

# 最小负载受限 $k$ -中位问题的近似方案

张震<sup>1,2)</sup> 冯启龙<sup>3,2)</sup> 徐雪松<sup>1,2)</sup> 刘利枚<sup>1,2)</sup> 杨俊丰<sup>1,2)</sup> 石峰<sup>3,2)</sup>

<sup>1)</sup>(湖南工商大学 前沿交叉学院, 长沙 410205)

<sup>2)</sup>(湘江实验室, 长沙 410205)

<sup>3)</sup>(中南大学 计算机学院, 长沙 410083)

**摘要** 给定度量空间中的用户集合 $\mathcal{C}$ 和带有最小负载 $\tau: \mathcal{F} \rightarrow (0, |\mathcal{C}|]$ 的设施集合 $\mathcal{F}$ 以及正整数 $k$ , 最小负载受限 $k$ -中位问题的一个可行解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 由满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的开设设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 和满足 $|\sigma^{-1}(f)| \geq \tau(f) \forall f \in \mathcal{H}$ 的映射 $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ 组成。 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 的费用为 $\sum_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma(c))$ , 其中,  $\delta(c, \sigma(c))$ 为 $c$ 与 $\sigma(c)$ 之间的距离。最小负载受限 $k$ -中位问题的目标是找到费用最低的可行解。本文以 $k$ 作为固定参数研究最小负载受限 $k$ -中位问题的求解算法。本文首先利用 $D$ -采样方法寻找与最优解中的开设设施较为接近的用户, 然后围绕这些用户划分空间并选取开设设施。给定满足 $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\varepsilon \in (0, 1)$ , 本文结合上述思路和降维方法提出了时间复杂度为 $O(ndk + (k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}} n^{O(1)})$ 的 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法, 其中,  $n = |\mathcal{C} \cup \mathcal{F}|$ 。此前, 人们在固定参数时间内得到的关于该问题的最好近似结果为 $3 + \varepsilon$ ; 只有在设施可以被开设在欧几里得空间中的任意位置且所有设施最小负载都相等的实例中, 存在固定参数时间的 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法。

**关键词** 固定参数算法; 近似算法; 设施选址;  $k$ -中位;  $D$ -采样

中图法分类号 TP301

## Approximation Schemes for Lower-Bounded $k$ -Median

ZHANG Zhen<sup>1,2)</sup> FENG Qi-Long<sup>3,2)</sup> XU Xue-Song<sup>1,2)</sup> LIU Li-Mei<sup>1,2)</sup> YANG Jun-Feng<sup>1,2)</sup> SHI Feng<sup>3,2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Advanced Interdisciplinary Studies, Hunan University of Technology and Business, Changsha, 410205)

<sup>2)</sup>(Xiangjiang Laboratory, Changsha, 410205)

<sup>3)</sup>(School of Computer Science, Central South University, Changsha, 410083)

**Abstract** Clustering a set of clients according to their distances to a selected set of opened facilities is a frequently encountered task in theoretical computer science, where the following trade-off needs to be considered: We want to connect each client to a nearby opened facility, while only a limited number of facilities can be opened. In this paper we consider an extensively studied problem that formalizes this task, called lower-bounded  $k$ -median. An instance  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$  of the problem consists of a set  $\mathcal{C}$  of clients, a set  $\mathcal{F}$  of facilities, and a positive integer  $k$ , where the clients and facilities from  $\mathcal{C} \cup \mathcal{F}$  are in a metric space, and each  $f \in \mathcal{F}$  is associated with a lower bound  $\tau(f) \in (0, |\mathcal{C}|]$ . A feasible solution  $(\mathcal{H}, \sigma)$  to the instance is specified by a subset  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  satisfying  $|\mathcal{H}| \leq k$  and a mapping  $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$  satisfying  $|\sigma^{-1}(f)| \geq \tau(f)$  for each  $f \in \mathcal{H}$ . The cost of  $(\mathcal{H}, \sigma)$  is  $\sum_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma(c))$ , where  $\delta(c, \sigma(c))$  is the distance from  $c$  to  $\sigma(c)$ . The problem aims to find a feasible solution with minimal cost. Designing algorithms for the lower-bounded  $k$ -median problem remains a vibrant area of research owing to its significance in many fields related to facility location and clustering, including

本课题得到国家自然科学基金项目(62202161, 62376092, 62172446)、国家重点研发计划项目(2021YFC3300603)、湖南省自然科学基金项目(2023JJ40240)、湖南省教育厅科学研究项目(23B0597)、湘江实验室开放课题(22XJ02002, 22XJ03005)资助。张震, 博士, 讲师, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为组合优化、近似算法。E-mail: csuzz@foxmail.com。冯启龙(通信作者), 博士, 教授, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为理论计算机科学。E-mail: csufeng@mail.csu.edu.cn。徐雪松(通信作者), 博士, 教授, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为复杂系统优化、计算机算法优化。E-mail: xuxs@hutb.edu.cn。刘利枚, 博士, 教授, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为计算智能、隐私计算。E-mail: seagullm@163.com。杨俊丰, 博士, 副教授, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为计算机算法优化、隐私计算。E-mail: b12100031@hnu.edu.cn。石峰, 博士, 副教授, 计算机学会(CCF)会员, 主要研究领域为图论、固定参数算法。E-mail: fengshi@csu.edu.cn。

transportation planning, network optimization, and privacy-preserving computing. In this paper we study the lower-bounded  $k$ -median problem for the case where the clients and facilities are in  $d$ -dimensional Euclidean space, under the assumption that  $k$  is small. This assumption is reasonable as the maximum number of opened facilities is much smaller than the input size in most practical scenarios regarding the problem. Given an instance of the problem with a total of  $n$  clients and facilities, it is easy to show that an optimal solution can be found by brute-force enumeration in  $n^{O(k)}$  time, but we ask: What can be done in fixed-parameter tractable time parameterized by  $k$  (i.e.,  $n^{O(1)h(k)}$  time for a positive function  $h$ )? Our algorithm starts with selecting a set of clients using  $D$ -sampling. Given a small positive constant  $\varepsilon$ , we prove that a set of  $O(k\varepsilon^{-3})$  clients selected with  $D$ -sampling ensures the inclusion of clients proximate to the facilities opened in an optimal solution. By partitioning a set of closed balls centered at these  $O(k\varepsilon^{-3})$  clients, we construct a small candidate set of opened facilities. We demonstrate that enumerating this candidate set yields a  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithm with running time exponential in  $k$  and the dimensionality of the space. Combining this algorithm with a dimensionality-reduction method that maps the clients and facilities to  $\varepsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log n)$ -dimensional Euclidean space, we give a  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithm with running time  $O\left(ndk + (k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}}n^{O(1)}\right)$  for the lower-bounded  $k$ -median problem. The previous best fixed-parameter tractable approximation guarantee for the problem is a ratio of  $3 + \varepsilon$ , and  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithms with similar running time exist only in the case where the facilities can be opened at any location of the space and are uniform in the associated lower bounds. Our primary technical contribution, crucial for achieving the fixed-parameter tractable time  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithm, lies in a novel approach to reducing the solution search space. We believe this approach holds potential applicability in other clustering problems and is of independent interest.

**Key words** fixed-parameter algorithms; approximation algorithms; facility location;  $k$ -median;  $D$ -sampling

## 1 引言

聚类是无监督学习领域中的重要基本问题之一，其目的是将给定的用户集合划分为若干个子集，从而使同一子集中的用户之间具有较高的相似度、不同子集中的用户尽可能相异。在数据分布特征尚未明确的情况下，求解聚类问题可以揭示数据对象之间的联系和区别，发现其内在的结构和规律。因此，聚类问题的求解算法在信息科学的各个应用领域中发挥重要作用。

一种被广泛应用的聚类方式是选取一组开设设施（或称为聚类中心）并将每个用户连接到一个距离较近的开设设施上。在利用这一方式进行聚类分析时，很多应用领域都对设施连接的用户数量施加下限约束。例如，在涉及隐私保护的聚类应用中，人们要求被划分到每个类别的数据项都超过给定下限，以弱化单个数据项与其类别信息之间的关联关系<sup>[1,2]</sup>。此外，在基于聚类算法确定物流方案时，为了压缩运输成本，被选取的每个承运商都需要运输一定数量的货物<sup>[3]</sup>。人们针对这些应用提出了最小负载受限 $k$ -中位（Lower-Bounded  $k$ -Median）问题。给定度量空间中的一组

用户和一组带有最小负载的设施以及正整数 $k$ ，该问题要求开设最多 $k$ 个设施并将每个用户连接到一个开设设施上，使得每个开设设施连接的用户数量不低于其最小负载且用户的连接费用之和最小，其中，每个用户的连接费用是其与对应设施之间的距离。该问题的形式化定义在第3节（定义1）中给出。

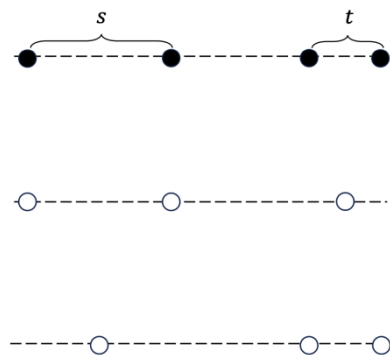


图1 开设设施数量上限为3的实例

人们基于最小负载受限 $k$ -中位问题刻画了隐私计算<sup>[1,2]</sup>、物流规划<sup>[3]</sup>、网络优化<sup>[4,5]</sup>等诸多领域的求解目标，并在最小负载约束下利用迭代优化<sup>[6]</sup>和线性规划舍入<sup>[3]</sup>等方法提出了一系列启发式聚类算法。这些算法可以在有限时间内输出实例的局部

最优解，但人们无法从理论上严格证明这些算法的正确性以及局部最优解相对于最优解的偏离程度。例如，Kanungo 等人<sup>[7]</sup>构造的实例说明，在使用迭代调整开设设施和用户连接方式以降低费用的迭代优化方法<sup>[6]</sup>时，局部最优解与最优解之间费用的比值可能与用户之间的距离相关，如图 1 所示（其中：实例中的点位于一条直线上；从上到下依次是用户集合、最优解中的开设设施集合以及局部最优解中的开设设施集合；局部最优解与最优解之间费用的比值是 $st^{-1}$ ）。

实际应用中的需求与理论研究之间的差距已经引起人们对最小负载受限 $k$ -中位问题的高度重视。近年来，人们开始从近似算法的角度研究最小负载受限 $k$ -中位问题。近似算法与启发式算法的区别在于前者的解相对于最优解的偏离程度可以在理论上被严格证明（偏离程度通常用近似比来表示）。鉴于聚类问题在实际应用中的大部分实例处理的是欧几里得（Euclidean）结构数据，人们以开设设施数量上限 $k$ 作为固定参数，在欧几里得空间中为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了一系列固定参数时间（ $n^{O(1)}h(k, \varepsilon)$ ）时间，其中， $h$ 为任意正值函数， $n$ 为设施与用户数量之和， $\varepsilon$ 为 $(0,1)$ 内的任意常数）的 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法<sup>[8-11]</sup>。然而，这些算法将用户子集的中位点作为与其对应的最优开设设施，只适用于设施可以被开设在欧几里得空间任意位置且所有设施最小负载都相等的连续型实例。在设施集合规模有限且设施最小负载不一致的离散型实例中，由于用户子集的中位点不一定能作为可行解中的开设设施，如何利用欧几里得空间的性质提出相似的近似结果还是未知的。

针对欧几里得空间中最小负载受限 $k$ -中位问题现有算法的局限性，本文基于空间性质提出了改进的求解思路。本文证明了利用 $D$ -采样方法<sup>[12]</sup>选取的 $O(k\varepsilon^{-3})$ 个用户中包含与最优解中的开设设施较为接近的用户。利用这一结论，本文围绕 $D$ -采样方法生成的 $O(k\varepsilon^{-3})$ 个用户划分空间并选取开设

设施，为最小负载受限 $k$ -中位问题的离散型实例提出了时间复杂度以指数形式依赖于 $k$ 和空间维度的 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法。结合该算法和针对高维实例提出的降维方法，本文在 $d$ -维欧几里得空间中提出了时间复杂度为 $O\left(ndk + (k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}}n^{O(1)}\right)$ 的 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法。（如定理 1 所述，具体求解思路在第 4 节中给出）。该结果改进了此前人们在更一般化的度量空间中利用相近的固定参数时间得到的关于离散型实例的 $(3 + \varepsilon)$ -近似比<sup>[11,13]</sup>。

本文主要贡献概括如下。

(1) 本文利用欧几里得空间的性质为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了改进的算法设计思路：围绕与最优解中的开设设施距离较近的用户划分空间并构造候选开设设施集合。本文基于该集合的子集为低维空间中的实例构造了 $(1 + \varepsilon)$ -近似解。

(2) 本文为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了有效的降维方法，将高维空间中的实例映射到了 $\varepsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log n)$ -维空间中。

(3) 本文结合低维实例求解算法和降维方法为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了近似比为 $1 + \varepsilon$ 的固定参数时间近算法。在设施集合规模有限且设施最小负载不一致的情况下，这是关于该问题的第一个 $(1 + \varepsilon)$ -近似结果。这对于进一步完善最小负载受限 $k$ -中位问题的求解技术以及更准确地刻画其求解难度具有重要意义。

本文第 2 节概述最小负载受限 $k$ -中位问题及相关问题近似算法研究进展；第 3 节给出本文使用的基本定义及引理；第 4 节概述本文的算法设计思路；第 5 节阐述基于随机采样的关键用户挖掘方法；第 6 节围绕关键用户划分空间并构造候选开设设施集合；第 7 节基于候选开设设施集合给出低维实例求解算法；第 8 节阐述高维实例的降维方法；第 9 节对全文进行总结并阐述下一步的研究方向。

表 1 负载受限聚类问题近似算法相关工作

	最小负载受限		容量受限	
	多项式时间	固定参数 ( $k$ ) 时间	多项式时间	固定参数 ( $k$ ) 时间
$k$ -中位	$516 + \varepsilon^{[14]}$	$3 + \varepsilon^{[11,13]}$	$O(\log k)^{[15]}$	$3 + \varepsilon^{[16]}$
$k$ -平均	—	$9 + \varepsilon^{[11,13]}$	$O(\log k)^{[15]}$	$9 + \varepsilon^{[16]}$
$k$ -中心	$2^{[2]}$	—	$5^{[17]}$	$2^{[18]}$
设施选址	$82.6^{[19]}$	—	$9.0927^{[20]}$	—

## 2 相关工作

近年来，人们根据实际应用中的负载约束扩展 $k$ -中位 ( $k$ -Median)、 $k$ -平均 ( $k$ -Means)、 $k$ -中心 ( $k$ -Center)、设施选址 (Facility Location) 等聚类问题，从近似算法的角度研究了最小负载受限聚类问题以及在每个开设设施所连接的用户数量上施加上限的容量受限 (Capacitated) 聚类问题，如表 1 所示。目前，只有在实例的部分约束条件可以被适度违反的情况下，存在关于最小负载受限 $k$ -平均问题和容量受限 $k$ -中位问题的多项式时间常数近似结果<sup>[1,21]</sup>。

本文主要关注最小负载受限 $k$ -中位问题的近似

算法。Han 等人<sup>[22]</sup>与 Wu 等人<sup>[14]</sup>根据最小负载约束构造设施开设费用，将最小负载受限 $k$ -中位问题实例归约为设施选址问题实例，并基于此提出了  $(3.25 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \alpha)$ -双标准近似算法，其中， $\alpha$ 为(0,1)内的任意常数。该算法所得解的费用不超过最优值的  $3.25 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$  倍，但只能保证每个设施所连接的用户数量超过其最小负载的 $\alpha$ 倍。Wu 等人<sup>[14]</sup>根据该双标准近似解选取实例中的关键设施，并利用这些设施确定用户连接方式、提出了  $(516 + \varepsilon)$ -近似算法。在允许将一个用户连接到多个设施的情况下，Arutyunova 和 Schmidt<sup>[1]</sup>将该近似结果改进为  $8 + \varepsilon$ 。

表 2 最小负载受限 $k$ -中位问题近似算法相关工作

空间	实例类型	近似比	时间复杂度	限制条件	文献	
$\mathbb{R}^d$	连续型	$1 + \varepsilon$	$2^{(k\varepsilon^{-1})^{O(1)}} n^{O(1)} d$	所有设施最小负载都相等且 $\mathcal{F} = \mathbb{R}^d$	[9]	
			$(k\varepsilon^{-1})^{O(k\varepsilon^{-1})} n(n^2 + d)$		[8]	
			$(k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}} (nd + (\varepsilon^{-1} \log R)^{O(k)})_1$		[10]	
			$(k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}} (nd + (d \log n)^{O(1)})$		[11]	
度量空间	离散型	$8 + \varepsilon$	$(O(1), O(1))$ - 双标准近似	允许实例的解适度违反设施 最小负载约束	[14,22]	
			$516 + \varepsilon$	$(nk\varepsilon^{-1})^{O(1)}$	—	[14]
			$7.2 + \varepsilon$	$(nk\varepsilon^{-1})^{O(1)}$	允许实例的解将一个用户连 接到多个设施	[1]
			$3.736 + \varepsilon$	$(k\varepsilon^{-1})^{O(k)} n^{O(1)}$	所有设施最小负载都相等	[10]
			$3 + \varepsilon$	$(k\varepsilon^{-1})^{O(k)} n^{O(1)}$	所有设施最小负载都相等	[23]
$\mathbb{R}^d$	离散型	$1 + \varepsilon$	$O(ndk + (k\varepsilon^{-1})^{k\varepsilon^{-O(1)}} n^{O(1)})$	—	本文	

1.  $R$ 表示实例的点之间最大距离和最小非零距离的比值

在涉及聚类的实际应用中，开设设施数量上限 $k$ 通常远小于实例规模。鉴于此，人们以 $k$ 作为固定参数，广泛研究了最小负载受限 $k$ -中位问题的固定参数时间近似算法。当所有设施最小负载都相等时，Ding<sup>[10]</sup>和 Bera 等人<sup>[23]</sup>在 $k$ -中位问题实例解的基础上调整用户的连接方式，分别提出了近似比为 $7.2 + \varepsilon$ 和 $3.736 + \varepsilon$ 的固定参数时间近似算法。此后，在允许设施最小负载不一致的情况下，Bandyapadhyay 等人<sup>[11]</sup>和 Goyal 等人<sup>[13]</sup>分别基于核心集构造和随机采样技术提出了时间复杂度相同的 $(3 + \varepsilon)$ -近似算法。此外，人们还为要求移除异常点的鲁棒聚类（Robust Clustering）<sup>[24,25]</sup>、考虑聚类结果公平性的公平聚类（Fair Clustering）<sup>[26]</sup>、以用户簇半径之和为目标函数的最小半径和（Minimum Sum-of-Radii）<sup>[27,28]</sup>等一系列聚类问题提出了固定参数时间的求解算法。这些算法考虑一般化度量空间中的实例，因受限聚类问题的参数复杂性而只能保证较高的常数近似比。实际上，当以 $k$ 作为固定参数且间隙指数时间假设<sup>[29]</sup>成立时，Cohen-Addad 等人<sup>[30]</sup>证明了即使在不考虑额外约束条件的情况下， $k$ -中位问题固定参数时间算法的近似比也不可能低于 $1 + 2e^{-1}$ 。然而，这一复杂性结果只在一般化的度量空间中成立，其并未排除在更特殊的欧几里得空间中得到更好近似结果的可能性。本文基于欧几里得空间的性质估计最优解中开设设施的位置并确定其搜索范围，为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了改进的固定参数时间近似算法，所得到的近似比明显低于 Cohen-Addad 等人<sup>[30]</sup>在度量空间中给出的固定参数时间 $(1 + 2e^{-1})$ -近似下界，如定理 1（第 8 章）和表 2 所述。

本文算法与 Bhattacharya 等人<sup>[8]</sup>为最小负载受限 $k$ -中位问题提出的固定参数时间 $(1 + \varepsilon)$ -近似算法较为相似。该算法迭代地利用 Arthur 和 Vassilvitskii<sup>[12]</sup>提出的 $D$ -采样方法选取 $k$ 个规模为 $O(k\varepsilon^{-6})$ 的用户集合。对于被选取的每个集合，该算法枚举其规模为 $O(\varepsilon^{-4})$ 的子集以寻找最优解中的某个开设设施所连接的用户，并将这些用户的近似中位点作为近似解中的开设设施。正如前文所述，文献[8]中给出的算法在设施开设位置受限且设施最小负载不相等的情况下不能构造可行解。本文针对该情况为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了不同的求解思路，围绕 $D$ -采样方法生成的 $O(k\varepsilon^{-3})$ 个用户压缩解搜索空间，在固定参数时间

内寻找实例的近似解。

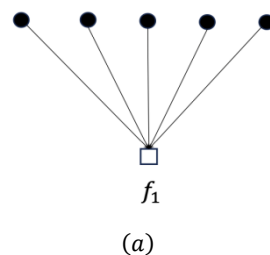
### 3 基本定义及引理

给定大于 1 的整数 $t$ ，定义 $[t] = \{1, \dots, t\}$ 。给定 $\mathbb{R}^d$ 中的两个集合 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 中的两个点 $x$ 和 $y$ ，令 $\delta(x, y) = \|x - y\|_2$ 表示 $x$ 和 $y$ 之间的距离，令 $\delta(\mathcal{A}, x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta(a, x)$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 中的点与 $x$ 之间的距离之和，并令 $\delta(y, \mathcal{B}) = \min_{b \in \mathcal{B}} \delta(y, b)$ 表示 $y$ 与 $\mathcal{B}$ 中的点之间的最短距离。此外，定义 $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta(a, \mathcal{B}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \min_{b \in \mathcal{B}} \delta(a, b)$ 。给定欧几里得空间中的一个用户集合 $\mathcal{C}'$ 和一个带有最小负载的开设设施集合 $\mathcal{H}$ ，令 $\Delta(\mathcal{C}', \mathcal{H}, \tau)$ 表示 $\mathcal{C}'$ 中用户的连接费用之和 $\sum_{c \in \mathcal{C}'} \delta(c, \sigma(c))$ 在满足 $\sigma: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{H}$ 且 $|\sigma^{-1}(f)| \geq \tau(f) \forall f \in \mathcal{H}$ 的前提下所能达到的最小值，其中， $\tau(f)$ 表示 $f$ 的最小负载（如果不存在满足该约束条件的映射 $\sigma$ ，则令 $\Delta(\mathcal{C}', \mathcal{H}, \tau) = \infty$ ）。给定一个命题 $P$ ，令 $\Pr[P]$ 表示 $P$ 成立的概率。给定一个多重集合 $\mathcal{B}$ ，令 $|\mathcal{B}|$ 和 $||\mathcal{B}||$ 分别表示 $\mathcal{B}$ 中的元素数量和唯一元素数量。下面给出最小负载受限 $k$ -中位问题的定义。

**定义 1**（最小负载受限 $k$ -中位问题）。

输入：最小负载受限 $k$ -中位问题的一个实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 。该实例包含度量空间中的一个用户集合 $\mathcal{C}$ 与一个设施集合 $\mathcal{F}$ 和一个正整数 $k$ ，其中，每个设施 $f \in \mathcal{F}$ 都有一个最小负载 $\tau(f) \in (0, |\mathcal{C}|]$ 。

输出：实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 的最小费用可行解。该实例的一个可行解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 开设一个规模不超过 $k$ 的设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ，并将每个用户 $c \in \mathcal{C}$ 连接到一个开设设施 $\sigma(c) \in \mathcal{H}$ 上，使得任意设施 $f \in \mathcal{H}$ 都满足 $|\sigma^{-1}(f)| \geq \tau(f)$ 。可行解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 的费用为 $\sum_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma(c))$ 。



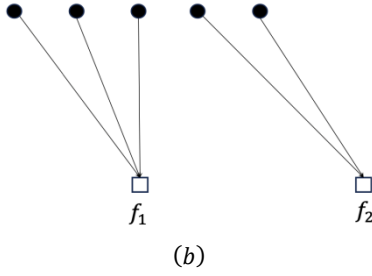


图 2 (a) 开设设施 $f_1$ 时用户的连接方式；(b) 开设设施 $f_1$ 与 $f_2$ 时用户的连接方式，其中， $\tau(f_2) = 2$ 。可以看出，在该实例中增加开设设施数量会增大某些用户的连接费用。

本文令 $\epsilon$ 表示 $(0,0.5]$ 内的一个常数。令 $I = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 表示最小负载受限 $k$ -中位问题的一个实例，其中， $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 且 $|\mathcal{C} \cup \mathcal{F}| = n$ 。令 $(\mathcal{H}^*, \sigma^*)$ 表示 $I$ 的一个最优解，其中， $\mathcal{H}^* = \{f_1^*, \dots, f_{k^*}^*\}$ 。 $\mathcal{F}$ 中每个开设设施所连接的用户数量都要超过其最小负载，因此，最优解 $(\mathcal{H}^*, \sigma^*)$ 的开设设施数量 $k^*$ 可能小于 $k$ ，如图 2 所示。给定整数 $i \in [k^*]$ ，定义 $\mathcal{C}_i^* = \{c \in \mathcal{C} : \sigma^*(c) = f_i^*\}$ ，并令 $\mathbb{C}^* = \{\mathcal{C}_1^*, \dots, \mathcal{C}_{k^*}^*\}$ 。令 $opt = \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}^*, \tau) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma^*(c))$ 表示实例 $I$ 最优解的费用。

下面给出本文在分析求解算法的性能时用到的一些引理，其中，引理 1 用来分析算法的时间复杂度，引理 2 和引理 3 用来分析用户的连接费用。

**引理 1.** 给定满足 $s > t > 1$ 的两个实数 $s$ 和 $t$ ，不等式 $\log^t s \leq s \cdot t^{O(t)}$ 成立。

(证明参考附录)。

**引理 2** (切尔诺夫界<sup>[31]</sup>)。给定一组相互独立的随机变量 $x_1, \dots, x_t$ 和实数 $p \in (0,1)$ ，如果 $x_s \in \{0,1\}$ 和 $\Pr[x_s = 1] \geq p$ 对于任意 $s \in [t]$ 都成立，则任意实数 $\lambda \in (0,1)$ 都满足不等式 $\Pr[\sum_{s=1}^t x_s < (1-\lambda)pt] < e^{-\lambda^2 pt/2}$ 。

**引理 3** (阿贝尔引理<sup>[32]</sup>)。给定一个大于 1 的整数 $m$ 和规模大于 $m$ 的两个数列 $\{x_t\}$ 与 $\{y_t\}$ ，等式 $\sum_{t=1}^m x_t y_t = X_m y_m - \sum_{t=1}^{m-1} X_t (y_{t+1} - y_t)$ 成立，其中， $X_t = \sum_{t'=1}^t x_{t'}$ 。

本文的求解算法在选取开设设施时为设施集合构造数据网 (Data Net)，其定义如下。

**定义 2** ( $\lambda$ -数据网<sup>[33]</sup>)。给定正实数 $\lambda$ 和集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ，如果集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 满足以下条件，则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的 $\lambda$ -数据网：

- (1)  $\mathcal{B}$ 中任意两个不相同的点 $a$ 和 $b$ 都满足不等式 $\delta(a, b) > \lambda$ ；
- (2) 给定任意 $a \in \mathcal{A}$ ，都存在一个满足不等

式 $\delta(a, b) < \lambda$ 的点 $b \in \mathcal{B}$ 。

Har-Peled 和 Mendel<sup>[34]</sup>证明了在低维欧几里得空间中，可以在近线性时间内构造给定集合的数据网，如引理 4 所述。

**引理 4** ([34])。给定正实数 $\lambda$ 和集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ，可以在 $|\mathcal{A}| \log |\mathcal{A}| 2^{O(d)}$ 时间构造关于 $\mathcal{A}$ 的一个规模不超过 $(\lambda^{-1} \max_{a,b \in \mathcal{A}} \delta(a, b))^d$ 的 $\lambda$ -数据网。

## 4 算法概述

如前文所述，当 $k$ 为固定参数时，关于最小负载受限 $k$ -中位问题离散型实例的现有最好近似结果是文献[11,13]给出的 $(3 + \epsilon)$ -近似比。文献[11,13]基于 Cohen-Addad 等人<sup>[30]</sup>提出的算法设计框架构造开设设施的搜索空间。具体来说，对于最优解中的每个开设设施，这些算法在用户集合中寻找与其距离最近的“引导点”，并在以引导点为中心、外圆及内圆半径接近于引导点与对应设施之间距离的环形空间中开设最小负载最低的设施。通过这一方式构造的近似解与最优解之间费用的差值可能与环形空间的直径相关，如图 3 所示。图 3 中的实例要求将 $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ 中的用户连接到 $\{f^*, f\}$ 中的一个开设设施上，其中， $\{c_1, \dots, c_n\}$ 中的用户位于相同位置，且 $\tau(f) < \tau(f^*) < n + 1$ 。该实例的最优解将 $f^*$ 作为开设设施。文献[11,13]中的算法将与 $f^*$ 距离最近的用户 $c_{n+1}$ 作为引导点，并在以 $c_{n+1}$ 为中心的环形空间中选取最小负载最低的设施 $f$ 作为开设设施。可以得出，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \delta(c_i, f)}{\sum_{i=1}^{n+1} \delta(c_i, f^*)} = \frac{(3-2\epsilon)n+1-\epsilon}{n+1-\epsilon} \# \\ = 3 - O(\epsilon). \quad \#(1)$$

等式(1)说明，文献[11,13]中的算法对于实例 $(\{c_1, \dots, c_{n+1}\}, \{f^*, f\}, 1, \tau)$ 的近似比为 $3 - O(\epsilon)$ 。

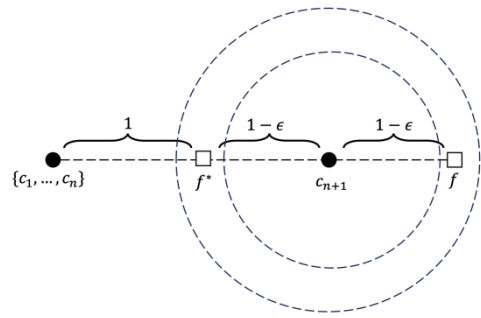


图 3 实例 $(\{c_1, \dots, c_{n+1}\}, \{f^*, f\}, 1, \tau)$

本文在欧几里得空间中给出的算法基于数据网的性质将开设设施搜索空间划分为一组较小的网格单元，以使得最优解中的每个开设设施与位于相同网格中的其它设施之间有较短距离。通过将每个网格单元中最小负载最低的设施作为候选开设设施，本文可以基于候选开设设施集合的一个子集构造与实例最优解较为接近的近似解。当处理图 3 中的实例时，由于  $f^*$  是其所在小规模网格单元中的唯一设施，本文提出的算法能将  $f^*$  添加到候选开设设施集合并通过遍历该集合得到实例的最优解。为了降低候选开设设施集合规模、在构造网格单元的情况下依然保证算法的时间复杂度为固定参数时间，本文一方面松弛了现有算法设计思路对开设设施搜索空间中心点的要求（本文不要求寻找与最优解中的开设设施距离最近的用户，对搜索空间中心点的要求如引理 11 所述），并利用随机采样方法在欧几里得空间中将考虑的候选中心点数量由文献 [11] 中的  $(k\epsilon^{-1}\log n)^{O(1)}$  和文献 [13] 中的  $2^{k+O(\log(k\epsilon^{-1}))}$  降低为  $O(k\epsilon^{-3})$ ，另一方面利用降维方法将实例映射到  $\epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log n)$ -维欧几里得空间中。下面概述本文的算法设计思路。

#### 4.1 随机采样

本文基于的  $D$ -采样方法<sup>[12]</sup>选取  $\mathcal{C}$  的一个子集，并围绕该子集中的用户构造小规模解搜索空间。每个数据点被  $D$ -采样方法选取的概率正比于该点和已经被选取的点之间的距离。当用户集合是设施集合的子集时，Arthur 和 Vassilvitskii<sup>[12]</sup> 基于  $D$ -采样方法生成的  $k$  个点为  $k$ -中位问题构造了  $O(\log k)$ -近似解。此后，Aggarwal 等人<sup>[35]</sup> 和 Wei<sup>[36]</sup> 在相同问题中证明了  $D$ -采样方法生成的  $O(k)$  个点可以组成违反开设设施数量上限的双标准常数近似解。然而，这些关于  $D$ -采样方法的近似保证依赖于  $k$ -中位问题中每个设施连接的用户数量不受限制的假设，在更一般化的最小负载受限  $k$ -中位问题中并不成立。本文在第 5 节中为  $D$ -采样方法提出了新的性能保证，在设施最小负载受限的情况下证明了基于该采样方法选取的  $O(k\epsilon^{-3})$  个用户中包含距离最优解中的开设设施较近的用户（引理 11）。

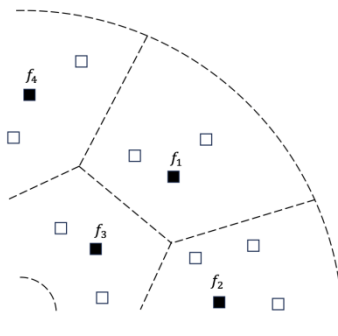


图 4 基于数据网成员构造的维诺单元

#### 4.2 解搜索空间压缩

对  $D$ -采样方法的分析为本文压缩解搜索空间提供了明确的思路。本文在第 6 节中利用基于  $D$ -采样方法选取的  $O(k\epsilon^{-3})$  个用户估计最优解中开设设施的位置并构造候选开设设施集合。具体来说，本文在以这些用户为中心的一组球形空间中为设施集合构造数据网。由数据网的定义（定义 2）可知，设施集合的数据网中存在与最优解中的开设设施较为接近的设施。因此，在不考虑设施最小负载约束的情况下可以将设施集合的数据网作为近似解的候选开设设施集合。然而，由于数据网中的设施可能有较高的最小负载，我们无法保证能利用该集合得到实例的可行解。针对这一问题，本文以数据网中的设施作为基点为设施集合构造维诺（Voronoi）图，并在每个维诺单元中选取最小负载最低的设施作为候选开设设施，如图 4 所示。本文在第 6 节中证明了基于该方法选取的设施集合包含实例的一个  $(1 + O(\epsilon))$ -近似解所开设的所有设施（引理 12）。

#### 4.3 近似解构造

本文利用在第 6 节中选取的候选开设设施构造实例的近似解。给定一个满足  $|\mathcal{H}| \leq k$  的开设设施集合  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ，构造近似解时需要确定用户集合与设施集合之间的连接映射  $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ 。为了构造这一映射，本文在以  $\mathcal{C} \cup \mathcal{H}$  作为点集的二部图中求解最小费用循环流（Minimum-Cost Circulation）问题，其定义如下。

**定义 3**（最小费用循环流问题<sup>[37]</sup>）。

输入：最小费用循环流问题的一个实例  $((V, E), h, u, l)$ 。该实例包含一个以  $V$  为点集、 $E$  为边集的有向图  $(V, E)$ ，其中，每条边  $(a, b) \in E$  都有一个费用  $h(a, b) \geq 0$ 、一个容量  $u(a, b) \geq 0$  和一个需求  $l(a, b) \in [0, u(a, b)]$ 。

输出：实例 $((V, E), h, u, l)$ 的最小费用可行解。该实例的一个可行解 $\{x_{ab}\}$ 为每个边 $(a, b) \in E$ 确定一个流量 $x_{ab} \in \mathbb{N}^{\geq 0} \cap [l(a, b), u(a, b)]$ ，使得任意 $a \in V$ 都满足 $\sum_{b:(a,b) \in E} x_{ab} = \sum_{b:(b,a) \in E} x_{ba}$ 。可行解 $\{x_{ab}\}$ 的费用为 $\sum_{(a,b) \in E} h(a, b)x_{ab}$ 。

人们可以在多项式时间内求解最小费用循环流问题，如引理 5 所述。

**引理 5** ([37]) . 给定最小费用循环流问题的实例 $((V, E), h, u, l)$ ，存在时间复杂度为 $(|V| \cdot |E|)^{O(1)}$ 的精确算法。

本文通过构造最小费用循环流问题的实例证明了可以基于引理 5 找到用户集合与开设设施集合之间的最优连接映射（引理 14）。结合这一结论与本文在第 6 节中选取的候选开设设施集合，本文在第 7 节中为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了时间复杂度以指数形式依赖于空间维度的 $(1 + O(\epsilon))$ -近似算法（引理 15）。

#### 4.4 降维

为了基于本文在第 7 节中提出的算法处理高维实例，本文结合 Narayanan 和 Nelson<sup>[38]</sup>给出的降维方法和 Bandyopadhyay 等人<sup>[11]</sup>给出的数据消减方法将实例映射到低维空间中。引理 6 和引理 7 是这两个方法的性能保证。

**引理 6** ([38]) . 给定集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ 和正数 $\lambda$ ，存在一个映射 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ ，使得任意 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathbb{R}^d$ 都满足 $\delta(g(a), g(b)) \in [1, 1 + \lambda]\delta(a, b)$ ，其中， $d' = O(\lambda^{-2} \log |\mathcal{A}|)$ 。

本文假设引理 6 构造的映射 $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 对于任意有限集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ 都是单映射。该假设不失一般性：可以复制 $\mathbb{R}^{d'}$ 中有多个原像的点以区分 $\mathcal{A}$ 中每个点的像。

**引理 7** ([11]) . 给定正整数 $s$ 、正数 $\lambda$ 和集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ ，可以在 $O(|\mathcal{A}|ds + (\log |\mathcal{A}| s \lambda^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造一个满足 $|\mathcal{B}| \leq (\log |\mathcal{A}| s \lambda^{-1})^{O(1)}$ 和 $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|$ 的多重集合 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ ，使得式 $\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{H}, M) \in [1 - \lambda, 1 + \lambda]\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, M)$ 对于任意矩阵 $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{s \times 1}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 中满足 $|\mathcal{H}| \leq s$ 的任意集合 $\mathcal{H} = \{f_1, \dots, f_{|\mathcal{H}|}\}$ 都成立，其中， $\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{H}, M)$ 表示 $\sum_{c \in \mathcal{B}} \delta(c, \sigma(c))$ 在满足 $\sigma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ 和 $|\sigma^{-1}(f_i)| = M_{i1} \forall i \in [|\mathcal{H}|]$ 的前提下所能达到的最小值（如果不存在满足该约束条件的映射 $\sigma$ ，则令 $\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{H}, M) = \infty$ ）， $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, M)$ 的定义同理可得。

本文在第 8 节中基于引理 6 和引理 7 提出了能

将实例映射到 $\epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log n)$ -维欧几里得空间的降维方法（引理 16）。本文结合这一降维方法与在第 7 节中针对低维实例提出的求解算法得到了关于最小负载受限 $k$ -中位问题的固定参数时间 $(1 + \epsilon)$ -近似算法（定理 1）。

## 5 关键用户挖掘

本节利用 $D$ -采样技术在用户集合中挖掘距离 $\mathcal{H}^*$ 中设施较近的关键用户，如算法 1 所述。算法 1 在每次迭代中都计算每个用户和已选取的用户之间的最短距离，并按照与该距离成正比的概率在 $\mathcal{C}$ 中随机选取一个用户。该算法在 $O(ndk\epsilon^{-3})$ 时间内生成规模为 $O(k\epsilon^{-3})$ 的用户集合。

### 算法 1. 关键用户挖掘算法 *Sampling*( $I, \epsilon$ )

输入：最小负载受限 $k$ -中位问题的实例 $I = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ；

输出：规模为 $O(k\epsilon^{-3})$ 的用户集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ ；

1. 均匀随机选取一个用户 $c \in \mathcal{C}$ ；
2.  $\mathcal{S} \leftarrow \{c\}$ ；
3. FOR  $i \leftarrow 2$  to  $\lceil 360k\epsilon^{-3} + 1 \rceil$
4. 以 $\delta(c, \mathcal{S})/\delta(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 的概率随机选取一个用户 $c \in \mathcal{C}$ ；
5.  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{c\}$ ；
6. RETURN  $\mathcal{S}$ 。

给定集合 $\mathcal{C}_j^* \in \mathcal{C}^*$ 以及对应的开设设施 $f_j^* \in \mathcal{H}^*$ ，令 $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*)$ 表示 $\mathcal{C}_j^*$ 中与 $f_j^*$ 较为接近的一部分用户组成的集合（非正式定义）。本节使用算法 1 的目标是对于每个集合 $\mathcal{C}_j^* \in \mathcal{C}^*$ 都找到 $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*)$ 中的一个用户。由算法 1 的采样概率可知，如果 $\mathcal{C}_j^*$ 中的用户远离已经被选取的用户，则算法 1 有较高的概率在 $\mathcal{C}_j^*$ 中选取用户。本节证明了 $|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*)|$ 与 $|\mathcal{C}_j^*|$ 之间的比值是一个常数（引理 8），并利用该结论在 $\mathcal{C}_j^*$ 的成员与已经被选取的用户距离较远的情况下证明了算法 1 选取到 $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*)$ 中用户的概率也是常数（引理 9）。当 $\mathcal{C}_j^*$ 的成员与已经被选取的用户距离较近时，算法 1 通过随机采样找到 $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*)$ 成员的概率较低，但本节证明了在该情况下算法 1 已经选取到了与 $f_j^*$ 较为接近的用户（引理 10）。基于上述讨论，本节证明了算法 1 构造的集合包含距离设施 $f_1^*, \dots, f_k^*$ 较近的用户（引理 11）。

令 $\mathcal{S}$ 表示算法 1 返回的用户集合。给定整数 $i \in [\lceil 360k\epsilon^{-3} + 1 \rceil]$ ，令 $\mathcal{S}_i$ 为算法 1 在第 $i$ 次随机采



样后构造的用户集合，并令  $\mathbb{G}_i = \{C_j^* \in \mathbb{C}^*: \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \leq (1 + \frac{\epsilon}{2})r_j\}$ ，其中， $r_j = \delta(C_j^*, f_j^*)|C_j^*|^{-1}$ 。令  $\mathcal{S}_0 = \mathbb{G}_0 = \emptyset$ 。此外，给定整数  $j \in [k^*]$  和实数  $\mu > 0$ ，定义  $\mathcal{K}(C_j^*, \mu) = \{c \in C_j^*: \delta(c, f_j^*) \leq \mu r_j\}$ 。以下结论说明：对于任意整数  $j \in [k^*]$ ， $C_j^*$  中与  $f_j^*$  较为接近的用户在  $C_j^*$  中的占比比较大。

**引理 8.** 给定实数  $\mu \geq 1$  和集合  $C_j^* \in \mathbb{C}^*$ ，不等式  $|\mathcal{K}(C_j^*, \mu)| \geq (1 - \mu^{-1})|C_j^*|$  成立。

(证明参考附录)。

令  $i$  表示  $[0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$  中的一个整数。 $\mathbb{G}_i$  的定义说明：给定整数  $j \in [k^*]$ ，如果  $C_j^* \in \mathbb{G}_i$ ，则  $\mathcal{S}_i$  中包含与  $f_j^*$  距离较近的用户。本节使用算法 1 进行第  $i+1$  次随机采样时的目标是选取到与  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$  中的某个集合所对应的开设设施距离较近的用户并将其添加到  $\mathcal{S}_{i+1}$  中。正如前文所述，本节根据集合  $\cup_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} C_j^*$  与  $\mathcal{S}_i$  之间用户距离的远近采用不同的方式分析算法 1 的性能。具体来说，本节分别分析以下两种情况：(1)  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) > \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$ ；(2)  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$ 。

在情况 (1) 中，不等式  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) > \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$  说明算法 1 在进行第  $i+1$  次随机采样时有较高的概率选取到集合  $\cup_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} C_j^*$  中的用户。结合这一事实与引理 8 给出的  $|\mathcal{K}(C_j^*, \mu)| \cdot |C_j^*|^{-1}$  取值下限，本节可以证明  $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$  成立的概率是一个常数，如引理 9 所述。

**引理 9.** 给定整数  $i \in [0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$ ，如果不等式  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) > \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$  成立，则不等式  $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$  成立的概率超过  $\frac{\epsilon^3}{180}$ 。

(证明参考附录)。

在情况 (2) 中，不等式  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$  说明  $\cup_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} C_j^*$  中的用户与  $\mathcal{S}_i$  中的用户之间距离较短。本节结合这一事实与  $\mathbb{G}_i$  的定义证明了  $\mathcal{S}_i$  包含与设施  $f_1^*, \dots, f_{k^*}^*$  较为接近的用户，如引理 10 所述。

**引理 10.** 给定整数  $i \in [0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$ ，如果不等式  $\sum_{C_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$  成立，则不等式  $\sum_{j=1}^{k^*} |C_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \leq (1 + \epsilon)opt$  成立。

(证明参考附录)。

下面在引理 9 和引理 10 的基础上证明算法 1

的性能保证。令  $p = \epsilon^3/180$ 、 $t = \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil$ 。令  $x_0, \dots, x_t$  表示对于任意整数  $i \in [0, t]$  都满足  $x_i \in \{0, 1\}$  和  $\Pr[x_i = 1] = p$  的一组独立随机变量。给定整数  $i \in [0, t]$ ，如果  $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$ ，则令  $\text{Gain}_i = 1$ ，否则令  $\text{Gain}_i = 0$ 。对于任意整数  $i \in [0, t]$ ，引理 9 和引理 10 说明，不等式  $\sum_{j=1}^{k^*} |C_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \leq (1 + \epsilon)opt$  和不等式  $\Pr[\text{Gain}_i = 1] \geq p = \Pr[x_i = 1]$  之间至少有一个成立。可以看出，如果存在满足不等式  $\Pr[\text{Gain}_i = 1] < p$  的整数  $i \in [0, t]$ ，则不等式  $\sum_{j=1}^{k^*} |C_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \leq (1 + \epsilon)opt$  成立、引理 11 正确。当  $\Pr[\text{Gain}_i = 1] \geq p \forall i \in [0, t]$  成立时，可以得出，

$$\begin{aligned} \Pr[\mathbb{G}_{t+1} = \mathbb{C}^*] &= \Pr[|\mathbb{G}_{t+1}| = k^*] \\ &\geq \Pr\left[\sum_{i=0}^t \text{Gain}_i \geq k^*\right] \\ &\geq \Pr\left[\sum_{i=0}^t x_i \geq k^*\right] \\ &\geq \Pr\left[\sum_{i=0}^t x_i \geq \frac{1}{2}pt\right] \\ &= 1 - \Pr\left[\sum_{i=0}^t x_i < \frac{1}{2}pt\right] \\ &> 1 - e^{-\frac{1}{4}}, \quad \#(2) \end{aligned}$$

其中，第 1 步根据  $\mathbb{G}_{t+1}$  的定义得出，第 2 步根据  $\text{Gain}_i$  的定义和  $|\mathbb{G}_{i+1}| \geq |\mathbb{G}_i| \forall i \in [0, t]$  这一事实得出，第 3 步基于  $\Pr[\text{Gain}_i = 1] \geq p = \Pr[x_i = 1] \forall i \in [0, t]$  这一假设得出，第 4 步基于  $k^* \leq k \leq \frac{1}{2}pt$

这一事实得出，第 6 步根据引理 2 得出。由  $\mathbb{G}_{t+1}$  的定义可知，如果  $\mathbb{G}_{t+1} = \mathbb{C}^*$ ，则  $|C_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_{t+1}) < (1 + \epsilon) \delta(C_j^*, f_j^*) \forall j \in [k^*]$ 。该不等式说明，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k^*} |C_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_{t+1}) &< (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^{k^*} \delta(C_j^*, f_j^*) \\ &= (1 + \epsilon)opt. \quad \#(3) \end{aligned}$$

不等式(2)说明，等式  $\mathbb{G}_{t+1} = \mathbb{C}^*$  和不等式(3)成立的概率是一个常数。

由上述论证可知，算法 1 生成的集合  $\mathcal{S}$  有较高的概率包含与  $\mathcal{H}^*$  中设施较为接近的用户，如引理 11 所述。

**引理 11.** 不等式  $\sum_{i=1}^{k^*} |C_i^*| \delta(f_i^*, \mathcal{S}) \leq (1 + \epsilon)opt$  成立的概率为常数。

## 6 候选开设设施集合构造

令 $\mathcal{S}$ 表示使引理 11 中的不等式成立的一个用户集合。本节根据 $\mathcal{S}$ 中的用户估计最优解中开设设施的位置，并基于这些用户构造数据网以缩小实例近似解中的开设设施搜索范围。给定设施 $f_i^* \in \mathcal{H}^*$ ，令 $s_i^* = \arg \min_{c \in \mathcal{S}} \delta(c, f_i^*)$ 表示 $\mathcal{S}$ 中与 $f_i^*$ 距离最近的用户。令 $\rho = n \cdot \max_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma^*(c))$ 。由该式和引理 11 可知，

$$\begin{aligned} \max_{i \in [k^*]} \delta(s_i^*, f_i^*) &\leq \sum_{i=1}^{k^*} |\mathcal{C}_i^*| \delta(f_i^*, \mathcal{S}) \\ &\leq (1 + \epsilon) \text{opt} \\ &\leq (1 + \epsilon) \rho. \quad \#(4) \end{aligned}$$

此外， $\rho$ 的取值范围说明，

$$\frac{\epsilon}{2n^2} \rho \leq \frac{\epsilon}{2n} \text{opt}. \quad \#(5)$$

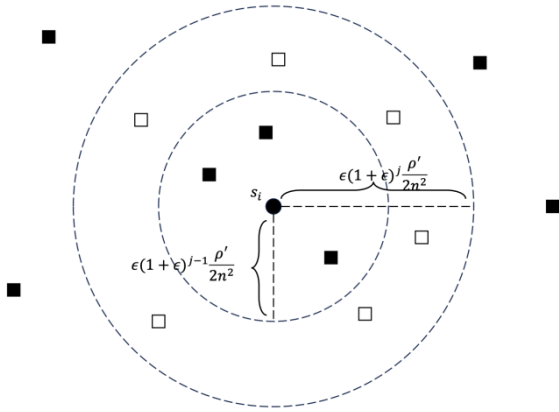


图5 集合 $\mathcal{L}(i, j)$ 中的设施

给定整数 $i \in [k^*]$ 和用户 $s_i^*$ ，本节基于算法 2 在以 $s_i^*$ 为球心、半径超过 $\delta(s_i^*, f_i^*)$ 的球形空间内寻找与 $f_i^*$ 较为接近的设施（ $s_i^*$ 需要通过枚举 $\mathcal{S}$ 中的用户得出，该枚举过程在第 7 节中给出）。算法 2 根据球形空间中的设施与给定用户之间的距离将设施划分到 $O(\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1}))$ 个集合 $\mathcal{L}(i, 0), \dots, \mathcal{L}(i, [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})])$ 中，如图 5 所示，其中，白色点表示 $\mathcal{L}(i, j)$ 中的设施。对于每个整数 $j \in [[4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]]$ ，算法 2 构造关于集合 $\mathcal{L}(i, j)$ 的数据网 $\mathcal{G}(i, j)$ ，并基于 $\mathcal{G}(i, j)$ 中的设施构造维诺图。对于 $\mathcal{L}(i, j)$ 在每个维诺单元中的子集 $\mathcal{J}(f^\dagger)$ （ $f^\dagger \in \mathcal{G}(i, j)$ ），算法 2 将 $\mathcal{J}(f^\dagger)$ 中最小负载最低的成员作为实例 $I$ 近似解的候选开设设施。

**算法 2.** 候选开设设施集合构造算法  $Partition(I, k', (s_1, \dots, s_{k'}), \epsilon, \rho')$

输入：最小负载受限 $k$ -中位问题的实例 $I = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 、整数 $k' \in [k]$ 、 $\mathcal{S}$ 中的 $k'$ 个用户 $s_1, \dots, s_{k'}$ 、常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ 和实数 $\rho' > 0$ ；

输出：设施集合 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ ；

1.  $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset, n \leftarrow |\mathcal{C} \cup \mathcal{F}|$ ;
2. FOR  $i \leftarrow 1$  to  $k'$
3.  $\mathcal{L}(i, 0) \leftarrow \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, s_i) \leq \frac{\epsilon \rho'}{2n^2}\}$ ;
4.  $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{\arg \min_{f \in \mathcal{L}(i, 0)} \tau(f)\}$ ;
5. FOR  $j \leftarrow 1$  to  $[4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]$
6.  $\mathcal{L}(i, j) \leftarrow \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, s_i) \in (\epsilon(1 + \epsilon)^{j-1} \frac{\rho'}{2n^2}, \epsilon(1 + \epsilon)^j \frac{\rho'}{2n^2})\}$ ;
7. 基于引理 4 构造关于 $\mathcal{L}(i, j)$ 的 $\epsilon^2(1 + \epsilon)^j \frac{\rho'}{2n^2}$ -数据网  $\mathcal{G}(i, j)$ ;
8. FOR  $f^\dagger \in \mathcal{G}(i, j)$
9.  $\mathcal{J}(f^\dagger) \leftarrow \{f \in \mathcal{L}(i, j) : \delta(f, f^\dagger) = \min_{f' \in \mathcal{G}(i, j)} \delta(f, f')\}$ ;
10.  $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{\arg \min_{f \in \mathcal{J}(f^\dagger)} \tau(f)\}$ ;
11. RETURN  $\mathcal{V}$ .

令 $\mathcal{V}^*$ 表示算法 $Partition(I, k^*, (s_1^*, \dots, s_{k^*}^*), \epsilon, \rho)$ 返回的集合。本节基于数据网的定义证明了实例 $I$ 的一个 $(1 + O(\epsilon))$ -近似解所开设的设施集合是 $\mathcal{V}^*$ 的子集，如引理 12 所述。

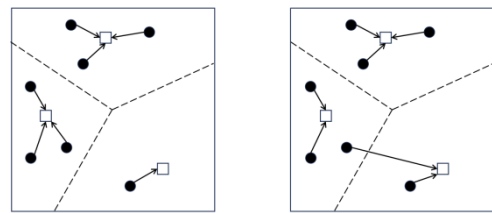
**引理 12.** 存在一个设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}^*$ ，使得不等式 $|\mathcal{H}| \leq k^*$ 和 $\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \leq (1 + 4\epsilon) \text{opt}$ 成立。

（证明参考附录）。

以下引理说明，当实例中的点所在的空间维度是常数时，算法 2 的时间复杂度及其构造的集合规模都是多项式。

**引理 13.** 给定整数 $k' \in [k]$ 、 $\mathcal{S}$ 中的 $k'$ 个用户 $s_1, \dots, s_{k'}$ 以及实数 $\rho' > 0$ ，算法 $Partition(I, k', (s_1, \dots, s_{k'}), \epsilon, \rho')$ 的时间复杂度为 $(n k \epsilon^{-d})^{O(1)}$ ，且该算法生成的集合 $\mathcal{V}$ 满足 $|\mathcal{V}| \leq \epsilon^{-O(d)} k \log n$ 。

（证明参考附录）。



(a)

(b)

图 6 (a) 设施负载不受限时用户的连接方式; (b) 设施最小负载为 2 时用户的连接方式。

## 7 低维实例求解算法

给定一组开设设施, 为实例构造近似解时需要确定用户集合与开设设施集合之间的连接映射。在设施负载不受限的 $k$ -中位问题实例中, 人们可以将每个用户连接到距离最近的开设设施上以使得用户连接费用之和最小。然而, 按照相同方式连接用户不能保证最小负载受限 $k$ -中位问题实例解的可行性, 如图 6 所示。给定满足 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 和 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的开设设施集合 $\mathcal{H}$ , 本节基于以下整数规划连接 $\mathcal{C}$ 中的用户:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{H}} \delta(c, f) x_{cf} \quad \# \text{IP1} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{cf} \geq \tau(f) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \#(6) \\ & \sum_{f \in \mathcal{H}} x_{cf} = 1 \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad \#(7) \\ & x_{cf} \in \{0, 1\} \quad \forall c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{H} \quad \#(8) \end{aligned}$$

对于每对用户 $c \in \mathcal{C}$ 和设施 $f \in \mathcal{H}$ , IP1都有一个变量 $x_{cf}$ 。  $x_{cf} = 1$ 表示将用户 $c$ 连接到设施 $f$ 上, 即 $\sigma(c) = f$ 。约束条件(6)要求每个设施连接的用户数量不能低于其最小负载, 约束条件(7)要求 $\mathcal{C}$ 中的每个用户都有对应的开设设施。

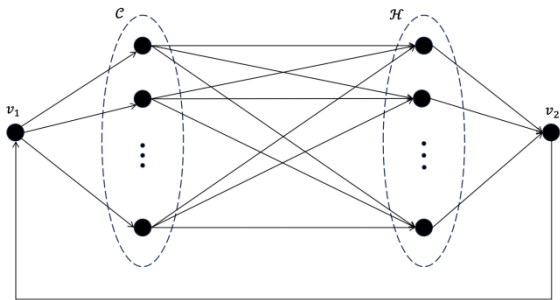


图 7 最小费用循环流问题实例

给定一个满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ , 本节按照以下方式定义最小费用循环流问题的一个实例 $((V, E), h, u, l)$ :

- (1) 令 $v_1$ 和 $v_2$ 为不属于集合 $\mathcal{C} \cup \mathcal{H}$ 的两个点, 并令 $V = \mathcal{C} \cup \mathcal{H} \cup \{v_1, v_2\}$ ;
- (2) 对于每个用户 $c \in \mathcal{C}$ , 将 $(v_1, c)$ 添加到边集 $E$ 中, 并令 $h(v_1, c) = 0$ 、 $u(v_1, c) = l(v_1, c) = 1$ ;
- (3) 对于每个用户 $c \in \mathcal{C}$ 和设施 $f \in \mathcal{H}$ , 将

$(c, f)$ 添加到边集 $E$ 中, 并令 $h(c, f) = \delta(c, f)$ 、 $u(c, f) = 1$ 、 $l(c, f) = 0$ ;

(4) 对于每个设施 $f \in \mathcal{H}$ , 将 $(f, v_2)$ 添加到边集 $E$ 中, 并令 $h(f, v_2) = 0$ 、 $l(f, v_2) = \tau(f)$ ;

(5) 将 $(v_2, v_1)$ 添加到边集 $E$ 中, 并令 $h(v_2, v_1) = 0$ 、 $u(v_2, v_1) = l(v_2, v_1) = |\mathcal{C}|$ 。

图 7 中描述了实例 $((V, E), h, u, l)$ 。通过分析该实例与IP1之间的关联关系, 本节证明了可以在多项式时间内得到IP1的最优解 (即用户的最优连接方式), 如引理 14 所述。

**引理 14.** 给定一个满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ , 可以在 $(|\mathcal{C}| \cdot |\mathcal{H}|)^{O(1)}$ 时间内找到IP1的最优解。

(证明参考附录)。

本节基于算法 1 和算法 2 求解实例 $I$ , 如算法 3 所述。该算法首先利用算法 1 挖掘与 $\mathcal{H}^*$ 中的设施距离较近的用户, 然后枚举算法 2 输入参数的取值并利用算法 2 构造候选开设设施集合。对于候选开设设施集合的每个规模不超过 $k$ 的子集 $\mathcal{H}$ , 算法 3 都通过求解IP1为实例构造候选解。最后, 该算法返回费用最低的候选解。

**算法 3.** 近似解构造算法 $Construction(I, \epsilon)$

输入: 最小负载受限 $k$ -中位问题的实例 $I = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ;

输出: 实例 $I$ 的解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ ;

1.  $V \leftarrow \emptyset, W \leftarrow \emptyset$ ;
2.  $S \leftarrow Sampling(I, \epsilon)$  (算法 1);
3. FOR  $k' \leftarrow 1$  to  $k$
4. 令 $[S]^{k'}$ 为笛卡尔乘积 $\underbrace{S \times \dots \times S}_k$ ;
5. FOR  $S' \in [S]^{k'}$
6. FOR  $\rho' \in \{|\mathcal{C} \cup \mathcal{F}| \delta(c, f) : c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{F}\}$
7.  $\mathcal{V} \leftarrow Partition(I, k', S', \epsilon, \rho')$  (算法 2);
8.  $V \leftarrow V \cup \{\mathcal{V}\}$
9. FOR  $\mathcal{V} \in V$
10. FOR 满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的子集 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$
11. 基于引理 14 构造映射 $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ ;
12.  $W \leftarrow W \cup \{(\mathcal{H}, \sigma)\}$ ;
13.  $(\mathcal{H}, \sigma) \rightarrow \arg \min_{(\mathcal{H}, \sigma) \in W} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}', \tau)$ ;
14. RETURN  $(\mathcal{H}, \sigma)$ 。

以下引理说明, 算法 3 是关于实例 $I$ 的 $(1 + O(\epsilon))$ -近似算法, 其时间复杂度以指数形式依赖于 $k$ 和 $d$ 。

**引理 15.** 算法 3 的时间复杂度为 $(\epsilon^{-d} k \log n)^{O(k)} n^{O(1)}$ , 其构造的解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 满足

$$\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \leq (1 + 4\epsilon)opt.$$

(证明参考附录)。

## 8 降维方法

引理 15 说明算法 3 的时间复杂度随空间维度的上升呈指数增长。该算法无法被有效应用在高维欧几里得空间中。因此，本节利用引理 6 和引理 7 将最小负载受限 $k$ -中位问题的高维实例映射到低维空间中。以下结论是引理 7 的一个推论。该推论说明，Bandyapadhyay 等人<sup>[11]</sup>提出的数据消减方法可以被应用在最小负载受限 $k$ -中位问题中。

**推论 1.** 给定一个满足 $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和一个常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ，可以在 $O(|\mathcal{C}|dk + (\log|\mathcal{C}|k\epsilon^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造一个满足 $|\mathcal{D}'| \leq (\log|\mathcal{C}|k\epsilon^{-1})^{O(1)}$ 和 $|\mathcal{D}'| \leq |\mathcal{C}|$ 的多重集合 $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^d$ ，使得式 $\Delta(\mathcal{D}', \mathcal{H}, \tau) \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau)$ 对于满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的任意设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 都成立。

(证明参考附录)。

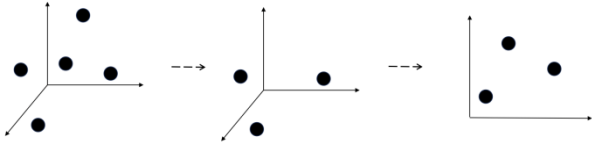


图 8 基于引理 6 和推论 1 的降维方法

引理 6 针对输入集合构造的空间维度与集合规模相关。因此，本节给出的降维方法首先利用推论 1 中的数据消减方法压缩实例规模，然后再基于引理 6 将实例映射到低维空间中，如图 8 所示。引理 16 是该降维方法的性能保证。

**引理 16.** 给定一个满足 $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和一个常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ，可以在 $O(|\mathcal{C}|dk + (\log|\mathcal{C}|k\epsilon^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造一个满足 $d' \leq \epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log |\mathcal{C}|)$ 的映射 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 和一个满足 $|\mathcal{D}'| \leq |\mathcal{C}|$ 和 $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^{d'}$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{D}', \{g(f): f \in \mathcal{F}\}, k, \tau)$ ，使得式 $\Delta(\mathcal{D}', \{g(f): f \in \mathcal{H}\}, \tau) \in [1 - \epsilon, 1 + 3\epsilon]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau)$ 对于满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的任意设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 都成立。

(证明参考附录)。

本节利用引理 16 和算法 3 求解实例 $I$ ，首先基于引理 16 将实例映射至低维空间，然后基于算法 3 构造近似解，如算法 4 所述。

### 算法 4. 最小负载受限 $k$ -中位问题求解算法

输入：最小负载受限 $k$ -中位问题的实例 $I = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ；

输出：实例 $I$ 的解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ ；

1. 基于引理 16 为 $I$ 和 $\epsilon$ 构造映射 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 和实例 $I' = (\mathcal{D}', \{g(f): f \in \mathcal{F}\}, k, \tau)$ ；
2.  $(\mathcal{H}', \sigma') \leftarrow \text{Construction}(I', \epsilon)$  (算法 3)；
3.  $\mathcal{H} \leftarrow \{g^{-1}(f): f \in \mathcal{H}'\}$ ；
4. 基于引理 14 构造映射 $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ ；
5. RETURN  $(\mathcal{H}, \sigma)$ 。

下面通过分析算法 4 的性能给出本文关于最小负载受限 $k$ -中位问题的主要结果。令 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 和 $I' = (\mathcal{D}', \{g(f): f \in \mathcal{F}\}, k, \tau)$ 表示算法 4 在第 1 步构造的映射和低维实例。引理 16 说明构造这一实例所需时间为 $O(ndk + (\log n k \epsilon^{-1})^{O(1)})$ ，且该实例满足 $d' \leq \epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log n)$ 和 $|\mathcal{D}' \cup \{g(f): f \in \mathcal{F}\}| \leq n$ 。结合这一事实与引理 15 可知，算法 4 调用算法 $\text{Construction}(I', \epsilon)$ 求解实例 $I'$ 所需时间为 $(k \log n)^{k\epsilon^{-O(1)}}n^{O(1)}$ 。此外，引理 14 说明，算法 4 在第 4 步求解 IP1 所需时间为 $(nk)^{O(1)}$ 。综上所述，算法 4 的时间复杂度为 $O(ndk + (k \log n)^{k\epsilon^{-O(1)}}n^{O(1)})$ 。由引理 1 可知，该时间复杂度不超过 $O(ndk + (k\epsilon^{-1})^{k\epsilon^{-O(1)}}n^{O(1)})$ 。

令 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 表示算法 4 返回的近似解、 $(\mathcal{H}', \sigma')$ 表示算法 4 在第 2 步为实例 $I'$ 构造的近似解。定义 $\tilde{\mathcal{H}}^* = \{g(f): f \in \mathcal{H}^*\}$ ，并令 $\tau(g(f)) = \tau(f) \forall f \in \mathcal{H}^*$ 。可以得出，

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \mathcal{C}} \delta(c, \sigma(c)) &= \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \\ &\leq \frac{1}{1 - \epsilon} \Delta(\mathcal{D}', \mathcal{H}', \tau) \\ &\leq \frac{1 + 4\epsilon}{1 - \epsilon} \Delta(\mathcal{D}', \tilde{\mathcal{H}}^*, \tau) \\ &\leq \frac{(1 + 4\epsilon)(1 + 3\epsilon)}{1 - \epsilon} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}^*, \tau) \\ &\leq (1 + 28\epsilon)opt, \end{aligned}$$

其中，第 2 步和第 4 步基于引理 16 得出，第 3 步基于引理 15 得出，第 5 步由 $\epsilon$ 的取值范围得出。该不等式说明， $(\mathcal{H}, \sigma)$ 是实例 $I$ 的 $(1 + 28\epsilon)$ -近似解。

综上所述，算法 4 是最小负载受限 $k$ -中位问题的 $(1 + 28\epsilon)$ -近似算法，其时间复杂度为 $O(ndk + (k\epsilon^{-1})^{k\epsilon^{-O(1)}}n^{O(1)})$ 。给定常数 $\epsilon \in$

$(0,1)$ , 令 $\epsilon = \frac{\epsilon}{28}$ , 则由上述论证可知, 本文为最小负载受限 $k$ -中位问题提出了时间复杂度为 $O(ndk + (k\epsilon^{-1})^{k\epsilon^{-0(1)}} n^{O(1)})$ 的 $(1 + \epsilon)$ -近似算法, 如定理 1 所述。

**定理 1.** 给定满足 $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\epsilon \in (0,1)$ , 存在时间复杂度为 $O(ndk + (k\epsilon^{-1})^{k\epsilon^{-0(1)}} n^{O(1)})$ 的 $(1 + \epsilon)$ -近似算法, 其中,  $n = |\mathcal{C} \cup \mathcal{F}|$ 。

## 9 总结

本文基于新的解搜索空间构造方法在欧几里得空间中求解最小负载受限 $k$ -中位问题, 为其离散型实例提出了时间复杂度为 $O(ndk + (k\epsilon^{-1})^{k\epsilon^{-0(1)}} n^{O(1)})$ 的 $(1 + \epsilon)$ -近似算法。在 $k$ 为常数的情况下, 这是该问题的离散型实例在欧几里得空间中的第一个多项式时间近似方案。此前, 只有在设施最小负载一致的连续型实例中存在时间复杂度相同的 $(1 + \epsilon)$ -近似算法。

本文所提出的基于小规模解搜索空间的算法设计方法为求解欧几里得空间中设施集合规模有限的离散型问题实例提供了新的思路。一个值得探索的方向是根据这一思路处理其它相关的选址及聚类问题的离散型实例。

## 参考文献

- [1] Arutyunova A, Schmidt M. Achieving anonymity via weak lower bound constraints for  $k$ -median and  $k$ -means//Proceedings of the 38th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Saarbrücken, Germany, 2021: 7:1-7:17
- [2] Aggarwal G, Panigrahy R, Feder T, et al. Achieving anonymity via clustering. *ACM Transactions on Algorithms*, 2010, 6(3): 49:1-49:19
- [3] Lim A, Wang F, Xu Z. A transportation problem with minimum quantity commitment. *Transportation Science*, 2006, 40(1): 117-129
- [4] Guha S, Meyerson A, Munagala K. Hierarchical placement and network design problems//Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. Redondo Beach, USA, 2000: 603-612
- [5] Karger D R, Minkoff M. Building steiner trees with incomplete global knowledge//Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. Redondo Beach, USA, 2000: 613-623
- [6] Borgwardt S, Brieden A, Gritzmann P. An LP-based  $k$ -means algorithm for balancing weighted point sets. *European Journal of Operational Research*, 2017, 263(2): 349-355
- [7] Kanungo T, Mount D M, Netanyahu N S, et al. A local search approximation algorithm for  $k$ -means clustering. *Computational Geometry*, 2004, 28(2-3): 89-112
- [8] Bhattacharya A, Jaiswal R, Kumar A. Faster algorithms for the constrained  $k$ -means problem. *Theory of Computing Systems*, 2018, 62(1): 93-115
- [9] Ding H, Xu J H. A unified framework for clustering constrained data without locality property. *Algorithmica*, 2020, 82(4): 808-852
- [10] Ding H. Faster balanced clusterings in high dimension. *Theoretical Computer Science*, 2020, 842: 28-40
- [11] Bandyapadhyay S, Fomin F V, Simonov K. On coresets for fair clustering in metric and Euclidean spaces and their applications//Proceedings of the 48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. Glasgow, Scotland, 2021: 23:1-23:15
- [12] Arthur D, Vassilvitskii S.  $k$ -means++: The advantages of careful seeding//Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. New Orleans, USA, 2007: 1027-1035
- [13] Goyal D, Jaiswal R, Kumar A. FPT approximation for constrained metric  $k$ -median/means//Proceedings of the 15th International Symposium on Parameterized and Exact Computation. Hong Kong, China, 2020: 14:1-14:19
- [14] Wu X L, Shi F, Guo Y T, et al. An approximation algorithm for lower-bounded  $k$ -median with constant factor. *Science China Information Sciences*, 2022, 65(4): 140601:1-140601:9
- [15] Fakcharoenphol J, Rao S, Talwar K. A tight bound on approximating arbitrary metrics by tree metrics. *Journal of Computer and System Sciences*, 2004, 69(3): 485-497
- [16] Cohen-Addad V, Li J. On the fixed-parameter tractability of capacitated clustering//Proceedings of the 46th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. Patras, Greece, 2019: 41:1-41:14
- [17] Khuller S, Sussmann Y J. The capacitated  $k$ -center problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2000, 13(3): 403-418
- [18] Goyal D, Jaiswal R. Tight FPT approximation for constrained  $k$ -center and  $k$ -supplier. *Theoretical Computer Science*, 2023, 940: 190-208
- [19] Ahmadian S, Swamy C. Improved approximation guarantees for lower-bounded facility location//Proceedings of the 10th International Workshop on Approximation and Online Algorithms. Ljubljana, Slovenia, 2012: 257-271
- [20] Kao M J. On the integrality gap of MFN relaxation for the capacitated facility location problem//Proceedings of the 34th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Florence, Italy, 2023: 1071-1089
- [21] Li S. Approximating capacitated  $k$ -median with  $(1 + \epsilon)k$  open facilities//Proceedings of the 27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms. Arlington, USA, 2016: 786-796
- [22] Han L, Hao C L, Wu C C, et al. Approximation algorithms for the

- lower-bounded  $k$ -median and its generalizations//Proceedings of the 26th International Conference on Computing and Combinatorics. Atlanta, USA, 2020: 627-639
- [23] Bera S K, Chakrabarty D, Flores N, et al. Fair algorithms for clustering//Proceedings of the 33rd Annual Conference on Neural Information Processing Systems. Vancouver, Canada, 2019: 4955-4966
- [24] Chen X R, Han L, Xu D C, et al.  $k$ -median/means with outliers revisited: A simple FPT approximation//Proceedings of the 29th International Conference on Computing and Combinatorics. Hawaii, USA, 2023: 295-302
- [25] Agrawal A, Inamdar T, Saurabh S, et al. Clustering what matters: Optimal approximation for clustering with outliers. Journal of Artificial Intelligence Research, 2023, 78: 143-166
- [26] Goyal D, Jaiswal R. Tight FPT approximation for socially fair clustering. Information Processing Letters, 2023, 182: 106383
- [27] Chen X R, Xu D C, Xu Y C, et al. Parameterized approximation algorithms for sum of radii clustering and variants//Proceedings of the 38th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Vancouver, Canada, 2024: 20666-20673
- [28] Jaiswal R, Kumar A, Yadav J. FPT approximation for capacitated sum of radii//Proceedings of the 15th Innovations in Theoretical Computer Science Conference. Berkeley, USA, 2024: 65:1-65:21
- [29] Manurangsi P, Raghavendra P. A birthday repetition theorem and complexity of approximating dense CSPs//Proceedings of the 44th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. Warsaw, Poland, 2017: 78:1-78:15
- [30] Cohen-Addad V, Gupta A, Kumar A, et al. Tight FPT approximations for  $k$ -median and  $k$ -means//Proceedings of the 46th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. Patras, Greece, 2019: 42:1-42:14
- [31] Alon N, Spencer J H. The probabilistic method. New York, USA: John Wiley and Sons, 1992
- [32] Jin H T, Du D K. Abel's lemma and identities on harmonic numbers. Integers, 2015, 15: A22
- [33] Gupta A, Krauthgamer R, Lee J R. Bounded geometries, fractals, and low-distortion embeddings//Proceedings of the 44th Symposium on Foundations of Computer Science. Cambridge, USA, 2003: 534-543
- [34] Har-Peled S, Mendel M. Fast construction of nets in low-dimensional metrics and their applications. SIAM Journal on Computing, 2006, 35(5): 1148-1184
- [35] Aggarwal A, Deshpande A, Kannan R. Adaptive sampling for  $k$ -means clustering//Proceedings of the 12th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems and 13th International Workshop on Randomization and Computation. Berkeley, USA, 2009: 15-28
- [36] Dennis W. A constant-factor bi-criteria approximation guarantee for  $k$ -means++//Proceedings of the 30th Annual Conference on Neural Information Processing Systems. Barcelona, Spain, 2016: 604-612
- [37] Schrijver A. Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency. Berlin, Germany: Springer, 2003
- [38] Narayanan S, Nelson J. Optimal terminal dimensionality reduction in Euclidean space//Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. Phoenix, USA, 2019: 1064-1069

## 附录

**引理 1.** 给定满足  $s > t > 1$  的两个实数  $s$  和  $t$ ，不等式  $\log^t s \leq s \cdot t^{O(t)}$  成立。

证明. 在  $t < \frac{\log s}{\log \log s}$  的情况下，不等式  $\log^t s < \log^{\frac{\log s}{\log \log s}} s = s$  成立。在  $t \geq \frac{\log s}{\log \log s}$  的情况下，不等式  $\log s \leq t^{O(1)}$  成立，这说明  $\log^t s \leq t^{O(t)}$ 。综上所述，引理 1 成立。证毕。

**引理 8.** 给定实数  $\mu \geq 1$  和集合  $\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*$ ，不等式  $|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| \geq (1 - \mu^{-1})|\mathcal{C}_j^*|$  成立。

证明. 由  $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)$  的定义可知，每个用户  $c \in \mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)$  都满足不等式  $\delta(c, f_j^*) > \mu r_j$ 。因此，

$$\begin{aligned} & \delta(\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), f_j^*) \\ & > \mu |\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| r_j \\ & = \frac{1}{|\mathcal{C}_j^*|} \mu |\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*), \quad \#(9) \end{aligned}$$

其中，第 2 步基于等式  $r_j = \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) |\mathcal{C}_j^*|^{-1}$  得到。此外， $\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu) \subseteq \mathcal{C}_j^*$  这一事实说明，

$$\delta(\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), f_j^*) \leq \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*). \quad \#(10)$$

由不等式(9)和不等式(10)可知  $|\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| < \mu^{-1} |\mathcal{C}_j^*|$ 。该不等式说明，

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| & = |\mathcal{C}_j^*| - |\mathcal{C}_j^* \setminus \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| \\ & \geq (1 - \mu^{-1}) |\mathcal{C}_j^*|. \quad \# \end{aligned}$$

因此，引理 8 正确。证毕。

**引理 9.** 给定整数  $i \in [0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$ ，如果不等式  $\sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i) > \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathbb{C}, \mathcal{S}_i)$  成立，则不等式  $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$  成立的概率超过  $\frac{\epsilon^3}{180}$ 。

证明. 给定整数  $i \in [0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$  和集合  $\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$ ， $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})$  和  $\mathbb{G}_{i+1}$  的定义说明：如果算法 1 将  $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})$  中的一个用户添加到

$\mathcal{S}_{i+1}$ ，则式 $\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{G}_{i+1} \setminus \mathbb{G}_i$ 和 $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$ 成立。由此可知，不等式 $|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|$ 成立的概率不低于算法 1 在第  $i+1$  次随机采样时选取到集合  $\cup_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})$  中用户的概率。由算法 1 的采样概率可知，对于任意  $j \in [k^*]$ ， $\cup_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})$  中的某个用户被添加到  $\mathcal{S}_{i+1}$  的概率为  $\sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2}), \mathcal{S}_i) / \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)$ 。此外，一个用户  $c \in \cup_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})$  被添加到  $\mathcal{S}_1$  的概率为  $\sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})| / |\mathcal{C}|$ 。由此可知，任意整数  $i \in [[360k\epsilon^{-3}]]$  都满足不等式

$$\begin{aligned} & \Pr[|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|] \\ & \geq \frac{1}{\delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)} \sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2}), \mathcal{S}_i), \quad \#(11) \end{aligned}$$

且

$$\Pr[|\mathbb{G}_1| > |\mathbb{G}_0|] \geq \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2})|. \quad \#(12)$$

不等式(12)和引理 8 说明，

$$\begin{aligned} \Pr[|\mathbb{G}_1| > |\mathbb{G}_0|] & \geq \frac{\sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \epsilon/2)|}{\sum_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} |\mathcal{C}_j^*|} \\ & \geq \min_{\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^*} \frac{|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \epsilon/2)|}{|\mathcal{C}_j^*|} \\ & \geq 1 - \frac{1}{1 + \epsilon/2} > \frac{\epsilon^3}{180}. \quad \#(13) \end{aligned}$$

由不等式(13)可知，引理 9 在  $i = 0$  的情况下成立。

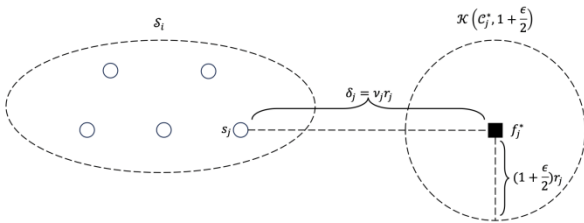


图 9 引理 9 证明中的基本符号

下面分析  $i \in [[360k\epsilon^{-3}]]$  的情况。令  $j$  表示  $[k^*]$  中满足  $\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$  的一个整数， $\mu$  表示  $[1, 1 + \frac{\epsilon}{2}]$  中的一个实数。定义  $s_j = \arg \min_{c \in \mathcal{S}_i} \delta(c, f_j^*)$ ， $\delta_j = \delta(s_j, f_j^*)$ ， $\nu_j = \delta_j r_j^{-1}$ 。给定实数  $t \in [0, \mu]$ ，令  $\mathcal{Q}_t = \{c \in \mathcal{C}_j^*: \delta(c, f_j^*) = t r_j\}$ 。此外，定义  $s(c) = \arg \min_{c' \in \mathcal{S}_i} \delta(c', c) \forall c \in \mathcal{C}$ 。由  $\mathcal{C}_j^* \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$  这一事实和  $\mathbb{G}_i$  的定义可知，

$$\mu \leq 1 + \frac{\epsilon}{2} < \nu_j, \quad \#(14)$$

如图 9 所示。在  $i \in [[360k\epsilon^{-3}]]$  的情况下，本节通过分析  $\delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i)$  与  $\delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i)$  之间的比值证明引理 9。可以得出，任意实数  $t \in [0, \mu]$  都满足

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{Q}_t, \mathcal{S}_i) & = \sum_{c \in \mathcal{Q}_t} \delta(c, s(c)) \\ & \geq \sum_{c \in \mathcal{Q}_t} [\delta(s(c), f_j^*) - \delta(f_j^*, c)] \\ & \geq \sum_{c \in \mathcal{Q}_t} [\delta_j - \delta(f_j^*, c)] \\ & = \sum_{c \in \mathcal{Q}_t} [\nu_j r_j - \delta(f_j^*, c)] \\ & = |\mathcal{Q}_t| (\nu_j r_j - t r_j), \quad \#(15) \end{aligned}$$

其中，第 1 步根据  $s(c)$  的定义得到，第 2 步基于三角不等式（度量空间中的任意三个点  $x, y$  和  $z$  都满足  $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ ）得到，第 3 步和第 4 步由  $\delta_j$  的定义得出，第 5 步由集合  $\mathcal{Q}_t$  的定义得出。

给定实数  $t \in [0, \mu]$ ，令  $\gamma(t) = |\mathcal{Q}_t|$ 、 $\eta(t) = \nu_j r_j - t r_j$ ，并定义  $\mathcal{T} = \{t \in (0, \mu): \gamma(t) \neq 0\} \cup \{0, \mu\}$ 。该定义说明  $|\mathcal{T}| \leq |\mathcal{C}| + 2 \leq n + 2$ 。本节按照升序对  $\mathcal{T}$  中实数进行排序，并将其中的第  $m$  个实数定义为  $t_m$  ( $m \in [|\mathcal{T}|]$ )。可以得出，

$$\begin{aligned} & \delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i) \\ & = \sum_{t \in \mathcal{T}} \delta(\mathcal{Q}_t, \mathcal{S}_i) \geq \sum_{t \in \mathcal{T}} \eta(t) \gamma(t) \\ & = \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|} \eta(t_m) \gamma(t_m) \\ & = \eta(\mu) \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|} \gamma(t_m) \\ & \quad - \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|-1} \left[ [\eta(t_{m+1}) - \eta(t_m)] \sum_{m'=1}^m \gamma(t_{m'}) \right] \\ & = \eta(\mu) |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| \\ & \quad - \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|-1} \left[ [\eta(t_{m+1}) - \eta(t_m)] |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t_m)| \right], \quad \#(16) \end{aligned}$$

其中，第 1 步根据  $\mathcal{T}$  和  $\mathcal{Q}_t$  的定义得出，第 2 步基于不等式(15)以及  $\gamma(t)$  和  $\eta(t)$  的定义得到，第 4 步由引理 3 和  $t_{|\mathcal{T}|} = \mu$  这一事实得出，第 5 步由  $\gamma(t)$  和  $\mathcal{Q}_t$  的定义得出。

令  $\eta'(t)$  表示  $\eta(t)$  的导数。 $\mathcal{T}$  的定义说明，任意

整数 $m \in [|\mathcal{T}| - 1]$ 和实数 $t \in [t_m, t_{m+1})$ 都满足等式 $\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t) = \mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t_m)$ 。由此可知，等式

$$\begin{aligned} & [\eta(t_{m+1}) - \eta(t_m)]|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t_m)| \\ &= |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t_m)| \int_{t_m}^{t_{m+1}} \eta'(t) dt \\ &= \int_{t_m}^{t_{m+1}} \eta'(t) |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)| dt \end{aligned}$$

对于任意 $m \in [|\mathcal{T}| - 1]$ 都成立。因此，

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|-1} [|\eta(t_{m+1}) - \eta(t_m)| |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t_m)|] \\ &= \sum_{m=1}^{|\mathcal{T}|-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \eta'(t) |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)| dt \\ &= \int_0^\mu \eta'(t) |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)| dt. \quad \#(17) \end{aligned}$$

本节以 $t$ 作为自变量定义以下函数：

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ \frac{1}{t^2} |\mathcal{C}_j^*|, & t > 1 \end{cases}$$

令 $G(t)$ 表示 $g(t)$ 的一个原函数：

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ (1 - \frac{1}{t}) |\mathcal{C}_j^*|, & t > 1 \end{cases}$$

利用分部积分法计算 $\int_0^\mu g(t) \eta(t) dt$ 可得，

$$\begin{aligned} & \int_0^\mu g(t) \eta(t) dt \\ &= G(t) \eta(t) \Big|_0^\mu - \int_0^\mu \eta'(t) G(t) dt \\ &= G(\mu) \eta(\mu) - \int_0^\mu \eta'(t) G(t) dt. \quad \#(18) \end{aligned}$$

由不等式(16)、等式(17)和等式(18)可知，

$$\begin{aligned} & \delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i) - \int_0^\mu g(t) \eta(t) dt \\ &= [|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| - G(\mu)] \eta(\mu) \\ &+ \int_0^\mu \eta'(t) [G(t) - |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)|] dt \\ &\geq \int_0^\mu \eta'(t) [G(t) - |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)|] dt, \quad \#(19) \end{aligned}$$

其中，第2步根据不等式 $\eta(\mu) = (v_j - \mu)r_j > 0$ 和 $|\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu)| \geq G(\mu)$ 得出（这两个不等式分别基于不等式(14)和引理8得出）。

$\eta(t)$ 是关于 $t$ 的递减函数这一事实说明 $\eta'(t) \leq 0 \forall t \in [0, \mu]$ 。此外，由引理8可知 $G(t) \leq |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)| \forall t \in [0, \mu]$ 。因此，不等式

$\eta'(t) [G(t) - |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)|] \geq 0$ 对于任意 $t \in [0, \mu]$ 都成立。这说明，

$$\int_0^\mu \eta'(t) [G(t) - |\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, t)|] dt \geq 0. \quad \#(20)$$

综上所述，本节得出了 $\delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i)$ 的一个下界：

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i) &\geq \int_0^\mu g(t) \eta(t) dt \\ &= \int_1^\mu g(t) \eta(t) dt \\ &= \int_1^\mu \frac{|\mathcal{C}_j^*|}{t^2} (v_j r_j - t r_j) dt \\ &= \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) \int_1^\mu \frac{1}{t^2} (v_j - t) dt \\ &= \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) \left( v_j - \frac{v_j}{\mu} - \ln \mu \right), \quad \#(21) \end{aligned}$$

其中，第1步基于不等式(19)和不等式(20)得出，第2步和第3步基于函数 $g(t)$ 和 $\eta(t)$ 的定义得出，第4步根据 $r_j$ 的定义得出。

下面分析 $\delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i)$ 的取值。可以得出，

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i) &\leq \delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_j) \\ &\leq \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) + |\mathcal{C}_j^*| \delta_j \\ &= \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) + \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*) \frac{\delta_j}{r_j} \\ &= (1 + v_j) \delta(\mathcal{C}_j^*, f_j^*), \quad \#(22) \end{aligned}$$

其中，第1步根据 $\delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i)$ 的定义得出，第2步根据等式 $\delta_j = \delta(\mathcal{S}_j, f_j^*)$ 以及三角不等式得出，第3步根据 $r_j$ 的定义得出，第4步由等式 $v_j = \delta_j r_j^{-1}$ 得出。

不等式(21)和不等式(22)说明，

$$\frac{\delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, \mu), \mathcal{S}_i)}{\delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i)} \geq \frac{1}{1 + v_j} \left( v_j - \frac{v_j}{\mu} - \ln \mu \right). \quad \#(23)$$

可以看出，该不等式的右侧取值在 $\mu \geq 1$ 的情况下随 $v_j$ 取值的增加递增。因此，

$$\begin{aligned} & \frac{\delta(\mathcal{K}(\mathcal{C}_j^*, 1 + \epsilon/2), \mathcal{S}_i)}{\delta(\mathcal{C}_j^*, \mathcal{S}_i)} \\ &\geq \frac{1}{1 + v_j} \left( v_j - \frac{v_j}{1 + \epsilon/2} - \ln \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \right) \\ &> \frac{1}{2 + \epsilon/2} \left( \frac{\epsilon}{2} - \ln \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \right) \geq \frac{\epsilon^2}{30}, \quad \#(24) \end{aligned}$$

其中，第1步基于不等式(23)得出，第2步利用不等式(14)得出，第3步根据 $\epsilon$ 的取值范围得出。



不等式(24)说明,

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(\mathcal{K}(c_j^*, 1 + \epsilon/2), \mathcal{S}_i)}{\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i)} \\ & \geq \min_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \frac{\delta(\mathcal{K}(c_j^*, 1 + \epsilon/2), \mathcal{S}_i)}{\delta(c_j^*, \mathcal{S}_i)} > \frac{\epsilon^2}{30}. \quad \#(25) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \Pr[|\mathbb{G}_{i+1}| > |\mathbb{G}_i|] \\ & \geq \frac{1}{\delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)} \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(\mathcal{K}(c_j^*, 1 + \frac{\epsilon}{2}), \mathcal{S}_i) \\ & > \frac{\epsilon^2}{30} \cdot \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon^3}{180}, \quad \#(26) \end{aligned}$$

其中, 第 1 步基于不等式(11)得出, 第 2 步基于引理 9 中不等式  $\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) > \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)$  成立的假设以及不等式(25)得出.

由不等式(26)可知, 引理 9 成立. 证毕.

**引理 10.** 给定整数  $i \in [0, \lceil 360k\epsilon^{-3} \rceil]$ , 如果不等式  $\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)$  成立, 则不等式  $\sum_{j=1}^{k^*} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \leq (1 + \epsilon) opt$  成立.

证明. 定义  $s(c) = \arg \min_{c' \in \mathcal{S}_i} \delta(c', c) \forall c \in \mathcal{C}$ , 并令  $s_j = \arg \min_{c \in \mathcal{S}_i} \delta(c, f_j^*) \forall c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$ . 可以得出, 不等式

$$\begin{aligned} \delta(s_j, f_j^*) & \leq \frac{1}{|c_j^*|} \sum_{c \in \mathcal{C}^*} \delta(s(c), f_j^*) \\ & \leq \frac{1}{|c_j^*|} \left[ \sum_{c \in \mathcal{C}^*} \delta(s(c), c) + \delta(c_j^*, f_j^*) \right] \\ & = \frac{1}{|c_j^*|} [\delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) + \delta(c_j^*, f_j^*)] \quad \#(27) \end{aligned}$$

对于任意  $c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i$  都成立, 其中, 第 1 步根据  $s_j = \arg \min_{c \in \mathcal{S}_i} \delta(c, f_j^*)$  这一事实得出, 第 2 步基于三角不等式得到, 第 3 步根据  $s(c)$  和  $\delta(c_j^*, \mathcal{S}_i)$  的定义得到. 因此,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{k^*} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \\ & = \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) + \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) \\ & \leq \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} |c_j^*| r_j \\ & = \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i) + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, f_j^*) \\ & = \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} |c_j^*| \delta(f_j^*, s_j) + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, f_j^*) \\ & \leq \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{j=1}^{k^*} \delta(c_j^*, f_j^*) \\ & = \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) opt, \quad \#(28) \end{aligned}$$

其中, 第 2 步根据  $\mathbb{G}_i$  的定义得到, 第 3 步根据  $r_j$  的定义得到, 第 5 步基于不等式(27)得出.

由引理 10 中不等式  $\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)$  成立这一假设可知,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i) & = \sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) + \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) \\ & \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i) + \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i). \end{aligned}$$

该不等式说明,

$$\begin{aligned} & \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i) \\ & \leq \frac{6}{6 - \epsilon} \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) \\ & \leq \frac{6}{6 - \epsilon} \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} (\delta(c_j^*, f_j^*) + |c_j^*| \delta(f_j^*, \mathcal{S}_i)) \\ & \leq \frac{6(\epsilon/2 + 2)}{6 - \epsilon} \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, f_j^*) \\ & = \frac{12 + 3\epsilon}{6 - \epsilon} \sum_{c_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, f_j^*), \quad \#(29) \end{aligned}$$

其中, 第 2 步利用三角不等式得出, 第 3 步根据  $\mathbb{G}_i$  的定义得到.

由不等式(29)和  $\sum_{c_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(c_j^*, \mathcal{S}_i) \leq \frac{\epsilon}{6} \delta(\mathcal{C}, \mathcal{S}_i)$  这一假设可知,

$$\begin{aligned}
\sum_{C_j^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, S_i) &\leq \frac{12+3\epsilon}{6-\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{6} \sum_{C_j^* \in \mathbb{G}_i} \delta(C_j^*, f_j^*) \\
&\leq \frac{12+3\epsilon}{6-\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{6} \sum_{j=1}^{k^*} \delta(C_j^*, f_j^*) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{k^*} \delta(C_j^*, f_j^*) = \frac{\epsilon}{2} \text{opt}, \quad \#(30)
\end{aligned}$$

其中，第3步根据 $\epsilon$ 的取值范围得出。由不等式(28)和不等式(30)可知，

$$\sum_{j=1}^{k^*} |C_j^*| \delta(f_j^*, S_i) \leq (1+\epsilon) \text{opt}.$$

因此，引理10成立。 证毕。

**引理 12.** 存在一个设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}^*$ ，使得不等式 $|\mathcal{H}| \leq k^*$ 和 $\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \leq (1+4\epsilon) \text{opt}$ 成立。

证明. 令 $i$ 为 $[k^*]$ 中的一个整数。给定整数 $j \in [[4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]]$ ，令 $\mathcal{L}^*(i, j) = \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, S_i^*) \in (\epsilon(1+\epsilon)^{j-1} \frac{\rho}{2n^2}, \epsilon(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2})\}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中与 $S_i^*$ 的距离在区间 $(\epsilon(1+\epsilon)^{j-1} \frac{\rho}{2n^2}, \epsilon(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2})$ 内的设施组成的集合，并令 $\mathcal{L}^*(i, 0) = \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, S_i^*) \leq \frac{\epsilon\rho}{2n^2}\}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中与 $S_i^*$ 的距离不超过 $\frac{\epsilon\rho}{2n^2}$ 的设施组成的集合。不等式(4)说明， $\delta(S_i^*, f_i^*) \leq (1+\epsilon)\rho$ 。由此可知，当 $j = [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]$ 时，不等式

$$\epsilon(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2} > (1+\epsilon)\rho \geq \delta(S_i^*, f_i^*)$$

成立。由该不等式和 $\mathcal{L}^*(i, j)$ 与 $\mathcal{L}^*(i, 0)$ 的定义可知，存在一个整数 $j \in [0, [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]]$ 使得式 $f_i^* \in \mathcal{L}^*(i, j)$ 成立。本节考虑以下两种情况：(1)  $f_i^* \in \mathcal{L}^*(i, 0)$ ；(2) 存在一个满足 $f_i^* \in \mathcal{L}^*(i, j)$ 的整数 $j \in [[4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]]$ 。

在情况(1)中，令 $f_i' = \arg \min_{f \in \mathcal{L}^*(i, 0)} \tau(f)$ 表示集合 $\mathcal{L}^*(i, 0)$ 中最小负载最低的设施。 $f_i'$ 的定义说明 $\tau(f_i') \leq \tau(f_i^*)$ 。此外，由算法2的第4步操作可知 $f_i' \in \mathcal{V}^*$ 。可以得出，

$$\begin{aligned}
&\delta(C_i^*, f_i') \\
&\leq |C_i^*| \delta(f_i^*, f_i') + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq |C_i^*| [\delta(S_i^*, f_i^*) + \delta(S_i^*, f_i')] + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq 2|C_i^*| \frac{\epsilon\rho}{2n^2} + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq \epsilon |C_i^*| \frac{\text{opt}}{n} + \delta(C_i^*, f_i^*), \quad \#(31)
\end{aligned}$$

其中，第1步和第2步基于三角不等式得出，第3步根据 $\{f_i^*, f_i'\} \subseteq \mathcal{L}^*(i, 0)$ 这一假设以及 $\mathcal{L}^*(i, 0)$ 的定义得到，第4步基于不等式(5)得到。

下面分析存在一个整数 $j \in [[4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})]]$ 使得 $f_i^* \in \mathcal{L}^*(i, j)$ 的情况。在该情况下，令 $\mathcal{G}^*(i, j)$ 表示算法Partition( $I, k^*, (s_1^*, \dots, s_{k^*}^*), \epsilon, \rho$ )在第7步中为 $\mathcal{L}^*(i, j)$ 构造的 $\epsilon^2(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2}$ -数据网，令 $f^\dagger = \arg \min_{f \in \mathcal{G}^*(i, j)} \delta(f_i^*, f)$ 表示集合 $\mathcal{G}^*(i, j)$ 中与 $f_i^*$ 距离最近的设施，并定义 $\mathcal{J}(f^\dagger) = \{f \in \mathcal{L}^*(i, j) : \delta(f, f^\dagger) = \min_{f' \in \mathcal{G}^*(i, j)} \delta(f, f')\}$ 。 $f^\dagger$ 和 $\mathcal{J}(f^\dagger)$ 的定义说明 $f_i^* \in \mathcal{J}(f^\dagger)$ 。令 $f_i' = \arg \min_{f \in \mathcal{J}(f^\dagger)} \tau(f)$ 表示集合 $\mathcal{J}(f^\dagger)$ 中最小负载最低的设施。由该定义可知 $\tau(f_i') \leq \tau(f_i^*)$ 。此外，由算法2的第10步操作可知， $f_i' \in \mathcal{V}^* \cap \mathcal{J}(f^\dagger) \subseteq \mathcal{V}^* \cap \mathcal{L}^*(i, j)$ 。根据数据网的定义以及 $f^\dagger$ 是 $\mathcal{L}^*(i, j)$ 的 $\epsilon^2(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2}$ -数据网成员且 $\{f_i^*, f_i'\} \subseteq \mathcal{J}(f^\dagger)$ 这一事实可以得出，

$$\delta(f^\dagger, f_i^*) + \delta(f^\dagger, f_i') \leq 2\epsilon^2(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2}. \quad \#(32)$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\delta(C_i^*, f_i') \\
&\leq |C_i^*| \delta(f_i^*, f_i') + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq |C_i^*| [\delta(f^\dagger, f_i^*) + \delta(f^\dagger, f_i')] + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq 2|C_i^*| \epsilon^2(1+\epsilon)^j \frac{\rho}{2n^2} + \delta(C_i^*, f_i^*) \\
&\leq 2\epsilon |C_i^*| \delta(S_i^*, f_i^*) + \delta(C_i^*, f_i^*), \quad \#(33)
\end{aligned}$$

其中，第1步和第2步根据三角不等式得出，第3步根据不等式(32)得出，第4步根据 $f_i^* \in \mathcal{L}^*(i, j)$ 这一假设以及 $\mathcal{L}^*(i, j)$ 的定义得出。

不等式(31)和不等式(33)说明，任意整数 $i \in [k^*]$ 都满足

$$\begin{aligned}
&\delta(C_i^*, f_i') \\
&\leq 2\epsilon |C_i^*| \delta(S_i^*, f_i^*) + \epsilon |C_i^*| \frac{\text{opt}}{n} + \delta(C_i^*, f_i^*). \quad \#(34)
\end{aligned}$$

将不等式(34)的两端在 $i \in [k^*]$ 的范围内求和可以得出，

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k^*} \delta(\mathcal{C}_i^*, f_i') \\
& \leq \sum_{i=1}^{k^*} \left[ 2\epsilon |\mathcal{C}_i^*| \delta(s_i^*, f_i^*) + \epsilon |\mathcal{C}_i^*| \frac{\text{opt}}{n} + \delta(\mathcal{C}_i^*, f_i^*) \right] \\
& \leq 2\epsilon \sum_{i=1}^{k^*} |\mathcal{C}_i^*| \delta(s_i^*, f_i^*) + (1 + \epsilon) \text{opt} \\
& \leq (1 + \epsilon)(1 + 2\epsilon) \text{opt} \\
& \leq (1 + 4\epsilon) \text{opt}, \#(35)
\end{aligned}$$

其中，第3步基于引理11得到，第4步基于 $\epsilon$ 的取值范围得出。

正如前文所述，每个整数 $i \in [k^*]$ 都满足 $f_i' \in \mathcal{V}^*$ 和 $\tau(f_i') \leq \tau(f_i^*)$ 。这说明：对于每个整数 $i \in [k^*]$ ，将设施 $f_i'$ 开设并将 $\mathcal{C}_i^*$ 中的每个用户连接到 $f_i'$ 可以构造 $I$ 的可行解。基于这一事实可以得出，

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{C}, \{f_1', \dots, f_{k^*}'\}, \tau) & \leq \sum_{i=1}^{k^*} \delta(\mathcal{C}_i^*, f_i') \\
& \leq (1 + 4\epsilon) \text{opt}, \#
\end{aligned}$$

其中，第2步基于不等式(35)得到。该不等式说明，引理12成立。证毕。

**引理13.** 给定整数 $k' \in [k]$ 、 $\mathcal{S}$ 中的 $k'$ 个用户 $s_1, \dots, s_{k'}$ 以及实数 $\rho' > 0$ ，算法 $\text{Partition}(I, k', (s_1, \dots, s_{k'}), \epsilon, \rho')$ 的时间复杂度为 $(nk\epsilon^{-d})^{O(1)}$ ，且该算法生成的集合 $\mathcal{V}$ 满足 $|\mathcal{V}| \leq \epsilon^{-O(d)} k \log n$ 。

证明. 给定整数 $i \in [k']$ 和 $j \in \lceil [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})] \rceil$ ，令 $\mathcal{L}(i, j) = \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, s_i) \in (\epsilon(1 + \epsilon)^{j-1} \frac{\rho'}{2n^2}, \epsilon(1 + \epsilon)^j \frac{\rho'}{2n^2})\}$ ， $\mathcal{L}(i, 0) = \{f \in \mathcal{F} : \delta(f, s_i) \leq \frac{\epsilon \rho'}{2n^2}\}$ 。算法2在第7步中基于引理4为集合 $\mathcal{L}(i, j)$ 构造 $\epsilon^2(1 + \epsilon)^j \frac{\rho'}{2n^2}$ 数据网 $\mathcal{G}(i, j)$ 。可以得出，不等式

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}(i, j)| & \leq \left( \frac{\max_{a, b \in \mathcal{L}(i, j)} \delta(a, b)}{\epsilon^2(1 + \epsilon)^j \rho' / (2n^2)} \right)^d \\
& \leq \left( 2 \frac{\epsilon(1 + \epsilon)^j \rho' / (2n^2)}{\epsilon^2(1 + \epsilon)^j \rho' / (2n^2)} \right)^d \\
& = \epsilon^{-O(d)} \#(36)
\end{aligned}$$

对于任意 $i \in [k']$ 和 $j \in \lceil [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})] \rceil$ 都成立，其中，第1步基于引理4得到，第2步根据集合

$\mathcal{L}(i, j)$ 的定义以及三角不等式得出。由算法2的第4步和第10步操作可知，

$$\begin{aligned}
|\mathcal{V}| & \leq \sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{\lceil 4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1}) \rceil} |\mathcal{G}(i, j)| + k' \\
& \leq \epsilon^{-O(d)} k' \log n \\
& \leq \epsilon^{-O(d)} k \log n, \#(37)
\end{aligned}$$

其中，第2步根据不等式(36)得出。

对于每对整数 $i \in [k']$ 和 $j \in \lceil [4\epsilon^{-1} \log(n\epsilon^{-1})] \rceil$ ，引理4说明算法2构造数据网 $\mathcal{G}(i, j)$ 所需时间不超过

$$2^{O(d)} |\mathcal{L}(i, j)| \log |\mathcal{L}(i, j)| \leq 2^{O(d)} n \log n.$$

此外，算法2在 $|\mathcal{V}|$ 个设施集合中为每个集合寻找最小负载最大的设施，所需时间不超过 $(nk\epsilon^{-d})^{O(1)}$ 。结合这一事实与不等式(37)可知，引理13成立。证毕。

**引理14.** 给定一个满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ，可以在 $(|\mathcal{C}| \cdot |\mathcal{H}|)^{O(1)}$ 时间内找到IP1的最优解。

证明. 由最小费用循环流问题的定义（定义3）可知，实例 $((V, E), h, u, l)$ 的一个可行解 $\{x_{ab}\}$ 需要满足

$$x_{ab} \in \mathbf{N}^{\geq 0} \cap [l(a, b), u(a, b)] \quad \forall (a, b) \in E \#(38)$$

和

$$\sum_{b: (a, b) \in E} x_{ab} = \sum_{b: (b, a) \in E} x_{ba} \quad \forall a \in V. \#(39)$$

由式(38)和(39)以及边集 $E$ 的定义可知，我们可以利用以下整数规划描述实例 $((V, E), h, u, l)$ 。

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{(a, b) \in E} h(a, b) x_{ab} \quad \#IP2 \\
\text{s.t.} & \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{cf} = x_{fv_2} \geq \tau(f) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \#(40) \\
& \sum_{f \in \mathcal{H}} x_{cf} = x_{v_1c} = 1 \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad \#(41) \\
& x_{cf} \in [0, 1] \quad \forall c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{H} \quad \#(42) \\
& \sum_{f \in \mathcal{H}} x_{fv_2} = x_{v_2v_1} = \sum_{c \in \mathcal{C}} x_{v_1c} = |\mathcal{C}| \quad \#(43) \\
& x_{ab} \in \mathbf{N}^{\geq 0} \quad \forall (a, b) \in E \quad \#(44)
\end{aligned}$$

在整数规划IP2中：约束条件(40)基于等式 $l(f, v_2) = \tau(f) \quad \forall f \in \mathcal{H}$ 得出；约束条件(41)基于等式 $u(v_1, c) = l(v_1, c) = 1 \quad \forall c \in \mathcal{C}$ 得出；约束条件(42)根据任意 $f \in \mathcal{H}$ 和 $c \in \mathcal{C}$ 都满足等式 $u(c, f) = 1$ 和 $l(c, f) = 0$ 这一事实得出；约束条件(43)基于等

式 $u(v_2, v_1) = l(v_2, v_1) = |C|$ 得出。

给定一个满足约束条件(40)和(41)的解 $\{x_{ab}\}$ ，可以得出，

$$\sum_{f \in \mathcal{H}} x_{fv_2} = \sum_{f \in \mathcal{H}, c \in C} x_{cf} = |C|, \quad \#(45)$$

其中，第1步根据约束条件(40)得出，第2步根据约束条件(41)得出。同理可得，

$$\sum_{c \in C} x_{v_1c} = \sum_{f \in \mathcal{H}, c \in C} x_{cf} = |C|. \quad \#(46)$$

由等式(45)和等式(46)以及函数 $h$ 的定义可知，IP2可以被改写为以下整数规划。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{c \in C, f \in \mathcal{H}} \delta(c, f) x_{cf} \quad \#IP3 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{c \in C} x_{cf} \geq \tau(f) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \#(47) \\ & \sum_{f \in \mathcal{H}} x_{cf} = 1 \quad \forall c \in C \quad \#(48) \\ & x_{cf} \in \{0, 1\} \quad \forall c \in C, f \in \mathcal{H} \quad \#(49) \\ & x_{v_2v_1} = |C| \quad \#(50) \\ & x_{fv_2} = \sum_{c \in C} x_{cf} \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \#(51) \\ & x_{v_1c} = \sum_{f \in \mathcal{H}} x_{cf} \quad \forall c \in C \quad \#(52) \end{aligned}$$

在整数规划IP3中，集合 $E \setminus \{(c, f) : c \in C, f \in \mathcal{H}\}$ 中的边所对应变量的取值可以直接基于约束条件(50)、(51)和(52)得出，且其取值与目标函数值不相关。由此可知IP3等价于IP1。因此，我们可以基于引理4中给出的最小费用循环流问题求解算法在 $(|C| \cdot |\mathcal{H}|)^{O(1)}$ 时间内构造IP1的最优解。证毕。

**引理 15.** 算法3的时间复杂度为 $(\epsilon^{-d} k \log n)^{O(k)} n^{O(1)}$ ，其构造的解 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 满足 $\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \leq (1 + 4\epsilon) \text{opt}$ 。

证明. 令 $\mathcal{S}$ 表示算法3利用算法1构造的用户集合。构造该集合所需时间为 $O(ndk\epsilon^{-3})$ ，其规模为 $O(k\epsilon^{-3})$ 。令 $[\mathcal{S}]^{k'}$ 表示算法3基于 $\mathcal{S}$ 和整数 $k' \in [k]$ 构造的笛卡尔乘积、 $\mathbb{V}$ 表示算法3循环调用算法2得到的候选开设设施集合所组成的集合。算法3调用算法2的次数不超过

$$\begin{aligned} |C| |\mathcal{F}| \sum_{k=1}^k |[\mathcal{S}]^{k'}| &= |C| |\mathcal{F}| \sum_{k=1}^k |\mathcal{S}|^{k'} \\ &\leq k |C| |\mathcal{F}| |\mathcal{S}|^k \\ &\leq n^{O(1)} (k\epsilon^{-1})^{O(k)}. \end{aligned}$$

由此可知，

$$|\mathbb{V}| \leq n^{O(1)} (k\epsilon^{-1})^{O(k)}. \quad \#(53)$$

引理13说明，调用算法2生成每个设施集合 $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ 所需时间不超过 $(nk\epsilon^{-d})^{O(1)}$ ，且集合 $\mathcal{V}$ 满足 $|\mathcal{V}| \leq \epsilon^{-O(d)} k \log n$ 。给定集合 $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ 和满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的子集 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$ ，算法3基于引理14在 $(nk)^{O(1)}$ 时间内构造候选解。令 $\mathcal{W}$ 表示该算法构造的候选解集合。算法3返回 $\mathcal{W}$ 中费用最低的解。可以得出，

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}| &\leq \sum_{\mathcal{V} \in \mathbb{V}} |\mathcal{V}|^k \\ &\leq |\mathbb{V}| (\epsilon^{-O(d)} k \log n)^k \\ &\leq (\epsilon^{-d} k \log n)^{O(k)} n^{O(1)}, \quad \#(54) \end{aligned}$$

其中，第2步基于每个集合 $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ 都满足 $|\mathcal{V}| \leq \epsilon^{-O(d)} k \log n$ 这一事实得出，第3步基于不等式(53)得出。综上所述，不等式(53)和不等式(54)说明算法3的运行时间为

$$\begin{aligned} &O(ndk\epsilon^{-3}) + |\mathbb{V}| (nk\epsilon^{-d})^{O(1)} + |\mathcal{W}| (nk)^{O(1)} \\ &\leq (\epsilon^{-d} k \log n)^{O(k)} n^{O(1)}. \quad \# \end{aligned}$$

下面分析算法3的近似比。令 $(\mathcal{H}, \sigma)$ 表示算法3为实例 $I$ 构造的解。令 $\mathcal{V}^*$ 表示算法 $Partition(I, k^*, (s_1^*, \dots, s_{k^*}^*), \epsilon, \rho)$ 构造的候选开设设施集合。由 $\rho \in \{[C \cup \mathcal{F}] \delta(c, f) : c \in C, f \in \mathcal{F}\}$ ， $k^* \in [k]$ ，且 $(s_1^*, \dots, s_{k^*}^*) \in [\mathcal{S}]^{k^*}$ 这一事实可知， $\mathcal{V}^* \in \mathbb{V}$ 。因此，

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) &= \min_{(\mathcal{H}', \sigma') \in \mathbb{W}} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}', \tau) \# \\ &\leq \min_{\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{V}^* \wedge |\mathcal{H}'| \leq k} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}', \tau) \\ &\leq (1 + 4\epsilon) \text{opt}, \end{aligned}$$

其中，第2步根据 $\mathcal{V}^* \in \mathbb{V}$ 这一事实得出，第3步根据引理12得出。该不等式说明，引理15成立。

证毕。

**推论 1.** 给定一个满足 $C \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和一个常数 $\epsilon \in (0, 0.5]$ ，可以在 $O(|C| dk + (\log |C| k \epsilon^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造一个满足 $|\mathcal{D}| \leq (\log |C| k \epsilon^{-1})^{O(1)}$ 和 $|\mathcal{D}| \leq |C|$ 的多重集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ ，使得式 $\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \tau) \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau)$ 对于满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的任意设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 都成立。

证明. 给定一个用户集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ 、一个满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 和 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 的设施集合 $\mathcal{H} = \{f_1, \dots, f_{|\mathcal{H}|}\}$ 以及一个矩阵 $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k \times 1}$ ，按照与引理7相同的方式定义 $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, M)$ ，并定义 $\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \{M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k \times 1} : M_{i_1} \geq$

$\tau(f_i) \forall f_i \in \mathcal{H}$ 。由 $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \tau)$ 和 $\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, M)$ 的定义可知，

$$\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \tau) = \min_{M \in \mathcal{M}(\mathcal{H})} \Delta(\mathcal{A}, \mathcal{H}, M)。 \quad \#(55)$$

令 $\mathcal{D}$ 表示引理 7 中的算法针对整数 $k$ 、实数 $\epsilon$ 和集合 $\mathcal{C}$ 在 $O(|\mathcal{C}|dk + (\log|\mathcal{C}|k\epsilon^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造的多重集合。令 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 表示一个规模不超过 $k$ 的设施集合。令 $M_1 = \arg \min_{M \in \mathcal{M}(\mathcal{H})} \Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, M)$ 、 $M_2 = \arg \min_{M \in \mathcal{M}(\mathcal{H})} \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, M)$ 。可以得出，

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \tau) &= \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, M_2) \\ &\geq (1 - \epsilon)\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, M_2) \\ &\geq (1 - \epsilon)\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, M_1) \\ &= (1 - \epsilon)\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau), \quad \#(56) \end{aligned}$$

其中，第 1 步基于 $M_2$ 的定义和等式(55)得出，第 2 步基于引理 7 得出，第 3 步根据 $M_1$ 的定义得出，第 4 步基于 $M_1$ 的定义和等式(55)得出。同理可得，

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \tau) &= \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, M_2) \\ &\leq \Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, M_1) \\ &\leq (1 + \epsilon)\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, M_1) \\ &= (1 + \epsilon)\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau), \quad \#(57) \end{aligned}$$

其中，第 2 步根据 $M_2$ 的定义得出，第 3 步根据引理 7 得出。

由不等式(56)和不等式(57)可知， $\Delta(\mathcal{D}, \mathcal{H}, \tau) \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau)$ 。因此，推论 1 成立。

证毕。

**引理 16.** 给定一个满足 $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和一个常数 $\epsilon \in (0, 0.5)$ ，可以在 $O(|\mathcal{C}|dk + (\log|\mathcal{C}|k\epsilon^{-1})^{O(1)})$ 时间内构造一个满足 $d' \leq \epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log |\mathcal{C}|)$

的映射 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 和一个满足 $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{C}|$ 和 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{d'}$ 的最小负载受限 $k$ -中位问题实例 $(\mathcal{D}, \{g(f): f \in \mathcal{F}\}, k, \tau)$ ，使得式 $\Delta(\mathcal{D}, \{g(f): f \in \mathcal{H}\}, \tau) \in [1 - \epsilon, 1 + 3\epsilon]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau)$ 对于满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的任意设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ 都成立。

证明。给定实例 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, k, \tau)$ 和常数 $\epsilon$ ，令 $\mathcal{B}$ 表示推论 1 构造的多重集合，令 $\mathcal{B}^\dagger$ 表示 $\mathcal{B}$ 中唯一元素构成的集合，令 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ 表示引理 6 针对常数 $\epsilon$ 和集合 $\mathcal{B}^\dagger$ 构造的映射，并定义多重集合 $\mathcal{D} = \{g(c): c \in \mathcal{B}\}$ 。由推论 1 和引理 6 可知，

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|, \quad \#(58)$$

且

$$\begin{aligned} d' &= O(\epsilon^{-2} \log |\mathcal{B}^\dagger|) \\ &= O(\epsilon^{-2} \log |\mathcal{B}|) \\ &\leq \epsilon^{-O(1)}(\log k + \log \log |\mathcal{C}|)。 \quad \#(59) \end{aligned}$$

令 $\tau(g(f)) = \tau(f) \forall f \in \mathcal{F}$ 。给定满足 $|\mathcal{H}| \leq k$ 的设施集合 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ，可以得出

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{D}, \{g(f): f \in \mathcal{H}\}, \tau) &\in [1, 1 + \epsilon]\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \tau) \\ &\subseteq [1 - \epsilon, (1 + \epsilon)^2]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau) \\ &\subseteq [1 - \epsilon, 1 + 3\epsilon]\Delta(\mathcal{C}, \mathcal{H}, \tau), \quad \#(60) \end{aligned}$$

其中，第 1 步根据引理 6 得到，第 2 步根据推论 1 得到。

由不等式(58)、不等式(59)和式(60)可知，引理 16 成立。证毕。



**ZHANG Zhen**, Ph. D., lecturer. His research interests include combinatorial optimization and approximation algorithms.

**FENG Qi-Long**, Ph. D., professor. His research interests include theoretical

computer science.

**XU Xue-Song**, Ph. D., professor. His research interests include complex system optimization and algorithm optimization.

## Background

Lower-bounded  $k$ -median is a commonly encountered

**LIU Li-Mei**, Ph. D., professor. Her research interests include computational intelligence and privacy-preserving computing.

**YANG Jun-Feng**, Ph. D., associate professor. His research interests include algorithm optimization and privacy-preserving computing.

**SHI Feng**, Ph. D., associate professor. His research interests include graph theory and fixed-parameter tractable algorithms.

problem in the field of theoretical computer science. An

instance of this problem involves a positive integer  $k$  along with a set of clients and facilities in a metric space, where each facility is assigned with a positive lower bound. The objective is to open at most  $k$  facilities and connect the clients to the opened facilities. This connection needs to ensure that the number of clients connected to each facility meets or exceeds the respective lower bound, while the total client-connection cost is minimized. The lower-bounded  $k$ -median problem finds applications in many different areas, including transportation planning, network optimization, and privacy-preserving computing. Thus, considerable attention has been devoted to devising approximation algorithms for the problem. The state-of-the-art approximation guarantees for the problem are the ratios of  $516 + \varepsilon$  obtained in polynomial time and  $3 + \varepsilon$  obtained in fixed-parameter tractable time (parameterized by  $k$ ).

Considering only the clients and facilities located in Euclidean spaces is a frequently used way for relaxing the lower-bounded  $k$ -median problem. A series of  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithms running in fixed-parameter tractable time for the problem have been proposed in Euclidean spaces. Unfortunately, these algorithms can yield feasible solutions

only to the continuous instances, where the facilities are uniform in the associated lower bounds and can be opened at arbitrary locations of the spaces.

In this paper we focus on the case where the facility set is finite and the associated lower bounds are non-uniform. We show that for each facility opened in an optimal solution to the considered instance, a set of  $O(k\varepsilon^{-3})$  clients selected with  $D$ -sampling contains a client near it. Based on this result, we reduce the solution search space and propose a  $(1 + \varepsilon)$ -approximation algorithm with running time  $O\left(ndk + k\varepsilon^{-1}k\varepsilon^{-1}nO1\right)$  time in  $d$ -dimensional Euclidean space, where  $n$  denotes the number of the clients and facilities.

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 62202161, 62172446, 62376092), the National Key Research and Development Plan of China (No. 2021YFC3300603), the Natural Science Foundation of Hunan Province (No. 2023JJ40240), the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (No. 23B0597), and the Open Project of Xiangjiang Laboratory (Nos. 22XJ02002, 22XJ03005).