej Akadémie Vied, 1964, 14(3): 208-215

[2] Hennie F C. Fault detecting experiments for sequential circuits//Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. New Jersey, USA, 1964: 95-110

[3] Natarajan B. An algorithmic approach to the automated design of parts orienters//Proceedings of the Symposium on Foundations Computer Science. Toronto, Canada, 1986: 132-142

[4] Natarajan B. Some paradigms for the automated design of part feeders. International Journal of Robotics Research, 1989, 8(6): 89-109

[5] Eppstein D. Reset sequences for monotonic automata. SIAM Journal on Computing, 1990, 19(3): 500-510

[6] Kohavi Z. Switching and Finite Automata Theory. New York, USA: McGray-Hill, 1970

[7] Cho H, Jeong S, Somenzi F. Synchronizing sequences and symbolic traversal techniques in test generation. Journal of Electronic Testing, 1993, 4(1): 19-31

[8] Boppana V, Rajan S, Takayama K. Model checking based on sequential ATPG. Lecture Notes in Computer Science, 1999, 2586: 418-430

[9] Krishnaswamy S, Plaza S M, Markov I L. Signature-based SER analysis and design of logic circuits. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2009, 28(1): 74-86

[10] Kochte M A, Wunderlich H. SAT-based fault coverage evaluation in the presence of unknown values//Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition. Grenoble, France, 2011: 1-6

[11] Goemans O C, Goldberg K, Stappen A F V D. Blades for feeding 3D parts on vibratory tracks. Assembly Automation, 2006, 23(3): 221-226

[12] Toh C K, Ng S L J, Tan Y O. Three dimensional adjustable cavity for flexible singulation of multiple medications in an automated medication dispenser//Proceedings of the IEEE International Conference on Automation Science and Engineering. Seoul, South Korea, 2012: 347-352

[13] Becker A, Bretl T. Approximate steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control. IEEE Transactions on Robotics, 2012, 28(3): 580-591

[14] Goldberg K. Orienting polygonal parts without sensors. Algorithmica, 1993, 10(2-4): 201-225

[15] Wiegley J, Goldberg K, Peshkin M. A complete algorithm for designing passive fences to orient parts. Assembly Automation, 1997, 17(2): 129-136

[16] Lee D, Yannakakis M. Principles and methods of testing finite state machines — A survey. Proceedings of the IEEE, 1996, 8(84): 1090-1123

[17] Benenson Y, Elizur T P, Adar R. Programmable and autonomous computing machine made of biomolecules. Nature, 2001, 414(1): 430-434

[18] Benenson Y, Adar R, Paz-Elizur T. DNA molecule provides a computing machine with both data and fuel. Proceedings of the National Academy of Science of the USA, 2003, 100(5): 2191-2196

[19] Higgins P M. The range order of a product of i transformations from a finite full transformation semigroup. Semigroup Forum, 1988, 37(1): 31-36

[20] Roman A. New algorithms for finding short reset sequences in synchronizing automata//Proceedings of the International Enformatika Conference. Prague, Czech Republic, 2005: 13-17

[21] Martyugin P. Complexity of problems concerning reset words for cyclic and Eulerian automata. Theoretical Computer Science, 2012, 450(7): 3-9

[22] Vorel V. Complexity of a problem concerning reset words for Eulerian binary automata. Information and Computation, 2017, 253: 497-509

[23] Kisielewicz A, Kowalski J, Szykula M. Computing the shortest reset words of synchronizing automata. Journal of Combinatorial Optimization, 2015, 29(1): 88-124

[24] Pin J E. On two combinatorial problems arising from automata theory. Annals of Discrete Mathematics, 1983, 17: 535-548

[25] Berlinkov M V, Szykula M. Algebraic synchronization criterion and computing reset words. Information Sciences, 2016, 369: 718-730

[26] Dubuc L. Sur les automates circulaires et la conjecture de Černý. RAIRO — Theoretical Informatics and Applications, 1998, 32(1): 21-34

[27] Kari J. Synchronising finite automata on Eulerian digraphs. Theoretical Computer Science, 2003, 259(1-3): 223-232

[28] Berlinkov M. Synchronizing automata on quasi-Eulerian digraph. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7381: 90-100

[29] Trahtman A N. The Černý conjecture for aperiodic automata. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2007, 9(2): 3-10

[30] Almeida J, Magolis S, Steinberg B, Volkov M V. Representation theory of finite semigroups, semigroup radicals and formal language theory. Transactions of the American Mathematical Society, 2009, 361(3): 1429-1461

[31] Steinberg B. The Černý conjecture for one-cluster automata with prime length cycle. Theoretical Computer Science, 2011, 412(9): 5487-5491

[32] Ananichev D, Gusev V, Volkov M V. Slowly synchronizing automata and digraphs. Lecture Notes in Computer Science, 2010, 6281: 55-65

[33] Rampersad N, Shallit J, Xu Z. The computational complexity of universality problems for prefixes, suffixes, factors, and subwords of regular languages. Fundamenta Informaticae, 2012, 116(1-4): 223-236

[34] Volkov M V. Synchronizing automata and the Černý Conjecture. Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5196: 11-27

[35] Henckell K, Pin J E. Ordered Monoids and J-Trivial Monoids//Proceedings of the International conference on Algorithmic Problems in Groups and Semigroups. Lincoln, USA, 1999: 121—137.

[36] Ananichev D S, Volkov M V. Synchronizing monotonic automata. Theoretical Computer Science, 2004, 327(3): 225-239

[37] Ananichev D S, Volkov M V. Synchronizing generalized monotonic automata. Theoretical Computer Science, 2005, 330(1): 3-13.

[38] Volkov M V. Synchronizing automata preserving a chain of partial orders. Theoretical Computer Science, 2009, 410(37): 3513

[39] Grätzer, G. Lattice Theory: Foundation. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2011

附录 1.　命题 4 中相关结论验证方法说明.

结论(1)验证方法说明：

为了考虑状态集 Q 上的所有的线性序，我们首先生成状态集 Q 中状态的全排列，共 40 320 种，并按照排列中状态从左至右的顺序定义偏序关系 $\leq$，即任给 Q 的一个排列，如 **45678123**，该排列构成的线性序定义为

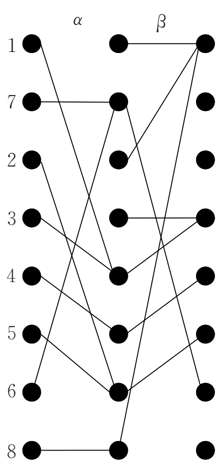
$$\mathbf{4}\leq\mathbf{5}\leq\mathbf{6}\leq\mathbf{7}\leq\mathbf{8}\leq\mathbf{1}\leq\mathbf{2}\leq\mathbf{3}.$$

据此，要验证字母 α 和 β 的作用是否与状态集 Q 上的线性相违背实质上只需要确定状态转换图(为讨论方便，下述的状态转换图均以图 9 的形式给出)中状态之间的连接线是否有交叉，若有交叉，则字母的作用与该种线性序相违背，若无交叉，则说明字母的作用满足状态集的线性序. 特别的，在验证的过程中，我们除去对称的情形(即若排列 **12345678** 构成的状态转换图的连接线之间有交叉，则排列 **87654321** 构成的状态转换图的连接线之间也必定有交叉)，因此，我们只考虑 Q 上的 20 160 种排列. 下面举例说明验证方法：

对于排列 **17234568** 构成的线性序为

$$\mathbf{1}\leq\mathbf{7}\leq\mathbf{2}\leq\mathbf{3}\leq\mathbf{4}\leq\mathbf{5}\leq\mathbf{6}\leq\mathbf{8},$$

在此情形下的状态转换如附图 1 所示. 可见，在该种情形之下，字母 α 的作用与状态集 Q 上的线性序相违背.



附图 1　状态转换图

事实上，在实验过程中，我们并不需要对所有的 20 160 种线性序都进行验证，由上面的例子我们可以看出，在字母 α 的作用下，以状态 **17** 开头的所有排列(共 720 种)必定不满足线性序，这很大程度上减少了计算量，与此种排列类似的还有以 **18**(关于字母 α)，**23**(关于字母 β)，…，**27**(关于字母 α)等开头的排列均不满足线性序. 我们可以用类似的方法得出结论(3)、结论(4)以及结论(5).

结论(2)验证方法说明：

理论上，若要验证结论(2)则必须穷举状态集 Q 的所有分类情况，接着判定每一个分类确定的等价关系 ρ 能否使商自动机 Q/ρ_1 满足 ρ-单演的定义. 但在实验过程中，由于分类方式是指数级别的，因此这样的方式几乎不可行. 毫无疑问，状态集的一个子集对应了 Q 的若干个分类，Q 的所有子集对应的所有分类的并就构成了 Q 的所有分类. 因此，我们考虑 Q 的每个子集对应的所有分类所确定的同余关系 ρ_1(不失一般性，此处同余关系统一使用 ρ_1 标记)能否使得商自动机 A_2/ρ_1 满足 ρ-单演的性质，若满足，则说明 ρ_1 确定的分类方式可行. 考察 Q 的所有子集. 对于自动机 A_2 的状态集，Q 的 $k(k\leq 8)$ 状态子集及 k 状态子集的个数分别为 8 状态子集 1 个、7 状态子集 8 个、6 状态子集 28 个、5 状态子集 56 个、4 状态子集 70 个、3 状态子集 56 个、2 状态子集 28 个、1 状态子集 8 个.

我们任取这些子集中的一个对结论(2)的验证方法进行说明：考虑 Q 的子集 $Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$，即考虑 Q 的存在子类为 $\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$ 的所有分类. 根据 ρ-单演的定义，ρ_1 必为同余关系，则在所有包含子类 $\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$ 的所有分类中必定存在另一个至少包含状态 **4** 和 **5** 的子类，假定为 $Q_2=\{\mathbf{4},\mathbf{5}\}$，此时必有 $Q_2\beta=Q_1$，$Q_2\beta=Q_2$. 显然，以这种分类方式构成的商自动机 A_2/ρ_1 与自动机的确定性相矛盾，因此 Q 不存在 $Q_1=\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$ 的子类. 即所有以 $\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$ 为子类的分类确定的等价关系 ρ_1 都不能使得商自动机 A_2/ρ_1 满足 ρ-单演的定义. 同理，可以利用此方法对其余子集的情形进行验证. 最后将剩余满足条件的子集中两两不相交且并集为 Q 的子集组合成商自动机 A_2/ρ_1 的状态即可.

CUI Zhen-He, born in 1992, M. S. candidate. His research interests focus on automata theory.

HE Yong, born in 1970, Ph. D., professor. His research interests include Formal language and automata theory.

SUN Shi-Yuan, born in 1995, bachelor. His research interests focus on automata theory.

Background

A synchronizing word of a (deterministic finite state) automaton is a word which can brings all states to a single state. The automata having a synchronizing word are called automata. In 1964, Černý conjectured that each n-state synchronizing automaton possesses a synchronizing word of length at most $(n-1)^2$. Such a conjecture currently known as Černý Conjecture has not yet been proved or disproved, and has become one of the main topics in the theoretical researches on synchronizing automata. Some special classes of automata, such as circular automaton, aperiodic automaton, Eulerian automaton, monotonic automaton and generalized monotonic automaton, has been proved to satisfy Černý Conjecture.

Partially ordered automata are the automata whose state set are equipped with a partial order relation that compatible to the input letters. Monotonic automaton, generalized monotonic automaton and weakly monotonic automaton are partially ordered automata. Since each automaton may be dealt with a discrete ordered automaton, Černý Conjecture is true if and only if it is true for partially ordered automata. It has been shown that monotonic automaton, generalized monotonic automaton and strongly connected weakly monotonic automaton satisfy Černý Conjecture.

As a kind of natural generalization of monotonic automata, we define the bounded partially ordered automaton. It is shown that bounded partially ordered automata satisfy Černý Conjecture. As an immediate consequence, lattice ordered automata also satisfy Černý Conjecture. Furthermore, we propose an algorithm for checking the synchronization and finding a shortest synchronizing word of a given bounded partially ordered automata. Finally, some examples are designed to illustrate that the notion of a synchronizing bounded partially ordered automaton is a generalization of a synchronizing monotonic automaton distinct to that of a synchronizing generalized monotonic automaton.

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 61572013), and the Hunan Provincial Innovation Foundation for Postgraduate (CX2015B509).