

一类新的正交矩-Franklin 矩及其图像表达

陈 伟¹⁾ 蔡占川²⁾ 齐东旭²⁾

¹⁾(江南大学数字媒体学院 江苏 无锡 214122)

²⁾(澳门科技大学资讯科技学院 澳门)

摘 要 该文定义了一类以 Franklin 函数为核的正交矩,称之为 Franklin 矩. Franklin 函数是一类完备正交一次样条函数系. 传统的 Legendre 矩、Zernike 矩等多项式矩,由于涉及高次多项式的计算,往往会导致计算不稳定,特征空间维数扩展受到制约. Franklin 函数是正交的,相应的矩函数可以使得图像分解后的信息具有独立性,没有信息的冗余. 而且, Franklin 函数仅由一次分段多项式组成,在计算过程中,避免了高次多项式的计算,兼具复杂度低、数值稳定的优点. 通过对图像的重构实验表明, Franklin 矩比传统正交多项式矩具有更好的特征表达能力.

关键词 Franklin 函数; 正交矩; 样条; 图像重构

中图法分类号 TP391 DOI号 10.11897/SP.J.1016.2015.01140

Orthogonal Franklin Moments and Its Application for Image Representation

CHEN Wei¹⁾ CAI Zhan-Chuan²⁾ QI Dong-Xu²⁾

¹⁾(School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122)

²⁾(Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macau)

Abstract A set of novel orthogonal moments named as Franklin moments is proposed in this paper. The kernel functions of Franklin moments are Franklin functions which composed of a class of complete orthogonal splines function system of degree one. For digital images, the traditional polynomial moments such as Legendre moments and Zernike Moments could cause numerical approximation error because of the calculation for high order polynomials. In contrast, Franklin function system is composed of a series of orthogonal piecewise polynomials of degree one. Therefore, it provides possibility of avoiding calculating high order polynomials, and thus the exact values of Franklin moments can be obtained directly with smaller calculation effort. Experimental results show that images reconstructed from Franklin moments have lower error than that of the conventional orthogonal polynomial moments.

Keywords Franklin functions; orthogonal moments; spline; image reconstruction

1 引 言

矩的定义和研究有着深刻的数学和物理背景,

Hu^[1]于 1962 年首先将其引入到图像处理领域中. 作为最常用的基于区域的形状描述子之一,矩已经被广泛应用于图像分析^[2-3]、模式识别^[4-5]、纹理分类^[6]、目标检索^[7-8]等领域.

收稿日期:2014-01-06;最终修改稿收到日期:2014-12-03. 本课题得到国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2011CB302400)、国家自然科学基金(61272026,61170320)、澳门科技发展基金项目(084/2012/A3)、浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题资助项目(A1513)及中央高校基本科研业务费(JUSRP11416)资助. 陈 伟,男,1986 年生,博士,讲师,中国计算机学会(CCF)会员,主要研究方向为计算机图形学、数字图像处理. E-mail: wchen_jdsm@163.com. 蔡占川,男,1974 年生,博士,副教授,主要研究方向为计算机图形学、月球数据处理. 齐东旭,男,1940 年生,教授,主要研究领域为计算机图形学、数值逼近.

矩理论提供了有用的级数展开方式来表达目标形状. 不失一般性, 假设尺寸为 $N \times N$ 的数字图像 $f(x, y)$, 定义域为 $S = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y)$ 表示各像素的灰度值, (x, y) 表示像素坐标. 基于核函数 (也称为基函数) $\psi_{pq}(x, y)$, 该图像的 $p+q$ 阶矩定义为

$$M_{pq} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \psi_{pq}(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

从数学的观点看, 矩是图像 $f(x, y)$ 在核函数集 $\{\psi_{pq}(x, y)\}$ 上的投影, 不同的核函数集可建立不同的矩^[9].

对于几何矩, 其核函数是单项式集 $\{x^p y^q\}$, 因为单项式集不是正交系, 几何矩具有对噪声敏感、数值变化幅度大、信息冗余等缺点. 为了克服这些弱点, Teague^[2] 首先提出了在正交多项式的基础上建立正交矩的思想. 受这个思想的启发, 出现了 Legendre 矩、Zernike 矩等无冗余信息的正交矩. 对于 Legendre 矩, p 阶 Legendre 多项式的表达式为 $L_p(x) =$

$$\sum_{k=0}^p \left\{ (-1)^{\frac{p-k}{2}} \frac{1}{2^p} \frac{(p+k)! x^k}{\left(\frac{p-k}{2}\right)! \left(\frac{p+k}{2}\right)! k!} \right\}_{p-k=\text{even}}; \text{ 对}$$

于 Zernike 矩, p 阶 q 重的径向 Zernike 多项式定义为 $R_{pq}(x) = \sum_{i=0}^{(p-|q|)/2} \frac{(-1)^i (p-i)! x^{p-2i}}{i! \left(\frac{p+|q|}{2} - i\right)! \left(\frac{p+|q|}{2} - i\right)!}$.

此外, 还有伪 Zernike 矩^[3]、Chebyshev 矩^[9-10]、Laguerre 矩^[11] 等各种形式的矩. 它们的共同的特点是, 这些矩的核函数都是多项式. 在具体的计算中, 随着多项式阶的增长, 往往会出现数值不稳定、计算复杂度高等问题, 从而导致这些矩很难被精确计算得到. 在实际应用中, 式(1)中的双重积分一般通过数值积分方法逼近得到, 最简单且精度最低的方法是零阶逼近 (Zeroth-Order Approximation, ZOA). 为了提高计算精度, 许多学者提出了各种各样的逼近方法. Liao 和 Pawlak^[12] 在几何矩与 Legendre 矩的计算中提出了一种改进的逼近公式, 并被应用于 Zernike 矩的计算中^[13]; Pawlak 及其合作者^[14] 提出了在极坐标系下计算 Zernike 矩的方法; Kotoulas 和 Andreadis 等人^[15] 通过分段多项式插值来提高矩的精度; Lin 等人^[16] 通过数值优化技术来改进 Zernike 矩核函数的正交性及重构图像的质量.

为了避免连续多项式在离散化过程中带来的误差, 近年来, Mukundan 等人^[17-19] 提出了离散正交矩, 它们以 Tchebichef 多项式、Krawtchouk 多项式等离散型正交多项式作为核函数. 离散型多项式直

接定义在图像坐标空间, 计算时不需要作坐标转换. 然而, 与连续型多项式矩一样, 离散正交矩同样有复杂度高、很难精确计算等问题^[9, 19].

为了克服多项式矩的弱点, 在本文中, 我们基于一类正交样条函数系-Franklin 函数系, 定义了一种正交样条矩-Franklin 矩(FMs). Franklin 函数系是一类完备正交一次样条函数系^[20-21]. 这就意味着, 除了保持正交性外, Franklin 基函数将多项式的次数固定为一次. 因此, 它能够避免高阶多项式的计算, 在保持较低的计算复杂度的前提下, 能够得到 Franklin 矩的精确值.

本文第 2 节介绍 Franklin 函数的构造及其性质; 第 3 节定义 Franklin 矩, 并详细给出其精确计算公式的推导过程; 第 4 节利用 Franklin 矩对标准测试图像进行重构, 并与 Legendre 矩及 Zernike 矩的结果进行比较, 表明 Franklin 矩具有更好的图像表达能力; 最后总结全文.

2 Franklin 函数

2.1 Franklin 函数的构造

Franklin 函数是由 Philip Franklin 给出的一类定义在 $L^2[0, 1]$ 上的连续正交函数系^[22], 它是对一组线性无关的截断幂基经正交化过程得到的. 首先, 考虑如下的线性无关组 $\{\alpha_n(x), 0 \leq x \leq 1\}$:

$$\begin{cases} \alpha_0(x) = 1, \alpha_1(x) = x \\ \alpha_i(x) = (x - a_i)_+, \quad i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

其中, $a_i = (2i - 1 - 2^m) / 2^m$, m 为不超过 $2i - 1$ 的 2 的最高方幂指数. 这就是说, 区间 $[0, 1]$ 的剖分点依次为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$. 图 1(a) 显示了线性无关组前 9 项的函数图像.

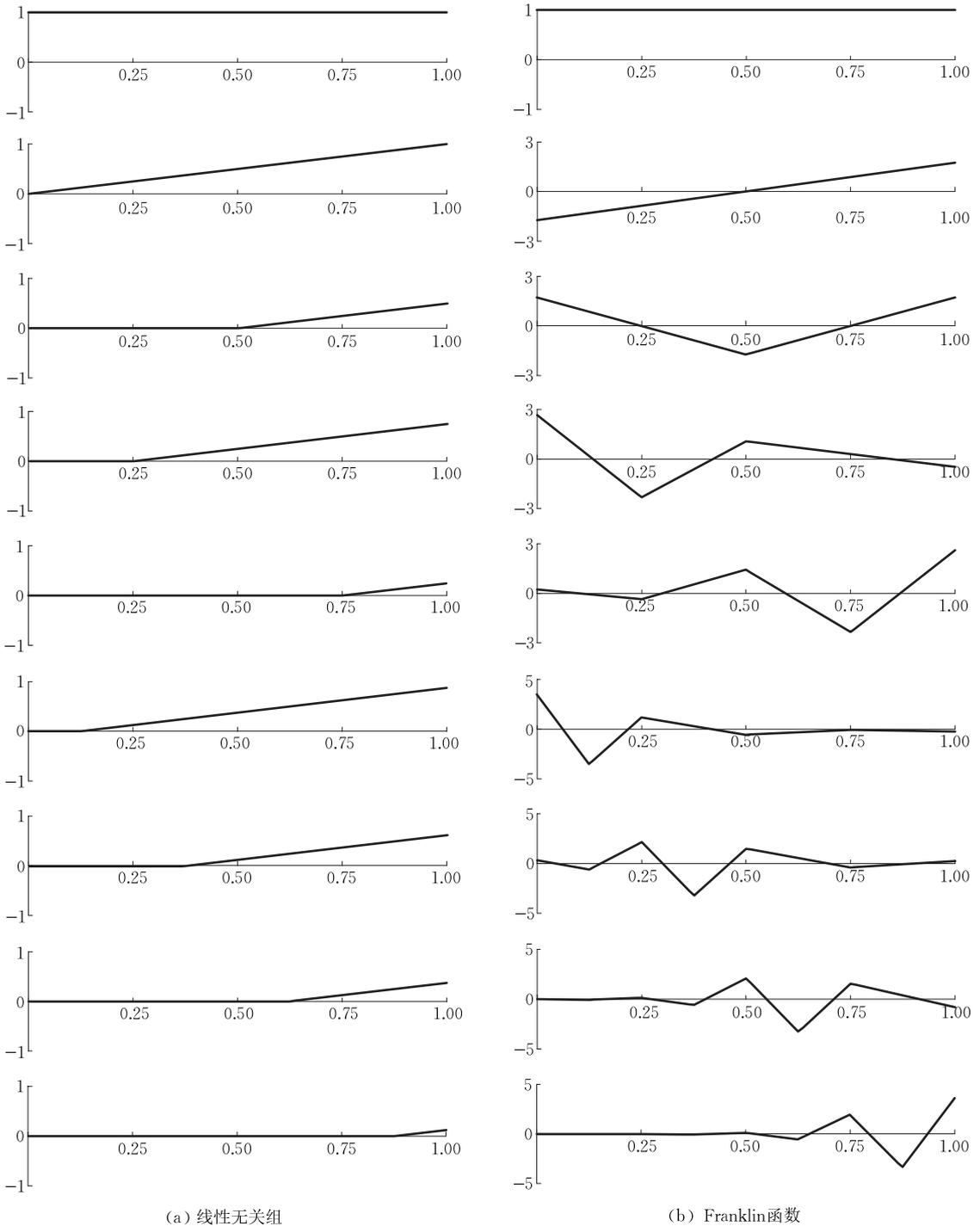
将上述线性无关组 $\{\alpha_n(x), 0 \leq x \leq 1\}$, 经过 Gram-Schmidt 正交化过程, 结果即为 Franklin 函数系, 记为 $\{\varphi_n(x)\}$. 限于篇幅, 这里只给出 Franklin 函数系的前 5 项基函数的表达式:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(1 - 4x), & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{3}(4x - 3), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases};$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{33}(5 - 38x)/11, & 0 \leq x < 1/4 \\ \sqrt{33}(26x - 11)/11, & 1/4 \leq x < 1/2; \\ \sqrt{33}(5 - 6x)/11, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



(a) 线性无关组

(b) Franklin函数

图 1 线性无关组与 Franklin 函数

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{231}(1 - 12x)/77, & 0 \leq x < 1/4 \\ \sqrt{231}(36x - 11)/77, & 1/4 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{231}(45 - 76x)/77, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ \sqrt{231}(100x - 87)/77, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases};$$

图 1(b) 显示了前 9 项 Franklin 基函数的图像.

2.2 Franklin 函数的性质

(1) 正交性

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 一致收敛性

设 $F(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 它的 Fourier-Franklin 级数为 $F \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$, $c_i = \langle F, \varphi_i \rangle = \int_0^1 F(x)\varphi_i(x)dx$. 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - S_n F\|_{\infty} = 0$$

其中, $S_n F$ 表示 Fourier-Franklin 级数的部分和 $S_n F = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(x)$.

(3) 再生性

设 $F(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的一次样条函数, 节点位置为 $x = \frac{q}{2^r}$ (q, r 是整数). 那么, $F(x)$ 可以用有限项 Franklin 函数精确重构.

图 2 显示了用不同项数的 Franklin 函数对某个折线函数(图中虚线所示, 32 段)进行正交重构的结果, 当重构项数达到 33 项时, 实现了对原折现函

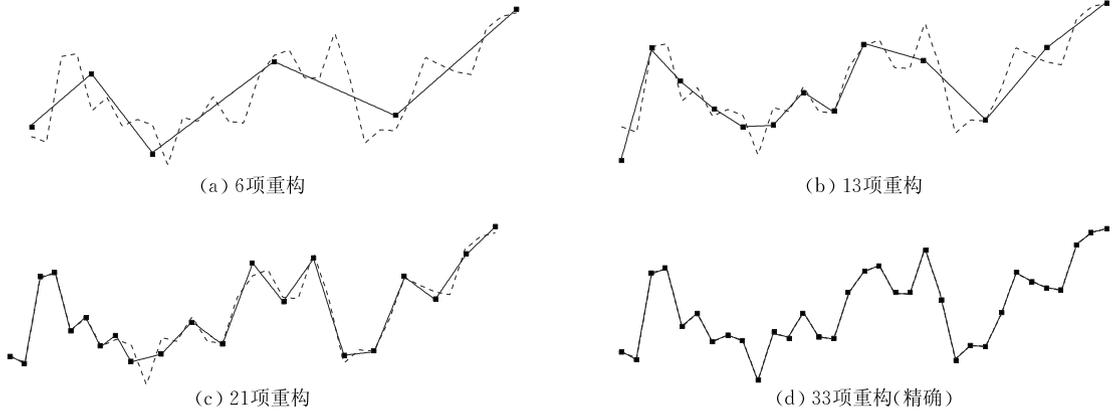


图 2 Franklin 函数对折线的再生性

3 Franklin 矩

3.1 Franklin 矩

Franklin 矩是基于 Franklin 函数定义的, 记第 n 个 Franklin 函数为 $\varphi_n(x)$, $0 \leq x \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots$. 给定图像函数 $f(x, y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, 它的第 $(n+m)$ 阶 Franklin 矩定义为

$$F_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy \quad (2)$$

矩是对图像特征的定量描述, Franklin 矩是一种正交矩, 它实现了对图像的无冗余分解, 即图像的各 Franklin 矩之间是相互独立的, 没有相关性. 这就保证了能够利用最少的 Franklin 矩描述图像更多的特征, 以便达到降低特征维数的目的.

为了衡量矩对图像的特征表达能力, 一般利用矩对图像进行重建. 无论从主观视觉方面, 还是定量计算两者的误差方面, 都能方便地进行比较. 由于 Franklin 函数的正交性, 利用 Franklin 矩可以直接进行图像重建, 不要求解方程组, 这就降低了计算量. 根据前面有限个 ($n \leq n_{\max}, m \leq m_{\max}$) Franklin 矩对图像进行重建, 公式如下:

$$\tilde{f}(x, y; n_{\max} m_{\max}) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{m_{\max}} F_{nm} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \quad (3)$$

根据正交函数的 Fourier 展开理论, 利用

数的精确重构.

在 Meyer 回顾小波分析的产生与发展历史的著作^[23]中, 对 Franklin 函数系给予了很高的评价. Franklin 函数系满足如下性质 $\int_0^1 \varphi_i(x) dx = \int_0^1 x \varphi_i(x) dx = 0, i \geq 2$. 文中指出, Franklin 函数系兼具 Haar 函数系与 Schauder 函数系的优点, 对于平稳信号或非平稳信号, Franklin 函数系都能够较好地进行处理.

Franklin 矩进行重建的图像是对原图像的最佳平方逼近. 低阶 Franklin 矩是图像的低频信息, 它表达了图像的大致形状, 而代表图像高频信息的高阶 Franklin 矩则表达图像的更多细节特征. 用于重建的矩数目越多, 重建图像与原图像之间的误差越小, 重建质量越高.

3.2 Franklin 矩的精确计算

如前所述, 传统的矩函数都是定义在多项式函数集上, 包括非正交的几何矩及正交的 Legendre 矩、Zernike 矩等. 随着矩数目的增加, 多项式的次数也逐渐升高. 而 Franklin 函数是正交分段一次多项式, 除了保持正交性之外, 在具体的计算过程中, Franklin 矩只涉及一次多项式的计算, 从而能够在较低计算复杂度条件下精确计算矩值, 这是传统多项式矩很难做到的.

令图像尺寸为 $N \times N$, 利用坐标变换将其归一化到单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上, 像素中心坐标为 (x_i, y_j) , $i, j = 0, 1, \dots, N-1$. 那么, 式(2)可以写为

$$F_{nm} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i, y_j) \cdot \omega_{nm}(x_i, y_j) \quad (4)$$

其中, $\omega_{nm}(x_i, y_j) = \int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_i + \frac{\Delta}{2}} \int_{y_j - \frac{\Delta}{2}}^{y_j + \frac{\Delta}{2}} \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy$ 表示 Franklin 基函数 $\varphi_n(x) \varphi_m(y)$ 在相应像素上的积分, $\Delta = \frac{1}{N}$ 表示像素宽度.

对于双重积分 $\omega_{nm}(x_i, y_j)$, 在传统的以多项式为核函数的矩中, 一般通过数值积分方法计算. 最常用的方法是零阶逼近(ZOA):

$$\omega_{nm}(x_i, y_j) \approx \Delta^2 P_n(x_i) P_m(y_j) \quad (5)$$

其中, $P_n(x)$ 表示 n 阶多项式, 该逼近形式所产生的误差为

$$err = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i, y_j) \cdot$$

$$\left[\int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_i + \frac{\Delta}{2}} \int_{y_j - \frac{\Delta}{2}}^{y_j + \frac{\Delta}{2}} P_n(x) P_m(y) dx dy - P_n(x_i) P_m(y_j) \right],$$

文献[24]已经证明, 该误差会随着多项式阶数的提高而增长. 与之不同的是, 由于 Franklin 函数由一次多项式组成, 可以直接得到 Franklin 矩的精确值, 不包含任何数值计算误差, 具体推导过程如下.

根据变量分离原则, 双重积分 $\omega_{nm}(x_i, y_j)$ 可以写为如下形式:

$$\omega_{nm}(x_i, y_j) = \int_{x_i - \frac{\Delta}{2}}^{x_i + \frac{\Delta}{2}} \varphi_n(x) dx \cdot \int_{y_j - \frac{\Delta}{2}}^{y_j + \frac{\Delta}{2}} \varphi_m(y) dy \quad (6)$$

不失一般性, 假设 $\varphi_n(x)$ 在区间 $\left[x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2} \right]$

上的表达式为 $k_1^i x + b_1^i$, $\varphi_m(y)$ 在区间 $\left[y_j - \frac{\Delta}{2}, y_j + \frac{\Delta}{2} \right]$

上的表达式为 $k_2^j y + b_2^j$. 那么, $\omega_{nm}(x_i, y_j)$ 可以通过如下解析计算公式得到

$$\omega_{nm}(x_i, y_j) = \Delta^2 (k_1^i x_i + b_1^i) (k_2^j y_j + b_2^j) \quad (7)$$

通过式(7), 可以精确计算 Franklin 基函数 $\varphi_n(x) \varphi_m(y)$ 在相应像素上的积分, 代入式(4)便可得到该图像的 Franklin 矩的精确结果, 即

$$F_{nm} = \Delta^2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i, y_j) \cdot (k_1^i x_i + b_1^i) (k_2^j y_j + b_2^j) \quad (8)$$

可以看出, 式(8)只涉及到一次多项式的运算, 计算复杂度低, 且不包含任何数值逼近, 所得结果是 Franklin 矩的精确值. 在传统的多项式矩中, 这两者很难同时满足, 往往都是为了提高计算效率, 而牺牲了计算结果的精度.

对于 $N \times N$ 的数字图像, 根据式(8), 计算 M 阶 Franklin 矩, 需要 $O(N^2 M)$ 次乘法; 而对于 Legendre 矩或 Zernike 矩, 利用多项式的递推关系, 则需要 $O(N^2 M^2)$ 次乘法运算^[9].

4 实 验

为了检验 Franklin 矩对图像的表达, 本节通过

对图像的重构来进行测试. 所选图像均来自于标准图像测试库, 如图 3(a)~(i)所示. 其中, 图像(a)~(c)的低频信息较多, (g)~(i)的细节最丰富, (d)~(f)居于两者之间. 我们将分别用 Legendre 矩(LMs)、Zernike 矩(ZMs)及 Franklin 矩(FMs)对图像进行正交重构, 重构图像的质量反映了相应矩的图像特征表达能力. 记原数字图像为 $f(x, y)$, 前 L 阶矩的重构图像为 $\tilde{f}(x, y; L)$, 两者的误差为

$$mse = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} [\tilde{f}(x, y; L) - f(x, y)]^2.$$



图 3 标准测试图像

图 4~6 分别显示了对图 3(a)、图 3(d)及图 3(g)的重构结果. 每张图像分别用 Legendre 矩(LMs)、Zernike 矩(ZMs)及 Franklin 矩(FMs)的 40 阶、80 阶及 120 阶进行重构. 可以看出, Franklin 矩的重构效果最优.

为了更客观地比较重构图像的质量, 我们计算了在不同阶数下各重构图像与原图像的误差(mse). 用于重构的阶数为 $5n$, $n=1, 2, \dots, 24$, 图 7(a)~(i)显示了对图 3(a)~(i)分别用 Legendre 矩(LMs)、Zernike 矩(ZMs)及 Franklin 矩(FMs)进行重构的图像, 也即误差随着重构阶数增加而变化的图像.

从图 7 可以看出, Legendre 矩在达到一定阶数之后, 重构误差反而会逐渐升高, 这是由于随着阶数的升高, Legendre 多项式的振荡频率越来越高, 导致式(5)产生的逼近误差增大, 这一点在文献[24]中有详细的阐述. Zernike 矩的数值稳定性优于

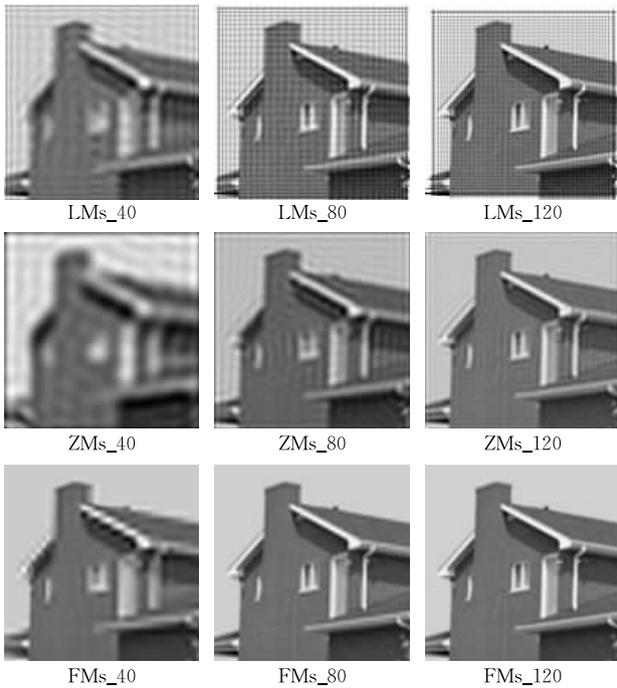


图 4 图像“house”的重构



图 5 图像“cameraman”的重构

Legendre 矩, 当阶数大于一定数目 ($L \approx 60$) 之后, 重构图像的质量也优于 Legendre 矩, 而 Franklin 矩的重建图像误差始终小于前两者的结果. 图 7 的结果进一步表明了 Franklin 矩具有更好的图像表达能力.

5 结 论

为了克服传统多项式矩的数值逼近误差与计算

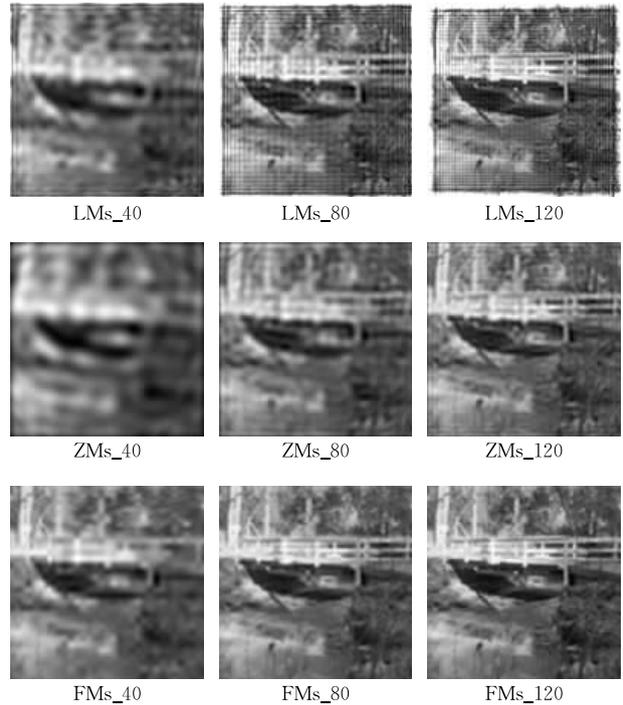


图 6 图像“walkbridge”的重构

复杂度不能同时兼顾的缺点, 本文基于一类正交样条函数系构造了一类正交矩, 称之为 Franklin 矩. Franklin 函数系是一次正交样条函数系, 由分段一次多项式组成. 除了保持传统正交矩的正交性之外, 具体的计算中只涉及一次多项式, 计算复杂度低, 且计算结果是精确的, 不包含任何数值逼近误差. 对图像的重构实验表明, Franklin 矩具有更好的图像特征表达能力.

参 考 文 献

- [1] Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(2): 179-187
- [2] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments. *Journal of Optical Society of America*, 1980, 70(8): 920-930
- [3] Teh C H, Chin R T. On image analysis by the methods of moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(4): 496-513
- [4] Khotanad A, Hong Y H. Invariant image recognition by Zernike moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(5): 489-497
- [5] Kan C, Srinath M D. Invariant character recognition with Zernike and orthogonal Fourier-Mellin moments. *Pattern Recognition*, 2002, 35(1): 143-154
- [6] Wang L, Healey G. Using Zernike moments for the illumination and geometry invariant classification of multispectral texture. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(2):

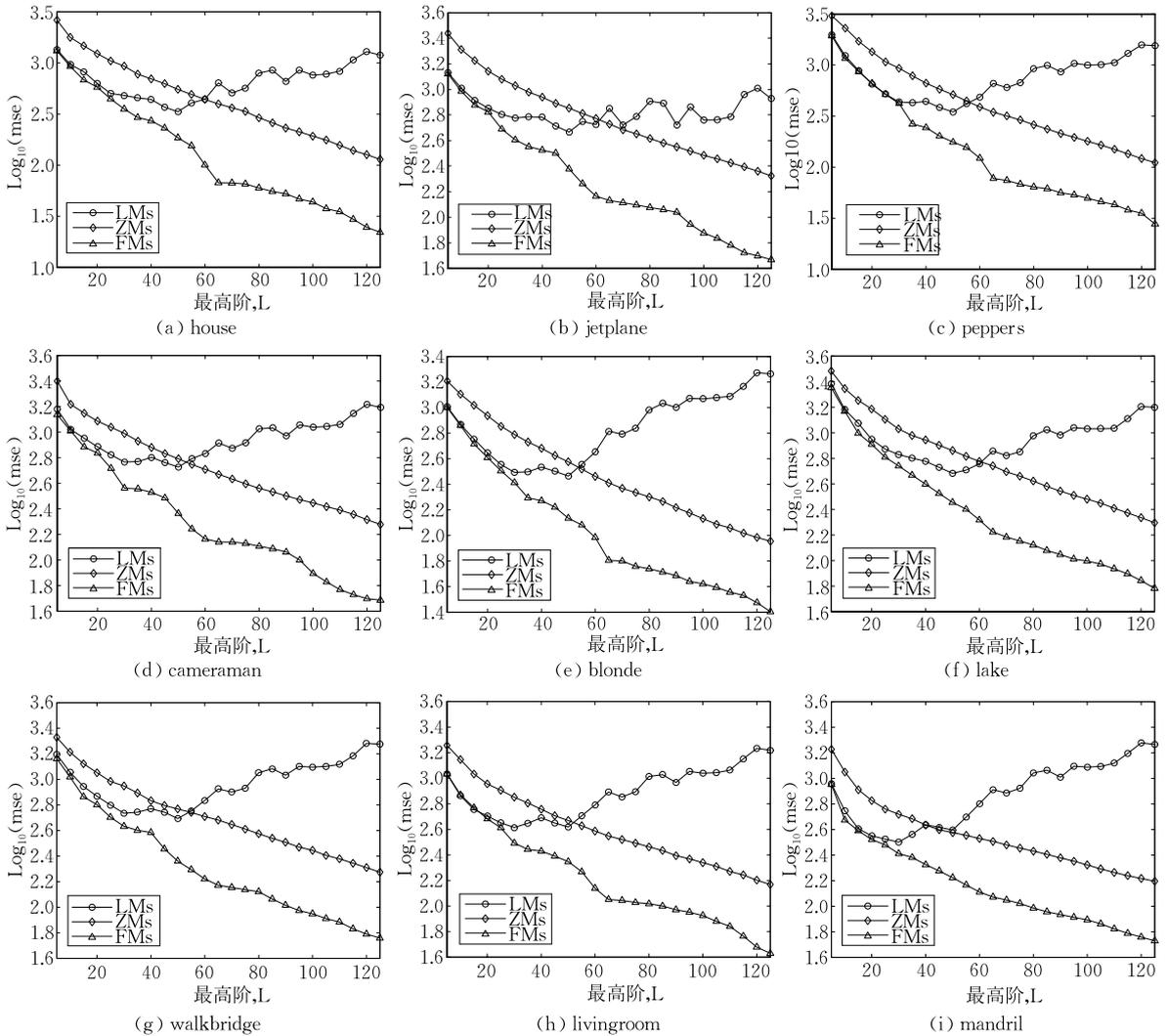


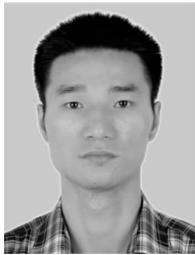
图7 重构图像的误差曲线(mse)

- 196-203
- [7] Novotni M, Klein R. 3D Zernike descriptors for content based shape retrieval//Proceedings of the 8th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications. Seattle, WA, USA, 2003; 216-225
- [8] Zhang D, Lu G. Evaluation of MPEG-7 shape descriptors against other shape descriptors. *Multimedia Systems*, 2003, 9(1): 15-30
- [9] Flusser J, Zitova B, Suk T. *Moments and Moment Invariants in Pattern Recognition*. UK: Wiley & Sons Ltd., 2009
- [10] Mukundan R, Ramakrishnan K. *Moment Functions in Image Analysis: theory and Applications*. Singapore: World Scientific, 1998
- [11] Qjidaa H. Image reconstruction by Laguerre moments//Proceedings of the 2nd International Symposium on Communication, Control and Signal Processing. Marrakech, Morocco, 2006
- [12] Liao S X, Pawlak M. On image analysis by moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, 18(3): 254-266
- [13] Liao S X, Pawlak M. On the accuracy of Zernike moments for image analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, 20(12): 1358-1364
- [14] Xin Y, Pawlak M, Liao S. Accurate computation of Zernike moments in polar coordinates. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(2): 581-587
- [15] Kotoulas L, Andreadis I. Accurate calculation of image moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2028-2037
- [16] Lin H, Si J, Abousleman G P. Orthogonal rotation-invariant moments for digital image processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(3): 272-282
- [17] Mukundan R, Ong S, Lee P A. Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(9): 1357-1364
- [18] Yap P T, Paramesran R, Ong S H. Image analysis by Krawtchouk moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(11): 1367-1377
- [19] Mukundan R. Some computational aspects of discrete orthonormal moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(8): 1055-1059

- [20] Cai Zhan-Chuan, Chen Wei, Qi Dong-Xu, Tang Ze-Sheng. A class of general Franklin functions and its applications. *Chinese Journal of Computers*, 2009, 32(10); 2004-2013(in Chinese)
(蔡占川, 陈伟, 齐东旭, 唐泽圣. 一类新的正交样条函数——Franklin 函数的推广及其应用. *计算机学报*, 2009, 32(10); 2004-2013)
- [21] Qi Dong-Xu, Song Rui-Xia, Li Jian. *Discontinuous Orthogonal Functions*. Beijing: Science Press, 2011(in Chinese)

(齐东旭, 宋瑞霞, 李坚. 非连续正交函数: U 系统、V 系统、多小波及其应用. 北京: 科学出版社, 2011)

- [22] Franklin P. A set of continuous orthogonal functions. *Mathematische Annalen*, 1928, 100(1): 522-529
- [23] Meyer Y. *Wavelets: Algorithms and Applications*. USA: Philadelphia, SIAM, 1993
- [24] Yap P T, Paramesran R. An efficient method for the computation of Legendre moments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(12): 1996-2002



CHEN Wei, born in 1986, Ph. D. His research interests include computer graphics, and digital image processing etc.

CAI Zhan-Chuan, born in 1974, Ph.D., associate professor. His research interests include computer communication, and lunar data processing etc.

QI Dong-Xu, born in 1940, professor. His research interests include computer graphics and numerical approximation etc.

Background

This project is supported by the National Basic Research Program(973 Program) of China under Grant No. 2011CB302400, the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61272026, 61170320, the Science and Technology Development Fund of Macau under Grant No. 084/2012/A3 and Fundamental Research Funds for the Central Universities under Grant No. JUSRP11416. This work aims to propose a new class of orthogonal moments for image representation.

The theory of moments provides useful series expansions for the representation of object shapes. Moments have been utilized as pattern features in a number of applications, such as image analysis, pattern recognition, object indexing and image matching. For the conventional moments, their basis functions are almost polynomials, such as geometric moments, Legendre moments and Zernike moments. These

moments have essential difficulties for calculating accurately due to the numerical instability and computational complexity, especially with order increasing.

The main contribution of this paper is to propose a new class of orthogonal moments named as Franklin moments (FMs) based on Franklin functions. Franklin function system is a class of orthogonal spline functions which is composed of a series of orthogonal piecewise polynomials of degree one. It suggests that besides orthogonality, FMs can keep the order of polynomials on only degree of one. The exact values of FMs can be obtained directly with small calculation effort. Experimental results show that images reconstructed from Franklin moments have lower error than that of the conventional orthogonal polynomial moments.