基于 SPH 方法的快速逼真流体表面张力仿真

袁志勇"徐标"廖祥云"

¹⁾(武汉大学计算机学院 武汉 430072) ²⁾(中国科学院深圳先进技术研究院 广东 深圳 518055)

摘 要 随着计算机仿真技术的发展,流体的模拟仿真被广泛地应用于工程计算、游戏及电影特效中. 逼真的流体 仿真需要对流体的物理特性进行建模,基于物理的流体仿真是仿真领域最具挑战的研究内容之一. 基于光滑粒子 流体动力学(SPH)的流体仿真方法是目前最为常用的流体仿真无网格法,其粒子特性特别适合处理流体的建模问 题,同时能够鲁棒稳定地解决流体仿真中的计算问题. 但是, SPH 方法无法实现精确的表面张力计算,无法获得逼 真的流体仿真效果. SPH 表面计算中的数值不稳定问题,引起的表面张力不真实、自由表面处粒子聚集、细节断裂 等现象,严重影响流体自由表面处仿真的视觉效果. 为解决该问题,提出一种面向 SPH 流体的快速逼真流体表面 张力仿真方法. 首先快速精确找到流体表面粒子,精准计算其表面粒子法向量,其次通过构建水平集网格用于边界 处密度修正以更加准确地处理边界处的计算,最后提出近表面粒子间作用力模型以计算流体表面张力. 实验结果 表明该方法能实现逼真的流体表面张力仿真效果.

关键词 光滑粒子流体动力学;流体仿真;表面张力;近表面粒子间作用力;密度修正 中图法分类号 TP391 **DOI**号 10.11897/SP.J.1016.2019.02062

Fast and Precise Surface Tension for SPH-Based Fluid Simulation

YUAN Zhi-Yong¹⁾ XU Biao¹⁾ LIAO Xiang-Yun²⁾

¹⁾ (School of Computer Science, Wuhan University, Wuhan 430072)

²⁾ (Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenzhen, Guangdong 518055)

Abstract With the continuous progress of computer simulation technology, fluid simulation has been developed rapidly, and it has been widely used in many fields, especially in engineering computation, game and special effects in movie. Nevertheless, with the increasing requirements of fidelity of the motion and interaction of subjects, fluid simulation requires more realistic simulation results. However, the motion of real fluid and objects is often difficult to be expressed by simple process, which can only be realized by the physical laws in the real world. Physics-based fluid simulation is one of the most challenging research issues due to its complexity in theory and computation. Among numerous fluid simulation models, smoothed particle hydrodynamics (SPH) based fluid simulation is the most widely used meshless method to simulate the realistic fluid motion. As a simple and flexible method, SPH particle characteristics make it naturally suitable for fluid simulation modeling and feasible to deal with many fluid simulation computation, the detailed simulation of fluid has attracted more and more attention. But, current SPH method cannot guarantee the accurate surface tension computation, which reduces the fidelity of the fluid

收稿日期:2017-12-06;在线出版日期:2019-01-03.本课题得到国家自然科学基金项目(61373107,61233012)、武汉市科技计划项目 (20160101010022)、中国科学院深圳先进技术研究院优秀青年基金(2017059)、广州市产学研协同创新重大专项(201704020141)、深 圳市学科布局项目(JCYJ20160429190300857)资助.袁志勇,博士,教授,博士生导师,中国计算机学会(CCF)高级会员,中国计算机学会 (CCF)虚拟现实与可视化专委会委员,主要研究领域为虚拟现实与人机交互、计算机视觉与机器学习、嵌入式系统与物联网技术. Email: zhiyongyuan@whu.edu.cn.徐标,硕士,主要研究方向为计算机仿真与图像处理.廖祥云(通信作者),博士,主要研究方向为图像 处理、计算机仿真与虚拟现实.E-mail: xyunliao@gmail.com.

simulation, fail to achieve realistic fluid motion and may lead to the distortion of fluid simulation in real simulation application scenarios. Surface tension is the most common and important physical property that exhibits the microscopic properties of fluids and is of great significance in realizing fluid simulation with high fidelity. It is still a challenge to accurately calculate the surface tension for the SPH based fluid simulation. The numerical instability in the SPH based free-surface liquid simulation causes unreal surface tension, particles clumping, and thin features rupture, which seriously affects the visual effects of simulation at the free surface of the fluid. In the free surface of the fluid, the lack of neighborhood particles cause underestimated surface particles density which is calculated by the SPH method, resulting in negative pressure and thus leading to the phenomenon of non-physical particles clumping. To tackle this issue, we propose a fast and realistic method for fluid surface tension computation in SPH based fluid simulation. Firstly, the fluid surface particles are efficiently detected and the surface normal vector of the particles is precisely defined. Then, based on the detected surface particles, we define he level set grid by using the free surface definition and surface normal vector. To alleviate the difficulty in handle surface particle density, we propose the level-set based density correction method for near-surface particles to make the calculation at the boundary more accurate. Finally, in order to achieve fast and effective surface tension, we propose a model which combines the near-surface particle interaction force with the minimum surface area to calculate the accurate surface tension of the fluid. The experimental results show that our method can alleviate the particle clumping caused by the numerical instability at the fluid free surface, and our method can achieve fast and realistic surface tension simulation in SPH fluid.

Keywords smoothed particle hydrodynamics; fluid simulation; surface tension; near-surface inter-particle force; density correction

1 引 言

随着计算机硬件和图形图像技术的不断进步, 计算机仿真技术得以迅速发展,在游戏、电影特效、 军事仿真、工程仿真等领域,计算机仿真技术得到广 泛的应用. 然而随着各方面需求的日益增加, 人们对 计算机仿真中物体运动与交互的真实感提出更高的 要求,希望得到更加真实的仿真效果.但是,真实的 物体运动往往难以用过程表述,所以此时只有借助 真实世界物理规律得以实现. 流体仿真作为计算 机图形学和虚拟现实的研究热点之一,在动画、游 戏及电影特效等领域具有重要应用.由于流体仿 真的复杂性,基于物理的流体仿真是最具挑战性 的研究问题之一.目前流体仿真有多种方法,其中 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics, 光滑粒子 流体动力学)方法是近年来应用最广泛的无网格法. SPH 作为一种简单而灵活的方法,其粒子特性使其 天然适合流体的仿真建模,能够以鲁棒稳定的方式 处理很多流体模拟问题. SPH 方法将流体划分为一 系列离散的粒子,然后应用光滑核估计粒子动态物 理量,每个粒子的空间导数可以从其周围粒子推断 得到,最终粒子按其计算所得速度进行运动^[1].相较 于传统欧拉方法,SPH 方法不需要计算复杂的网 格,可更方便地处理复杂的固体边界问题.但是 SPH 方法在流体仿真中不能保证流体的不可压缩 性,导致模拟场景中的流体仿真效果失真.随着对流 体模拟真实感效果要求的提升,流体细节仿真越来 越受到人们的关注.表面张力是展现流体微观特性 最常见和最重要的物理特性,表面张力的模拟成为 当前流体仿真中的研究热点之一.从微观角度来看, 流体分子受到各个方向其他分子的作用力,该作用 力随着分子间距离的远近分别表现引力和斥力作 用. 在流体内部,该作用力合力为零,流体分子处于 平衡状态;而在流体表面,该作用力合力不为零,方 向指向流体内部,从而形成表面张力.

为了实现逼真的流体仿真效果,当前基于 SPH 算法的流体自由表面处仿真仍旧是一个挑战,其主

要包括非真实准确人工表面张力、粒子聚集以及细 节断裂等.在流体自由表面处,邻域粒子的缺失会引 发 SPH 算法计算得到的表面粒子密度偏小,这种低 估的密度值导致负压力从而产生粒子的非物理聚集 现象.为了解决该问题,Schechter和 Bridson^[2]提出 Ghost SPH 方法,在自由表面创建一层幽灵粒子, 并将该层幽灵粒子纳入各物理量计算中.但是,幽灵 粒子地不断采样较大提升了算法的时间复杂度.除 了表面粒子密度计算问题,SPH 表面张力计算也是 处理流体表面问题的一个重要方面. 当前基于 SPH 的表面张力仿真计算主要分两类:宏观模型和微观 模型. 宏观模型中,基于颜色场(Color Field)表面粒 子检测、表面法向及张力计算存在一定的不准确性, 自由表面处的数值不稳定导致表面粒子聚集,破坏 了流体仿真中的细节之处,造成仿真效果不逼真的 结果. 微观模型中, 通过计算粒子间的聚斥力来仿真 流体分子间作用力.如 Tartakovsky 等人^[3]和 Akinci 等人^[4] 通过构造聚斥力模型模拟分子间作用力 以对表面张力进行仿真.近年来,有关流体表面的仿 真应用研究上还出现一些关于多相流的建模研究. 如 Ren 等人^[5] 通过体积分数表示模拟不同相流体 的空间分布,由此改进混合模型实现对多相流流动 的、通用的、鲁棒的 SPH 流体仿真. 而后 Ren 等 人區又通过将前述多相流仿真获得的体积分数数据 与简单有效的二次气泡模拟相结合,提出一种灵活 的气泡建模方法. Ren 等人^[7] 通过补偿可见气体粒 子密度和力的计算提出一种气态流体的快速 SPH 仿真方法. Yan 等人^[8]通过拓展现有多相流 SPH 框 架,实现了流体与可变形物体、颗粒状物质的仿真.

本文在 Marrone 等人^[9]关于表面粒子检测及 Akinci 等人^[4]关于表面张力定义的工作基础上,提 出一种快速逼真的流体表面张力仿真方法.通过该 方法,自由表面处数值不稳定引起的粒子聚集现象 得到缓解,最终实现了快速逼真流体表面张力仿真 效果.本文主要贡献如下:

(1)通过对流体进行快速准确地表面检测及法向量计算,提出一种结合近表面粒子间作用力与最小化表面积的模型计算流体的表面张力,所得表面张力更为真实,并缓解了自由表面处的数值不稳定性问题;

(2)提出一种基于水平集网格的近表面粒子密 度修正方法,以更加准确的处理边界处计算,进一步 缓解自由表面处的数值不稳定性.

2 相关工作

国内外研究人员提出了很多嵌入到流体仿真框 架中的表面张力计算方法. 早期 Morris^[10]提出从连 续表面力模型出发模拟表面张力. 后续 Müller 等 人[11]在此工作基础上提出基于颜色场方法进行表 面张力求解.他们提出的表面张力模型侧重于最小 化表面曲率,为每一个粒子计算法向量,以此确定力 的方向,而力的大小取决于粒子位置处曲率大小,而 且对于流体内部的粒子,其法向量方向为任意的.强 洪夫等人^[12]在 Morris 提出的表面张力 SPH 方法 基础上,通过引入边界核函数插值方法对边界法向 和曲率的计算进行修正,得到表面张力修正方程组, 以实现稳定的 SPH 表面张力计算. 近些年, Yu 等 人[13]提出在流体粒子表面重建网格,然后将网格顶 点的曲率应用于其邻域流体粒子的表面张力计算, 证明在表面网格稠密的情况下可准确计算流体表面 张力. 吴恩华等人[14] 根据流体密度场提出一种基于 平均曲率的表面张力模型,能够有效地模拟水滴的 表面张力现象. Yang 等人^[15] 通过体积保持的平滑 网格方式对流体表面张力进行计算,实现稳定流体 模拟,特别是具有较强表面张力的场景仿真.这些 工作的流体表面张力效果基本都依赖于准确的流体 边界检测以及精确的表面法向量计算,同时曲率 的计算涉及二次求导,这对粒子的分布情况要求比 较高.

为避免对表面曲率及表面法向量的依赖,研究 人员提出了通过邻域粒子间的相互作用力定义新的 表面张力模型[3,16]. 该方法可避免错误的法向量以 及曲率计算,但是仅仅用粒子间作用力不能保证表 面积最小化,无法实现准确表面张力计算. Clavet 等 人^[17]提出一种改进的 SPH 模型对表面张力进行仿 真,并提出一种基于距离的引力作用,获得了较好的 视觉效果. 刘栋等人[18] 提出基于 SPH 的粒子间相 互作用力模型以计算表面张力,获得了与基于连续 表面张力模型的 SPH 方法类似的表面张力效果. 近 年来,He 等人^[19]提出最小化表面能量的表面张力 模型,获得较好的视觉效果. Akinci 等人^[4]提出一 种基于 SPH 流体的通用表面张力模型,该模型通过 结合内聚力项和最小化表面积项模拟表面张力. Wang 等人^[20]在 Akinci 方法基础上提出基于 II-SPH 的流体表面张力和吸附力方法,能够较好地模 拟流体的表面微观特性,改善了数值稳定性和提高 了计算效率. Yang 等人^[21]提出一种可实时模拟不同界面处交互作用的成对力 SPH 模型,该模型可在一次仿真中同时处理多种类型的交互作用,并且缓解了自由表面的粒子聚集现象.

由于 SPH 方法对于所有粒子的场量都会通过 核插值计算其空间导数,所以在流体自由表面处的 计算中,存在非完整核半径引发的密度计算偏小问 题,导致数值不稳定、表面处的粒子聚集现象,影响 流体表面视觉效果.为了解决数值不稳定的缺陷, Monaghan 等人^[22]提出一种人工压力项以缓解该问 题,但导致产生较为虚假的表面张力. Oger 等人^[23] 提出了使用对 SPH 场量空间导数的高阶估计,然而 较大地提升了计算复杂度. Kulasegaram 等人^[24]提 出了一种不使用边界粒子的 SPH 密度方程以防止 粒子聚集.它们通过支持半径中固体边界占据的面 积引入修正项,从而避免在边界处计算错误密度. Feldman 等人^[25] 通过将球体中的密度函数与二维 空间中多个线段表示的边界相结合计算密度修正 项. Ihmsen 等人^[26] 通过压力项修正了粒子在边界 处的分布. Schechter 和 Bridson^[2]提出 Ghost SPH 方法,通过在液气、液固交接处采样幽灵粒子实现密。 度修正解决非完整核半径问题,然而对粒子地不断 采样等步骤较大地增加了计算代价. He 等人[13] 通 过结合双尺度压力估计和各向异性压力过滤,实现 了鲁棒的、具有较好视觉效果的流体模拟.近年来, Fujisava 等人^[27]提出一种无需采样任何边界内部 粒子的密度修正方法,该方法有效地减少了边界粒 子的内存消耗,但却增加了流固耦合的计算时间. Ren 等人^[7]通过补偿可见气体粒子密度和力的计算 提出一种表面附近粒子密度修正的方法.

3 流体仿真计算基础

3.1 SPH/WCSPH

SPH 算法将流体划分为一系列离散的粒子,然 后应用光滑核估计粒子动态物理量,最终粒子按照 其本身速度进行运动,每个粒子的空间导数可以从 其周围粒子推断得到.对于粒子*i*,其某一场量 A 可 以表示为周围支持半径 h 内所有粒子的加权和:

$$A(\mathbf{r}_i) = \sum_{j} A(\mathbf{r}_i) \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h)$$
(1)

其中, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_j 分别为粒子i,j的位置, m_j 表示周围粒子j的质量, ρ_j 表示为周围粒子j的密度, $A(\mathbf{r}_i)$ 是粒子i的场量.函数 $W(\mathbf{r}_{ij},h)$ 是核函数.

本文使用 WCSPH^[16]作为基本框架. WCSPH 提出了一种基于 Tait 方程的弱可压缩 SPH 方法. 通过对连续性方程求解,得到粒子密度更新如下:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j m_j \boldsymbol{v}_{ij} \,\nabla W(\boldsymbol{r}_{ij},h) \tag{2}$$

其中, $v_{ij} = v_i - v_j$; v_i , v_j 分别表示粒子i,j的速度.得 到粒子密度后可得粒子运动方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2}\right) \nabla W(\boldsymbol{r}_{ij}, h) + \boldsymbol{g} \quad (3)$$

其中 P_i , P_j 分别表示粒子 i, j 的压强. 压强通过 Tait 方程得到, 定义如下:

$$P = \frac{\rho_0 c_s^2}{\beta} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta - 1 \right) \tag{4}$$

其中,ρ。为初始密度,c。为流体中的音速,β为一可调 系数,原文建议值为7.使用 Tait 方程计算压强使得 密度只能小范围波动,保证了流体的弱可压缩性.

为了提高流体仿真中的数值稳定性,WCSPH 定义粘性力如下:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{i}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\sum_{j} m_{j} \prod_{ij} \nabla W(\boldsymbol{r}_{ij}, h), & \boldsymbol{v}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}} < 0\\ 0, & \boldsymbol{v}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{ij}^{\mathrm{T}} \geq 0 \end{cases}$$
(5)

其中,*Π_{ij}*定义如下:

$$\Pi_{ij} = -\tau \left(\frac{\mathbf{v}_{ij}^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2 + \varepsilon h^2} \right)$$
(6)

其中, $\tau = \frac{2ahc}{\rho_{\star}}$ 为粘性项(α 为一可调粘性项系数), ϵh^2 为防止分母为 0 的修正项, $\epsilon = 0.01$.

本文方法以 WCSPH 为基本框架计算压力与 粘性力,而密度计算使用 SPH 密度求和方式得到:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij}, h) \tag{7}$$

在计算过程中,得到初始粒子密度后,再使用本 文第5节提出的密度修正方法进行粒子的密度修 正,以缓解由自由表面粒子错误的密度计算导致的 数值不稳定.

3.2 快速表面粒子检测与水平集网格构建

3.2.1 表面粒子检测与表面法向量计算

精确地定义 SPH 流体粒子的边界是对流体表 面张力进行仿真的基础.不准确的表面粒子检测将 导致后续不准确的水平集网格,继而导致不准确的 表面张力计算.本文基于将文献[9]的方法引入到 SPH 流体仿真领域,将其用于快速准确地检测 SPH 流体表面粒子.首先定义重归一化矩阵寻找自由表 面周围的粒子:

$$B(\mathbf{r}_i) = \left[\sum_{j} \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \otimes \mathbf{r}_{ij} \Delta V_j\right]^{-1} \quad (8)$$

其中 ΔV_i 是粒子 j 的体积.

定义 ℕ为所有流体粒子集合, ⊮⊂ℕ为 ℕ的子 集,表示自由表面粒子集合. Doring^[28]证明矩阵 B^{-1} 的最小特征值 λ 取决于被计算点i周围的粒子i的 空间分布.理论上,当粒子远离流体区域时,该特征 值趋向于 0,当越趋近于流体内部,该特征值越趋近 于1. 所以可以通过λ值确定粒子处于流体区域的 位置. 通过计算 **B**⁻¹的最小特征值λ,可定义三种互 补的子集: E 为飞溅的粒子集合,λ 值较小; I 为远离 自由表面的内部粒子集合,λ 值较大; B 为靠近自由 表面的粒子或者呈现非均匀分布区域的粒子集合,λ 值相对居中.本文通过选取λ值的阈值来精准区分 表面粒子,为了确定较为合适的λ值阈值,进行了多 个场景的仿真测试.其最终不同了集对应阈值如下:

$$\begin{cases} i \in \mathbb{E} \Leftrightarrow \lambda \le 0.2 \\ i \in \mathbb{B} \Leftrightarrow 0.2 < \lambda \le 0.75 \\ i \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \lambda > 0.75 \end{cases}$$
(9)

在流体内部区域,邻域粒子的梯度核函数之和 接近于 0;当粒子接近于自由表面时,邻域粒子的梯 度核函数之和接近该粒子的表面法向量[29].再次使 用重归一化矩阵得到表面粒子的法向量:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i) = \frac{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{r}_i)|}$$
(10)

其中,

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{r}_i) = -B(\boldsymbol{r}_i) \sum_{i} \nabla W(\boldsymbol{r}_{ij}, h) \Delta V_j \qquad (11)$$



(c)颜色场方法

1.691

4.506

8.730

14.798

22.874

表 1 耒

颜色场耗时/ms

1.513

3.949

7.414

11.901

17.702

平均

粒子数

10000

20000

30000

40000

50000

在实际实验中,当某一粒子没有邻域粒子时,重 归一化矩阵是不存在的.此种情况下,本文通过设置 该粒子的法向量为 0 进行处理.

上述为流体表面粒子粗检测并得到粒子的法向 量,利用下式可以判断粒子是否属于表面粒子:

$\left(orall j \in \mathbb{N}_i , 若 ig oldsymbol{r}_{ij} ig \geq \sqrt{2}h , ig oldsymbol{r}_{j^T} ig < h$	\Rightarrow	i∉ℾ
$\forall j \in \mathbb{N}_i$, $\exists \mathbf{r}_{ij} \ll \sqrt{2}h$, $\arccos\left(\frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}}{ \mathbf{r}_{ij} } ight) \ll \frac{\pi}{4}$	\Rightarrow	i∉F
其他情况	\Rightarrow	$i \in \mathbb{F}$
		(12)

其中, F为表面粒子集合, T为粒子 i 法向方向且与 i 距离 h 的点, n 表示粒子 i 的法向量, N 表示粒子 i 周 围的粒子集合.

图1所示为采用颜色场以及本文方法对流体表 面进行检测的视觉效果对比.其展示了本文所引用方 法的有效性.对比图 1(a)、(c) 与图 1(b)、(d) 可见,采 用颜色场的表面检测结果不准确,导致表面不连续, 可导致后续基于表面粒子的法向量计算及表面张力 计算不准确,而本方法能够精确地检测流体表面粒 子.在该场景中,随着粒子数的增加,本方法与颜色场 方法检测表面粒子用时如表1所示.从表中可知,随 着粒子数的增加,两种方法耗时都随之增加,并且本 方法相对颜色场方法耗时也在增加,相对时间占比随 粒子数增多而增大.本方法与颜色场方法都能快速对 流体表面粒子进行检测,在实验中,本方法虽比颜色 场方法平均用时多19.4%,但其在接受范围内,并且 也取得了更加精确的结果.





水平集网格构建

流体粒子表面检测结果 图 1

面粒于检测用的	打对比
本方法耗时/ms	相对耗时增加占比/

耗时增加占比/%	基于检测得到的 SPH 流体表面粒子, Marrone
11.8	等人 ^[9] 通讨计算 level-set 函数以划分流体内部或流
14.1	休处郊区域的网络节点 对于每一个接近于自由害
17.8 24.3	
29.2	॥粒丁集『的下点》,位测具菆近的表面粒丁 F_N ,
10 /	则标量 d _{are} 可以由下式计算,

3.2.2

 $d_{NF_N} = (\mathbf{r}_{F_N} - \mathbf{r}_N) \mathbf{n}_{F_N}$ (13) 此处 \mathbf{n}_{F_N} 表示 F_N 处的自由表面法向量. 这样对于每 一个网格顶点 \mathbf{x}_N ,可以定义 level-set 函数:

$$\phi(\mathbf{x}_{N}) = \begin{cases} -1 & d_{NF_{N}} \leq -2h \\ d_{NF_{N}}/-2h & -2h < d_{NF_{N}} < 2h \\ +1 & d_{NF_{N}} \geq 2h \end{cases}$$
(14)

该函数在流体内部为正,在流体外部为负,在自由表面处为 $0(因为 d_{NF_N}=0)$.

4 快速表面张力计算与密度修正

自由表面的存在意味着 SPH 插值精度应当保 持到接近流体域边界处. 当实现 SPH 插值计算,如 压力梯度、速度散度时,接近流体表面处被以与流体 内部同样的方式所处理. 然而表面处的计算常常被人 们所忽视,导致压力梯度不能收敛到接近自由表面处 的正确值. 相反,本文主张通过快速、精确的表面粒子 检测,对没有数值截断的自由表面流动进行仿真.

图 2 为本文方法计算模式.首先,根据前述的快速、精确的表面粒子检测方法获得精确的自由表面 定义与表面法向.根据获得的自由表面定义和表面 法向构建流体区域水平集网格,以区分流体内外区 域的网格顶点.本文通过 SPH 密度求和方式得到流 体密度,所以对于拥有非完整核半径的流体粒子,由 于邻域粒子的缺失,其计算所得密度将偏小.通过前 述构建的水平集网格,可对粒子密度进行修正,详见 4.3节.实际情况下,不是所有的粒子密度计算都是 错误的,只有靠近表面的粒子密度才是被低估的.本



文在精确表面粒子检测的基础上,将拥有非完整核 半径的粒子定义为近表面粒子,即自由表面一个核 半径内的所有流体粒子,如图 3 中实线和虚线(含线 上)之间的流体粒子所示.所以,密度修正只需对近 表面粒子操作,以减少密度修正计算量,提高计算效 率.为了实现快速、有效的表面张力,本文提出了一 种近表面粒子间作用力,详见 4.1节.为了更好地模 拟流体的表面微观特性,还需加入近表面最小化表 面积项保证流体表面积最小化,详见 4.2节.最后, 通过 WCSPH 框架求解压力、粘性力及其他外力 后,计算流体粒子的加速度驱动粒子运动.



4.1 近表面粒子间作用力模型

在毛细、水珠等现象中,表面张力扮演着十分重要的角色.微观本质上,表面张力是分子间作用力的一种表现.当分子间距离较近时,表现为斥力作用,当距离较远时,则表现为引力作用.真实分子间作用力是十分复杂的.勒那德-琼斯(Lennard-Jones)模型是对分子间作用力的一种粗糙近似,尽管如此,其仍然具有一定的参考意义,其近似模型图如图4所示.根据古根海姆(Guggenheim)模型,液体表面层是一个有一定厚度的过渡区,既占有体积又具有物质.所



图 4 Lennard-Jones 模型近似图

以在表面层,分子较为稀疏,分子间距离较远,其作 用力表现为吸引力,表面粒子间的相互吸引作用形 成了表面张力.而对于液体内部分子,其处于一种平 衡状态,所受分子间作用力合力为零.

为了准确计算粒子间的表面张力作用,在 Tartakovsky等人^[3]提出的表面张力计算模型基础 上,本文提出一种精确快速的近表面粒子间作用力 模型用于计算表面张力.在 Tartakovsky 表面张力 模型中,表面张力定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_i} \boldsymbol{F}_i \tag{15}$$

其中,F_i是粒子*i*的邻域粒子间相互作用合力,定义如下:

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \tag{16}$$

而粒子间相互作用力定义如下

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \begin{cases} s_{ij} \cos\left(\frac{1.5\pi}{h} |\boldsymbol{r}_{ij}|\right) \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|}, & |\boldsymbol{r}_{ij}| \leq h \\ \boldsymbol{0}, & |\boldsymbol{r}_{ij}| > h \end{cases}$$
(17)

其中,sij是粒子 i 和粒子 j 之间的作用力强度系数,

图 4 为 Lennard-Jones 模型曲线大致形状、图 5 为本文模型及其他两个对比模型粒子间相互作用力 曲线形状对比图,其中,横轴表示到所计算粒子的中 心距离与核半径的比值 | r | /h,纵轴表示相互作用力 大小,正值表示斥力作用,负值表示引力作用,并对最 大值进行归一化处理.对比图 4 Lennard-Jones 模型 曲线与图 5 Akinci 方法^[4]和 Tartakovsky 方法^[3]曲 线可知,虽然后者具有引力、斥力作用,但是一方面 该作用力随粒子间距离的变化与 Lennard-Jones 模 型有较大出入;另一方面,考虑其在 SPH 模型的计 算中,该模型也忽视了对核半径的使用.很多文献通 过构造复杂的样条函数以解决上述两点问题,而事 实上可以通过直接将文献[3]模型引入到 SPH 模型 中解决问题.令粒子间作用力强度系数为 S,并引入



图 5 本文模型与其他模型曲线形状比较

核半径,定义粒子间相互作用如下:

$$\boldsymbol{F}_{i} = S \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \cos\left(\frac{1.5\pi}{h} | \boldsymbol{r}_{ij} | \right) \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|} W(\boldsymbol{r}_{ij}, h) (18)$$

从 Lennard-Jones 模型曲线可以看出,引力作 用与斥力作用的极值比值小于 1,且在引力作用区 域,引力大小从 0 到引力极值部分曲线的平均梯度 绝对值是大于极值右侧曲线的平均梯度绝对值的. 对比图 4 与图 5 本文方法曲线,将原模型引入到 SPH 模型后,引力极值和斥力极值的比值、引力梯 度变化程度都更加贴近于 Lennard-Jones 模型. 同 时,因为该模型的斥力作用,由非完整核半径导致的 表面数值不稳定的粒子非物理聚集现象,也将得到 缓解.

除此之外,考虑到表面张力本质上是分子间作 用力的结果,而该作用力在流体内部合力为零.所以 为了提高计算效率,只需对表面粒子计算粒子间作 用力即可.但是另一方面,考虑到在 SPH 模型中,只 针对表面粒子计算将导致数值空间梯度的不连 续,为了保证空间梯度的连续性,本文在计算粒子 间作用力时针对所有具有非完整核半径的近表面 粒子.这样的处理方式,在保证计算效率的基础上, 保证了数值稳定性,使仿真效果更加自然.而表面粒 子则可以通过前述 3.2 节的方法进行快速、精确表 面检测.

4.2 最小化表面积项

近表面粒子间作用力模型,能够构造类似于分子间作用力的效果,可以有效地解决液体表面粒子的非物理聚集问题.但是仅仅使用近表面粒子作用力模型模拟表面张力,将导致流体最终所处的形状取决于粒子的初始分布,不能保证流体表面积最小化.所以为了更好地模拟流体的表面微观特性,获得更加真实的表面张力仿真效果,还需加入最小化表面积项保证流体表面积最小化.Akinci等人^[4]提出一种最小化流体表面积方法定义如下:

$$\boldsymbol{F}_{ii} = -\gamma m_i \boldsymbol{n}_{ii} \tag{19}$$

其中, γ 表示可调的最小化表面积项系数, $n_{ij} = n_i - n_j$, n_i , n_j 表示表面粒子i和j的法向量.在 SPH中, 从粒子分布计算曲率是十分容易出错的.为了避免 明确的曲率计算,Akinci通过对平滑颜色场梯度的 SPH估计,计算粒子法向量:

$$\boldsymbol{n}_i = \delta \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_{ij}, h)$$
(20)

与一般颜色场方法的不同在于该方法多一项独 立的、针对法向量的缩放系数 δ,表示粒子的法向量

2069

数量级与曲率是成某一比例的.虽然该方法没有显式 地计算曲率,但其与一般颜色场计算方法并无二致. 而基于颜色场的粒子法向量是存在一定不准确性的. 本文通过 3.2节重归一化矩阵得到的精确表面粒子 及表面法相量代替颜色场方法,可以得到比颜色场 方法更加精确的粒子法向量.本文将式(10)所得法 向量引入最小化表面积项中,将其推广到 SPH 模型 中并对称化,得到最小化表面积项定义如下:

$$\boldsymbol{F}_{i} = -\gamma \sum_{j} \frac{m_{i}m_{j}}{\rho_{i}\rho_{j}} \boldsymbol{n}_{ij} W(\boldsymbol{r}_{ij},h) \qquad (21)$$

对于上式容易得知,在流体平坦区域和流体内 部区域,该项为零.因为对于平坦区域 $n_i \approx n_j$,得到 $n_{ij} = n_i - n_j \approx 0$;对于内部粒子而言,由于 $n_i \approx 0$ 和 $n_j \approx 0$,故该项也为零.所以在计算该项时,为了提高 计算效率,亦只针对表面粒子进行计算;而为了保证 空间梯度的连续性,将所有具有非完整核半径的粒 子也加入计算之中.在提高效率的同时保证了数值 稳定性.

4.3 基于水平集网格的密度修正

在 SPH 流体仿真中,计算所得的液气、液固交 界处粒子密度比其真实密度小,这种错误的密度值 导致负压力,引起粒子的聚集现象,即所谓的数值不 稳定.概括来讲,流体表面粒子的非完整核半径导致 流体密度的错误计算是自由表面处数值不稳定与粒 子非物理聚集现象的原因.而自由表面处的粒子非物理聚集对近表面粒子间作用力的计算有较大的影响.近表面粒子间作用力模型只有在粒子分布较为均匀自然的情况下才能得到较好的仿真效果.

考虑到式(14)所得的 level-set 函数值可以判断 某水平集网格是否属于流体内部,本文通过定义流 体体积占比系数 R_i,对表面粒子进行密度修正.流 体体积占比系数 R_i定义如下:

$$R_{i} = \frac{\sum_{j} \delta(\phi_{j}) \Delta V_{j} W(\mathbf{r}_{ij}, h)}{\sum_{j} \Delta V_{j} W(\mathbf{r}_{ij}, h)}$$
(22)

其中, ΔV_j 表示粒子 *j* 的体积大小,对于 $\delta(\phi_j)$,当 $\phi_j > 0$ 时, $\delta(\phi_j) = 1$,否则 $\delta(\phi_j) = 0$.密度修正公式定 义如下:

$$\rho_i = \frac{\sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij}, h)}{R_i}$$
(23)

对于流体内部粒子,*Ri*≈1,无需进行密度修正, 对流体近表面粒子,*Ri*<1.故同样只需针对具有非 完整核半径的粒子进行密度修正即可.

图 6 说明了在液体表面通过水平集网格进行 密度修正,其中 $R_1 \sim R_4$ 所示网格代表不同大小的 level-set函数值.算法 1 为一次仿真迭代的伪代码.



图 6 通过 level-set 函数进行密度修正

算法1. 流体仿真迭代.

- 1. WHILE animating DO
- 2. update neighborship
- 3. compute density
- 4. find free-surface particles
- 5. update level-set grid
- 6. FOREACH near-surface particle i DO
- 7. density correction

- 8. END FOR
- 9. FOREACH particle *i* DO
- 10. compute viscosity, gravity and external forces
- 11. IF particle i is near-surface particle THEN
- 12. compute near-surface interparticles forces
- compute the force which minimizes the surface area
- 14. END IF

END FOR 15.

16. compute velocity

17. update positions

18. END WHILE

实验结果 5

为了验证本文所述方法的有效性,我们实验对 比了相同场景下 Akinci 方法等与本文方法的效果,

并采用本方法实现了逼真的多液块融合、水滴浸润、 滴水效果以及流体流动仿真效果. SPH 的光滑核半 径 h 取值为 3R, R 为 SPH 采样粒子的半径. 对于所 有的实验,本文还融入了 Akinci 等人^[30]提出的流 固耦合方法.本文的实验平台为:(1)硬件:英特尔 Intel i5-4570M(3.20 GHz) CPU,8 GB 内存,显卡 GeforceGT 755M; (2) 软件: Visual Studio 2012, Mitsuba, OpenGL. 表 2 所示为本文方法对上述场 景进行实验所得的时间性能统计.

表 2 1000 帧平均时间性能统计							
场景	流体粒子数(最多)	表面检测	水平集网格	表面张力	密度修正	总计	
多液块融合	15000	3.69	33.32	4.35	6.19	102.56	
水滴浸润	5000	1.02	9.22	1.23	1.75	28.98	
滴水效果	10000	4.88	22.58	1.73	3.08	62.14	
液态巧克力流经兔子	30000	8.31	35.54	3.63	5.36	127.15	
水流冲击兔子	40000	14.82	86.69	11.12	22.16	336.61	

图 7 为本文方法多液块的融合仿真过程. 对四 团液块在失重环境下的融合过程进行了逼真的模 拟. 液块相互接触吸引,在表面张力的作用下,最终 融合为一个整体,形成了一个圆球形的水珠、多团液 块在无重力的作用下最终融合形成球形水珠的变化 过程,说明了本文表面张力包括近表面作用力与近 表面最小化表面积的有效性.对于此场景,本文还分 别对 Ghost SPH、Akinci^[4]方法、Yang 等人^[21]方法 进行了模拟. 仿真过程效果与本文方法相似, 无实质 不同,最终都形成了球形水珠.图8为四种方法最终 粒子分布效果图.除了 Ghost SPH 方法外,其他三 种方法最终都形成了完美的球形水珠.说明本文方 法与 Akinci、Yang 方法,在表面张力有效性方面相 同. 而 Ghost SPH 最终粒子分布不是完美的球形, 即没有实现表面积最小化.本文实现的 Ghost SPH

表面张力是基于颜色场的,说明基于颜色场的表面 张力效果不真实,分析其主要原因在于其易出错的 表面曲率与表面法向计算.尽管后三种方法在最终 效果上相似,但在实验过程中发现液块融合过程中 形成稳定球形水珠的速度不一致. 在本文实验环境 下,仿真时间步长 time_step=0.001 s, Akinci 方法 与本文方法约在800帧左右形成稳定球形水珠,而 Yang 方法约在 750 帧左右形成稳定球形水珠. 分析 造成此种差异的原因在于 Yang 方法在计算粒子间 作用时所使用的核半径更大,每一粒子的作用力范 围更大.其相当于在更加全局的角度计算每一粒子 的粒子间作用力,使得整体更快地收敛到全局表面 积最小. 不过虽然 Yang 方法比 Akinci 及本文方法 收敛更快,但是在某种意义上,更大的核半径则意味 着细节方面存在一定程度的缺失.



图 7 多液块融合仿真



图 8 多液块融合各方法最终粒子分布效果图

图 9 和图 10 分别为水滴在液固、液气交界面的 动态效果仿真.图 9是在地板上的水滴随粒子间作用 力强度系数 S 及最小化表面积项系数 γ 的变化过程. 本实验中设置 $S 与 \gamma$ 相等.其中四幅子图的 γ 值分别 为 3.5,2.5,1.0,0.5. 当 γ 较大时,水滴呈现近球形;

随着γ的变小,水滴慢慢浸润地板.该变化过程说明 了本文方法可对具有不同属性的不同流体实现有效 的表面张力仿真.图 10 是水滴聚集形成滴水效果的 仿真,其中 γ=0.4.这两个实验说明了本文方法可在 流体与固体、气体交互中产生逼真的表面张力效果.



图 10 滴水效果

图 11 为液态巧克力(深色)流经兔子的本文方 法与 WCSPH、Ghost SPH、Akinci、Yang 方法效果 对比.本文方法连续性更强,基本不会出现断裂现 象. 而 WCSPH、Ghost SPH、Akinci 方法仿真效果 不真实,具有明显的断裂或粒子非物理聚集现象.断 流现象在自然界中真实存在,但该场景仿真中的 流体断裂现象则是由于仿真计算过程中的数值不 稳定所致,说明了本文方法相较于 WCSPH、Ghost SPH、Akinci 方法数值计算更加稳定,仿真效果更 为真实.从仿真效果看,Yang 方法取得了与本文方 法相似的效果,说明了本文表面张力和密度修正方法的有效性.图 12 是该实验五种方法的计算时间对比.从图中可见,相比较 Ghost SPH,本文方法不仅耗时较少,且产生较好仿真效果.与 Akinci 方法相比,耗时稍多,但仿真效果更好.比较 Yang 方法,虽然耗时有所增加,但增加有限,且取得了比 Yang 方

法稍好的视觉效果,特别在流体细节方面.正如前 文所说,Yang 方法在计算粒子间作用力时使用了 更大的核半径,更大的核半径则意味着一定程度 上细节的缺失.本实验说明了本文方法在保证视 觉仿真效果的同时,一定程度上保持了较少的计算 时间.



图 11 液态巧克力流经兔子效果对比



图 12 液态巧克力流经兔子的四种仿真方法计算时间对比

图 13 是使用本文方法对水流冲击兔子模型进行的仿真.通过精准地获取流体表面粒子并计算其表

面法向,本文再对 SPH 流体的表面张力进行计算, 修正近表面粒子密度,获得了逼真的流体仿真效果.



图 13 水流冲击兔子效果仿真

6 结 论

借助快速精确检测流体表面粒子获得粒子法向 量,计算 level-set 函数构建水平集网格,本文提出一 种快速逼真流体表面张力仿真方法.方法依据自由 表面的特点,结合了近表面粒子作用力与最小化表 面积模型,并对近表面粒子进行密度修正,解决了流 体自由表面数值不稳定问题,实现了精确的表面张 力计算.通过前述实验结果可知,本文在精准地检测 表面粒子及计算法向量的基础上,对自由表面进行 了更好的处理,得到更加准确的表面张力计算.在提 高不多时间复杂度的基础上,获得更加逼真的流体 仿真效果.未来工作中,在计算时间上,拟将该方法 实现 GPU 计算并优化,提高运算速度;在方法上, 拟将泡沫建模仿真模块纳入本文方法中,实现快速 逼真的泡沫流体的仿真. Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. World Scientific, 2003, 369(30): 543-574

文

献

- [2] Schechter H, Bridson R. Ghost SPH for animating water. ACM Transactions on Graphics, 2013, 31(4): 61:1-61:8
- [3] Tartakovsky A, Meakin P. Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodynamics. Physical Review E, 2005, 72(2): 026301
- [4] Akinci N, Akinci G, Teschner M. Versatile surface tension and adhesion for SPH fluids. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): 1-8
- [5] Ren B, Li C, Yan X, et al. Multiple-Fluid SPH Simulation Using a Mixture Model. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(5): 1-11
- [6] Ren B, Jiang Y, Li C, et al. A simple approach for bubble modelling from multiphase fluid simulation. Computational Visual Media, 2015, 1(2): 171-181
- [7] Ren B, Yan X, Yang T, et al. Fast SPH simulation for

gaseous fluids. The Visual Computer: International Journal of Computer Graphics, 2016, 32(4): 523-534

- [8] Yan X, Jiang Y T, Li C F, et al. Multiphase SPH simulation for interactive fluids and solids. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(4): 79:1-79:11
- [9] Marrone S, Colagrossi A, Le T, et al. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers. Journal of Computational Physics, 2010, 229 (10): 3652-3663
- [10] Morris J P. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 33(3): 333-353
- [11] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications//Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH. San Diego, USA, 2003: 154-159
- [12] Qiang Hong-Fu, Chen Fu-Zhen, Gao Wei-Ran. Modified algorithm for surface tension in smoothed particle hydrody-namics and its application. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(s1): 37-42(m Chinese)
 (强洪夫,陈福振,高巍然. 基于 SPH 方法的表面张力修正 算法及其应用. 计算力学学报, 2011, 28(s1): 37-42)
- [13] Yu J, Wojtan C, Turk G, et al. Explicit mesh surfaces for particle based fluids. Computer Graphics Forum. 2012, 31(2pt4): 815-824
- [14] Xu Shi-Biao, Zhang Xiao-Peng, Chen Yan-Yun, et al. Interactive simulation for water drop effects. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2013, 25(8).
 1159-1168(in Chinese)

(徐士彪,张晓鹏,陈彦云等.交互式水滴效果模拟.计算机 辅助设计与图形学学报,2013,25(8):1159-1168)

- [15] Yang M, Li X, Liu Y, et al. A novel surface tension formulation for SPH fluid simulation. Visual Computer International Journal of Computer Graphics, 2017, 33(5): 1-10
- [16] Becker M, Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows//Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH, San Diego, USA, 2007: 209-217
- [17] Clavet S, Beaudoin P, Poulin P. Particle-based viscoelastic fluid simulation//Proceedings of the ACM SIGGRAPH/ Eurographics Symposium on Computer Animation, Los Angeles, USA, 2005; 219-228
- [18] Liu Dong, Guo Yin-Cheng, Lin Wen-Yi. Droplet deformation and surface tension modeling using the smoothed particle hydrodynamics method. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 2013(3): 384-388(in Chinese)

(刘栋,郭印诚,林文漪.液滴变形及表面张力模拟的光滑粒 子动力学方法.清华大学学报(自然科学版),2013(3):384-388)

- [19] He X, Wang H, Zhang F, et al. Robust simulation of sparsely sampled thin features in SPH-based free surface flows. ACM Transactions on Graphics, 2014, 34(1): 7:1-7:9
- [20] Wang X K, Ban X J, Zhang Y L, et al. Surface tension model based on implicit incompressible smoothed particle hydrodynamics for fluid simulation. Journal of Computer Science and Technology, 2017, 32(6): 1186-1197
- [21] Yang T, Martin R R, Lin M C, et al. Pairwise force SPH model for real-time multi-interaction applications. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2017, PP(99): 1
- [22] Monaghan J J. SPH without a tensile instability. Journal of Computational Physics, 2000, 159(2): 290-311
- [23] Oger G, Doring M, Alessandrini B, et al. An improved SPH method: Towards higher order convergence. Journal of Computational Physics, 2007, 225(2): 1472-1492
- [24] Kulasegaram S, Bonet J, Lewis R W, et al. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. Computational Mechanics, 2004, 33(4): 316-325
- [25] Feldman J, Bonet J. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 72(3): 295-324
- [26] Ihmsen M, Akinci N, Becker M, et al. A parallel SPH implementation on multi-core CPUs. Computer Graphics Forum, 2011, 30(1): 99-112
- [27] Fujisawa M, Miura K T. An efficient boundary handling with a modified density calculation for SPH. Computer Graphics Forum, 2015, 34(7): 155-162
- [28] Doring M. Development of a SPH Method for Free Surface Applications in Hydrodynamics [Ph. D. dissertation]. Centrale Nantes, France, 2005
- [29] Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1996, 139(1-4): 375-408
- [30] Akinci N, Ihmsen M, Akinci G, et al. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): 1-8

XU Biao, M. S. His research interests include computer simulation and image processing.

LIAO Xiang-Yun, Ph. D. His research interests include image processing, computer simulation, and virtual reality.



YUAN Zhi-Yong, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include virtual reality and humancomputer interaction, computer vision and machine learning, and embedded system and Internet of Things technology.

Background

It is challenging for smoothed particle hydrodynamics (SPH) to simulate free-surface liquids, which suffers from surface tension artifact and particles clumping. The underlying reason is that the numerical fractures inherently exist in SPH, which destroys most of these appealing visual effects near free surface. Surface tension is essential for the realistic visual effects for SPH based fluid simulation. However, current methods of surface particle detection and surface normal and tension definition are unable to obtain realistic surface tension simulation. SPH also suffers from inherent tensile instability, which results from the erroneous density computation at fluid-air and fluid-solid interfaces. Miscalculated density values will lead to negative pressures in numerical perspective, and further characterize as particle clumping. The existing surface tension models such as the continuum surface force (CSF) model and the interparticle interaction force (IIF) model both have their own flaws. Some methods based on CSF model suffer from large error in curvature calculation at some parts of free surface. Some methods which only based on IIF model cannot guarantee the least surface area.

In this paper, we propose a fast and realistic method for surface tension simulation in SPH fluid. First, the surface particles is efficiently detected and the surface normal is precisely defined. Then we construct the level set grid to modify the density at the boundary. Finally, we propose the near-surface interparticle force to compute the surface tension. Experimental results demonstrate that our method can achieve fast and realistic surface tension simulation in SPH fluid.

 Jutation at
 This work was supported by the National Natural Science

 Justive values
 Foundation of China (Grant Nos. 61373107, 61233012), the

 Justive values
 Science and Technology Plan Project of Wuhan (Grant

 he existing
 No. 20160101010022), the Outstanding Youth Foundation

 Justive force
 of Shenzhen Institutes of Advanced Technology, Chinese

 Academy of Sciences (Grant No. 2017059), the Major Project
 of Collaborative Innovation in Industry and Research of

 Guangzhou (Grant No. 201704020141) and the Subject Layout
 Project of Shenzhen (Grant No. JCYJ20160429190300857).