网络分析中求最大流的商空间方法

郑诚[1)2)]，张铃[1)2)]

[1)](安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室，合肥 中国 230039)

[2)](安徽大学 计算机科学与技术学院，合肥 中国 230039)

摘 要 本文研究用商空间的保真、保假原理给出分析网络的新方法，并以求网络中两点的最大流为例进行说明，主要工作包括：1)给出用保真、保假原理求解问题的基本原则;2）给出将所研究的问题（求最大流问题）化成“问题求解”形式的方法;3)利用商空间理论建立对应问题求解的保真、保假原理，并证明对所研究问题，保真、保假原理均成立;4)根据保真、保假原理给出求两点最大流的方法.新方法对求所有的点对点的最大流的计算量由原来需要求 n(n-1)/2 次点对点的最大流,变成只要求(n-1)次点对点的最大流,大大降低了计算的复杂性.

关键词 粒计算；商空间；保真原理；商逼近原理；最大流

中图法分类号 TP18

The Computation of Maximum Flow in Network Analysis based on Quotient Space Theory

ZHENG Cheng [1)2)] ZHANG Ling [1)2)]

[1)](Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University，Hefei 230039，China)

[2)](School of Computer Science and Technology , Anhui University，Hefei 230039,China)

Abstract A novel network analysis technique by using “falsity preserving” and “truth preserving” properties are presented. It is illustrated with computing maximum flow between two points in the network. The main contributions are as follows: (1) The basic principles of the use of falsity preserving and truth preserving on solving problems.(2) The method of transformation from the maximum flow problem into the form of "problem solving".(3) The falsity preserving and truth preserving principle based on quotient space theory are established and proved to be correct on the corresponding problem solving. (4) The computation of maximum flow between two points in the network by using falsity preserving and truth preserving properties. By using this method, the computational complexity of maximum flow among all points is (n-1) times that between two points. However the existing method computational complexity is n(n-1)/2 times. Greatly reduces the computational complexity.

Key words granular computing; quotient space theory; truth preserving; quotient space approximation model; maximum flow

本课题得到国家自然科学基金（No.61073117）； 国家自然科学基金（No.61273302）；安徽省自然科学基金（No.11040606M133）;安徽省高校自然科学研究重点项目（No.KJ2013A020）资助。郑诚，男，1964年生，博士，副教授，主要研究领域为粒计算及应用，信息检索、数据挖掘,Email:csahu@126.com. 张铃，1937年生，男，教授，主要研究领域为粒计算、人工智能理论、机器学习理论和方法，E-mail:zling@ahu.edu.cn.

1 引言

粒计算是人工智能研究的热点方向之一，目前其主要的理论有：模糊模型[1-3]、粗糙集模型[4-6]和商空间模型[7-9]，三者各有特色互为补充，最近又有不少学者讨论了粒计算问题[10-14].本文主要利用商空间理论的特点——商结构来研究复杂网络分析.

“结构”是对象论域的一个非常重要的特征描述，如给定一个仪表，若只给出仪表中各元件的参数，而不知道各元件之间是如何连接的，则对该仪表基本是一无所知.又如对一张图像，若只知道各像素点的三色的参数，而不知各个像素之间的相对位置，则对这张图像也是一无所知.总之，结构是事物的主要信息之一，只有给出论域中各元素的属性以及各元素之间的相互关系（结构）才能全面地反映对象的本质.商空间理论正是利用结构这个特点，建立了不同粒度空间之间的保真、保假原理，为问题求解和推理提供一个全新的方法.我们在[15-17]中给出利用商空间方法求两点之间最短程的新算法.本文利用商结构及保真、保假原理来求解复杂网络中最大流的问题. 网络最大流问题是网络分析中最主要的问题之一[18-19]，最大流问题算法的研究已有 40 多年的历史,最早的算法是 Dantzig 1951 年提出的单纯形法[20],1956 年 Ford 和 Fulkerson 的增载轨算法[21] .上世纪 70 年代 Dinic[22]和 Edmonds 和 Karp[23]得出多项式时间算法. 1973 年,Dinic[24] 首次获得了时间复杂度的核心因子为 nm 的算法.其中 n 是网络顶点个数,m 是网络边的个数. 以后的几十年中 ,最大流算法获得了很大的进展,但 nm 的核心因子始终没有被突破.关于求最大流算法的历史发展情况，张宪超给出全面的叙述[25],有兴趣的读者可阅读此文.

本文的目的不是研究如何提高求点-点对应的最大流的算法效率,而是研究如何利用商空间理论可提高求解所有点对最大流的效率的方法.

2 问题求解的商空间模型

人类可以从不同粒度、不同层次来观察问题.所谓粒度,就是由一些元素组成的集合, 将这个集合看成是一个新元素.故粒度与数学中的商集概念是一致, 于是我们就用商集作为建立不同粒度世界模型的数学工具.

2.1 不同粒度世界的描述

我们以三元组 (X,f,T) 描述一个问题，其中 X 是论域， $f(\cdot)$ 表示论域上(元素)的属性， $f:X\to Y$, Y 可以是 n 维空间,也可以是一般的集合，T 是论域的结构,它表示论域中各元素之间的关系.

求解问题 (X,f,T) 就是对论域 X 及其相关的结构、属性进行分析、研究.当 X 很复杂时，人们常从比较“粗”的粒度来考察问题，用数学的术语就是：给出 X 的一个等价关系 R ，得到商集 $[X]$ ，然后对 $[X]$ 进行研究.即研究对应的问题 $([X],[f],[T])$ ，以及研究 $([X],[f],[T])$ 与 (X,f,T) 的关系.

当我们从不同的角度(粒度)考察同一问题,得出几个不同的粒度上的结果，如 $([X]_1,[f]_1,[T]_1)$, $([X]_2,[f]_2,[T]_2)$, $\cdots$.问如何对所得的结果进行综合，给出对问题的新的结论? 即在不同粒度世界上如何进行推理.为此我们建立了问题求解的保真、保假原理.

2.2 保真保假原理

命题 1：设 $([X],[T])$ 是 (X,T) 的商空间， p 是 $(X,T)\to([X],[T])$ 的自然投影. 若 $A\subset X$,且 A 是 X 中的连通集， 则 $p(A)$ 是 $[X]$ 中的连通集.

注:如果在 (X,T) 上， 给定一个前提 A（X 中的一个子集）和目标 B， 若从 A 推导出 B 的充分必要的条件是： A 与 B 落在同一连通集中. 于是，由命题 1,直接得出问题求解的“保假原理”.

保假原理：若问题在商空间 $([X],[T])$ 上无解.则在原空间 (X,T) 上对应的问题一定也无解.

“保假原理”人们在日常生活中是经常用到的，人们常在较粗的层次上考察一个问题，先将在这种层次上不可能有解的部分删去，而对可能有解的部分进一步进行求解. 如刑侦人员对案件进行排查，就是利用保假原理进行粗粒度的排除，这就是利用“保假原理”进行的. 这里我们把它抽象归纳成一

般原理.

利用下面的命题，可给出“保真原理”.

命题 2：设 (X,T) 的商空间 (X_1,T_1)，若对 $\forall a \in X_1$，有 $p^{-1}(a)$ 是 X 中的连通集(即将 X_1 的元素看成是 X 上的子集是连通集)，且 X_1 连通，则 X 连通.

保真原理：若命题在商空间 X_1 上有解，且 X_1 的每个元素是 X 中的连通集，则对应的命题在 X 中也有解.

与保假原理相结合，得出原来要研究空间 X 上的命题成立与否，等价于研究商空间 X_1 上的对应的命题成立与否. 而 X_1 的规模比 X 小，这就使问题大为简化. 这个原理在日常生活中经常被应用.

这个原理说明，若在细粒度上“局部有解”（指 $p^{-1}(a)$ 连通）且在粗粒度上全局有解（指 X_1 连通）则在细粒度上全局有解.

以上的保真、保假原理是建立在结构的连通性上，本文将这个概念推广，建立不同类型的保真、保假原理.

我们曾将商空间方法应用于时间规划[26,27]获得新的求解方法—矩阵法. 以及应用路径规划的研究，得出路径规划的新方法[28]—拓扑方法成为当时两大方法之一，以及将商空间方法应用于研究第二代小波分析[29]等. 这些说明商空间方法是极富生命力的方法.

3 复杂网络分析中的保真、保假原理

对复杂对象的分析，商空间方法常常是非常有效的，下面以求复杂网络中的两点之间的最大流问题为例，来说明如何利用商空间方法求解问题.

3.1 求两点之间的最大流问题

求最大流问题是研究网络流的一个非常重要的课题，早在上世纪五十年代就有了结论，如 Ford-Fulkerson[18]的最大流与最小割定理：两点间的最大流等于分离该两点的最小割，以此给出求最大流算法等.本文是从商结构的观点来分析求最大流问题，主要建立网络与商网络之间求最大流问题的保真和保假原理，然后将在复杂网络上求最大流的问题化成它的某个商网络上求最大流问题.

下面先介绍几个概念。

定义 1：给定网络 $N(V,E,D(E))$，其中：$D(E)=\{d(e)\,|\,e\in E\}$ 是边上的容量的集合，再设 R 是 V 上的一个等价关系，得对应的商集 $[V]$，现定义：

$\forall [v],[u]\in[V],([v],[u])\in[E]\Leftrightarrow$

$\exists v\in[v],u\in[u],(v,u)\in E$，

令 $d([v],[u])=\sum\limits_{v\in[v],u\in[u]} d(v,u)$，得 $N([V],[E],D([E]))$，称之为 N 对应于 R 的商网络，或简称为商网络.

定义 2：设 $f(e)$ 是定义在 E 上的函数，记 $f(e)=f((v_i,v_j))$，若满足以下条件：

(1) $\forall e=(v_i,v_j), 0\le f(e)\le d(v_i,v_j)$.

(2) $\forall v_i\in V/\{v_s,v_t\}, \sum\limits_{(v_i,v_j)\in E} f(v_i,v_j)-\sum\limits_{(v_j,v_i)\in E} f(v_j,v_i)=0$

其中 v_s 是源点，v_t 是汇点，v_i,v_j 是其它顶点. 称 f 是 N 的一个可行流，其流定义为：$\sum\limits_{(v_s,v_j)\in E} f(v_s,v_j)-\sum\limits_{(v_j,v_t)\in E} f(v_j,v_t)$.

最大流问题：给定网络 $N(V,E,D(E))$ 和 $v,u\in V$，求从 v 到 u 的最大流 $f(v,u)$.

注：有关可行流、最大流等的定义可参考[18].

3.2 求最大流的保真保假原理

命题 3（保假原理）：设 $N([V],[E],D([E]))$（简记为 $[N]$）是 $N(V,E,D(E))$ 的商网络，则任给 v,u，$f^*(v,u)\le f^*([v],[u]), v\in[v],u\in[u],[v]\ne[u]$，其中 $f^*(v,u)(f^*([v],[u]))$ 分别表示点 $v,u([v],[u])$ 之间的最大流（即若 $[v],[u]$ 之间不存在大于 l 的最大流，则 v,u 之间也不存在大于 l 的最大流）.

证：由两点之间的最大流等于这两点之间的最小割，而 $[N]$ 中关于 $[v],[u]$ 的割必是 N 中关于 v,u 之间的割，故得 $f^*(v,u)\le f^*([v],[u])$.

注：这个命题对 V 上的任一等价关系 R 均成立.

在实际生活中，我们也经常用到保假原理，如对一个仪器进行检查，若发现这个仪器的两大部件之间关系发生问题，则显然这个仪器有故障。这就是保假原理的应用。

但保真原理就不这么容易建立，下面举一个例子说明之.

例 1：

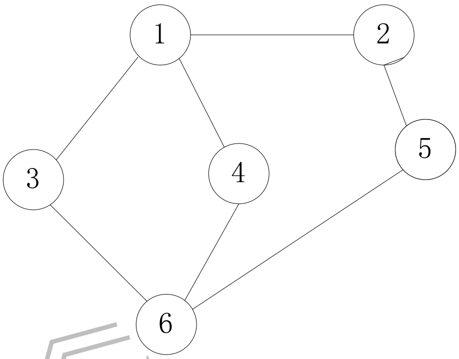

图 1 网络

令图 1 中各边的流均为 1， $f^*(v,u)$ 为 v,u 之间的最大流．取 $v=2,u=6$，则 $f^*(v,u)=2$，若取 $a=\{1,2\},b=6$，则 $[f]^*(a,b)=3$.在图 2 商网络上 a，b 之间存在大于 2 的最大流，但在原网络中 1,2 之间不存在大于 2 的最大流.即保真原理不成立.

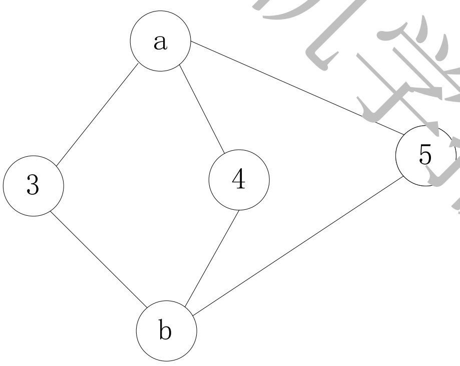

图 2 商网络

虽然上面给出保真原理不成立的例子，研究证明，只要精心选取网络的粒度(即商网络)，可以使保真原理也成立.下面我们利用 Romory and Hu[19] 的一个结果（引理 1），来建立对应于求最大流的保真原理.

定义 3：设 V_1,V_2 是网络 N 的割，其量记为 $c(V_1,V_2)$，若 $v\in V_1,u\in V_2$， $f^*(v,u)=c(V_1,V_2)$，则称 V_1,V_2 是 v,u 最大流对应的最小割.称 $V_1(V_2)$ 为 v,u 对应的最小割集.

命题 4（保真原理）: 设 A,B 是 N 的关于顶点对 a,b 的最小割，现作等价关系 $R:\forall v,u\in B, v\sim u, v\in A, v\sim v$.（即将 B 压缩成一点，A 中的点不变，而得到的商空间）.令 R 对应的商网络记为 N^1，则 $\forall a,c\in A$， $f^*(a,c)=[f]^*(a,c)$，其中 $[f]^*$ 表示 N^1 中最大流函数.

注：命题 4 给出在商网络 N^1 上的保真原理.

证：任取 $a,c\in A$，设其对应的最小割为 $(A_1\cup B_1, A_2\cup B_2)$，为书写方便对这四部分之间的连接用简图表示，如图 3 所示，其中 $A=A_1\cup A_2, B=B_1\cup B_2$， $a\in A_1, c\in A_2, e_i$ 表对应边上的通过能力.

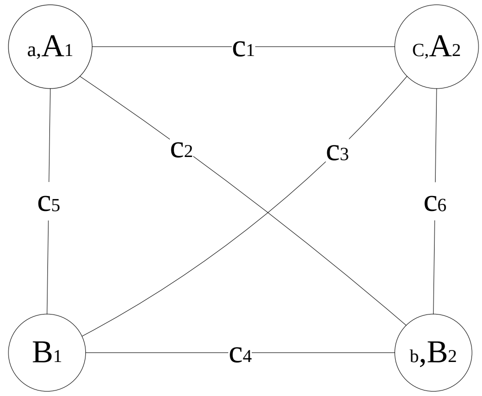

图 3 最小割表示

最小割 $c^*(A,B)=c_5+c_2+c_3+c_6$，

$c^*(A_1\cup B_1, A_2\cup B_2)=c_1+c_2+c_3+c_4$

作割:

$c(B_2, A\cup B_1)=c_2+c_4+c_6\ge c^*(A,B)=c_5+c_2+c_3+c_6$

得: $c_4\ge c_5+c_3$ (1)

作割:

$c(A_1, A_2\cup B)=c_1+c_2+c_5\ge c^*(A_1\cup B_1, A_2\cup B_2)$

$=c_1+c_2+c_3+c_4$

得: $c_5\ge c_3+c_4$ (2)

由(1),(2)得: $c_4\ge c_3+c_5\ge c_4+2c_3$ (3)

由(3)得: $c_3=0, c_4=c_5$ (4)

得:

$c(A_1, A_2\cup B)=c_1+c_2+c_5=c_1+c_2+c_3+c_4$

$= c^*(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2)$

最后得：$[f]^*(a,c) = f^*(a,c)$.

证毕.

注：证明的关键在于，利用 (A,B) 和 $(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2)$ 是最小割的条件得出不等式(1),(2),再由此推得 $c_3 = 0, c_4 = c_5$，即得命题的结论.

4 复杂网络分析中的商逼近原理

上一节我们分析了商空间理论中的保真、保假原理，并针对网络中求最大流问题建立了对应的保真、保假原理，可是已建立的保真原理对求单个最大流问题没有多大帮助，若我们要求网络中 n 个顶点的所有 C_n^2 个点对之间的最大流问题，则上面建立的保真原理将发挥很大的作用. 本节讨论如何用商逼近原理来求所有点对之间的最大流问题.

4.1 最小割树与商空间逼近原理

商逼近原理：设 $X_1 < X_2 < \ldots < X_n = X$ 是 X 的一个商空间链，若在 (X,T) 中求问题 P 的解，能化成求商空间 (X_i,T_i)（其中 T_i 是对应于 X_i 的商拓扑）上的对应问题 P_i 的解，且在某种意义下有 $P_i \to P$ 成立.

我们将商空间逼近方法应用于对第二代小波，得出：小波就是商逼近中相邻商空间逼近之间差异的描述[29]。

为了利用商逼近原理进行求解网络上所有 C_n^2 个点对之间的最大流问题，我们首先要建立对应的商空间（网络）链. 为此先建立下面的概念.

定义 4：设树 T 满足：1)其顶点集是网络 N 的顶点集的商集，2)在 T 中任删去一条边将 T 划分成两个连通部分 T_1,T_2，其对应的顶点 $V(T)_1, V(T_2)$ 构成 N 的一个最小割，则称 T 是 N 的一个最小割树.

命题 5：设 T^{k-1} 是网络 N 的一个最小割树，其顶点为：$\{V_1,\ldots,V_k\}$，任取 $V_i, |V_i|>1$，取 $v_1,v_2 \in V_i$，作等价关系：$\forall v,u \in V_j, j \neq i, v \sim u, \forall v \in V_i, v \sim v$，取边权：$d(V_j,v) = \sum_{u \in V_j} d(u,v), j \neq i, v \in V_i$，其余的边权不变，得商网络 N^1，求 v_1,v_2 在 N^1 中的最小割 (V',V'')，设在树中与 V_i 相连的边有 $l_1,\ldots,l_j$，若将边 l_s 删去，得到不含 V_i 的子树为 $T_s, 1 \le s \le j$，则 T_s 必整个含在 V' 或 V'' 中.

证：在 N^1 中求 v_1,v_2 最小割得 (V',V'')，设 $V_j \in T_s$，由命题 4 得 V_j 必包含在 V' 或 V'' 之中，设属于 V'，由于 T_s 是连通的，得 $T_s \subset V'$. 证毕.

命题 6：设最小割树 T^{k-1}，其顶点集为 $(V_1^{k-1},\ldots,V_k^{k-1})$，不妨设 $|V_k^{k-1}| \ge 2, v_1,v_2 \in V_k^{k-1}$，设在树中与 V_k^{k-1} 相连的边有 $l_1,\ldots,l_j$，若将边 l_i 删去，得到不含 V_k^{k-1} 的子树为 $T_i^{k-1}, i=1,\ldots,j$，作商网络 N^1，其顶点集为：$\{V(T_1),\ldots,V(T_j), v \in V_k^{k-1}\}$. 求 v_1,v_2 在 N^1 的最小割 $(V',V''), v_1 \in V', v_2 \in V''$，现将树 T^{k-1} 顶点 V_i^{k-1} 改为 $V_i^k, i<k$, V_k^{k-1} 改为 V_k^k, V_{k+1}^k，加上边 (V_k^k, V_{k+1}^k)，其权 $d(V_k^k, V_{k+1}^k) = f^*(V',V'')$，其次，凡属于 V' 的子树 T_i^{k-1} 与点 V_k^k 相连，其权不变，凡属于 V'' 的子树 T_i^{k-1} 与点 V_{k+1}^k 相连，其权也不变，得树 T^k，则 T^k 也是一个最小割树，其顶点比 T^{k-1} 多一个.

证：因为 T^k 只比 T^{k-1} 多一条边 (V_k^k, V_{k+1}^k)，而这条边对应于最小割 (V',V'')，故得 T^k 是最小割树.

4.2. 求最小割树的步骤

命题 6 给出了求最小割树的步骤. 具体如下：

给定最小割树 $T^i, i<n$，其顶点集合为：$\{V_1^i,V_2^i,...,V_{i+1}^i\}$，不妨设 $|V_{i+1}^i|\geq 2$，设在树中与 V_{i+1}^i 相连的边有 $l_1,...,l_j$， 将边 l_s 删去，得到不含 V_{i+1}^i 的子树为 $T_s^i, 1\leq s\leq j$，作等价关系 R，其顶点集为：$\{V(T_1),...,V(T_j), v\in V_k^{k-1}\}$. 设 R 对应的商网络为 N^i，在 N^i 中取 $v,u\in V_{i+1}^i$，求其在 N^i 中的最小割，得 $(V',V''), v\in V', u\in V''$， 作树 T^{i+1}， 顶点集 $=\{V_1^{i+1},...,V_i^{i+1}, V'=V_{i+1}^{i+1}, V''=V_{i+2}^{i+1}\}$，若 $T_j^i\subset V'$，则将子树 T_j^i 与 V_{i+1}^{i+1} 相连，若 $T_j^i\subset V''$ 则将子树 T_j^i 与 V_{i+2}^{i+1} 相连，再加上边 $(V_{i+1}^{i+1},V_{i+2}^{i+1})$，其权 $=c(V',V'')$，而得.

命题 7：在最小割树 T^{n-1} 上，$\forall v,u,w\in V$，则 $f(v,u)\geq\min\{f(v,w),f(w,u)\}$

证：设 v,u 的最小割为 $\{V_1,V_2\}$，若 $w\in V_1$，得 $f(w,u)\leq f(v,u)$，若 $w\in V_2$，得 $f(w,v)\leq f(v,u)$，最后得 $f(v,u)\geq\min\{f(v,w),f(w,u)\}$. 证毕.

定理 1: 设一个最小割树 T^i，则

1） T^i 中任一条边，对应于 N 上的一个最小割；

2） $e=(v_j^i,v_k^i)\in E(T^i)$，则 $[f]^*(v_j^i,v_k^i)=f^*(v_j,v_k)=d(e)$， 其中 $[f]^*, f^*$ 分别是 T^i 和 N 中的最大流函数；

3）设 $l=(v_s^i,v_j^i,...,v_t^i)$ **是** T^i **中一条路径，则**

$$[f]^*(v_s^i,v_t^i)=f^*(v_s,v_t)$$

$$=\min\{[f]^*(v_s^i,v_j^i),...,[f]^*(v_k^i,v_t^i)\}.$$

证: 1）现设 T^i 是最小割树，其边对应于 N 的最小割，用归纳法证，因 T^{i+1} 与 T^i 只多一条边 $(V_{i+1}^{i+1},V_{i+2}^{i+1})$，这条边对应于最小割 (V',V'')，证毕.

2）由 1）直接得.

3） 设 $l=(v_s^i,v_j^i,...,v_t^i)$ 是 T^i 中一条路径，因为边 (V_j^i,V_{j+1}^i) 是最小割，所以最大流 $f^*(v_s^i,v_t^i)$ 满足：

$$f^*(v_s^i,v_t^s)\geq\min_{e_j\in l}\{f^*(e_j)\},$$

另一方面，由于 (v_j^i,v_{j+1}^i) 是最小割，故有：

$$f^*(v_s^i,v_t^s)\leq\min_{e_j\in l}\{f^*(e_j)\},$$

最后，得： $$f^*(v_s^i,v_t^s)=\min_{e_j\in l}\{f^*(e_j)\}.$$

证毕.

注：若一个最小割树的长度为 $n-1$，于是求 N 中任意两点之间的最大流，都可以在这个最小割树上进行，这样就大大降低计算的复杂性. 即通过 $n-1$ 次的求最大流计算就可得出对整个网络的 $n(n-1)/2$ 个点对之间的最大流，而且每次只要在一个商网络上求对应的最大流（商网络的顶点个数比原网络少，这也降低一部分的计算量）.

下面举一例说明.

例 2：求图 4 网络中所有点对之间的最大流.

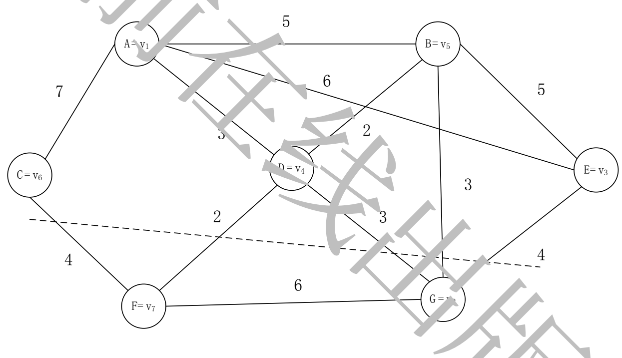

图 4 网络 N_0

解：在图 4 中，网络 N_0 中求 A， G 最小割得：

$V_1=\{A,B,C,D,E\}, V_2=\{F,G\}$，

$d(v_1,v_2)=f^*(A,G)=16$，得最小割树 T^1

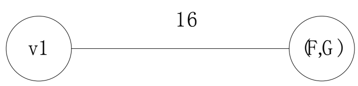

图 5 最小割树 T^1

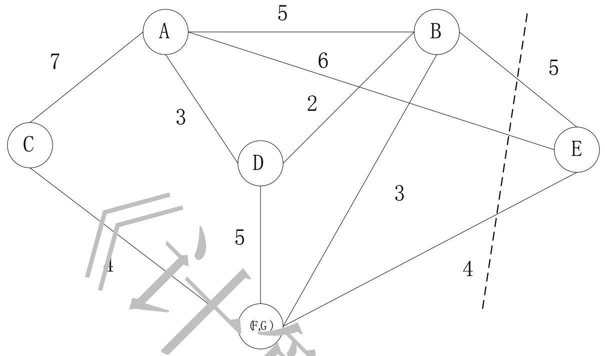

图 6 商网络 N_1

作商网络 N_1，在 N_1 中求 A，E 的最小割得：

$V^{'}=\{A,B,C,D,V_2\},V^{''}=\{E\}$，

$d(V^{'},V^{''})=f^*(A,E)=15,V_3=\{e\}$

得最小割树 T^2

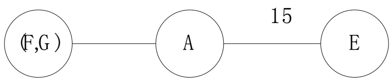

图 7 最小割树 T^2

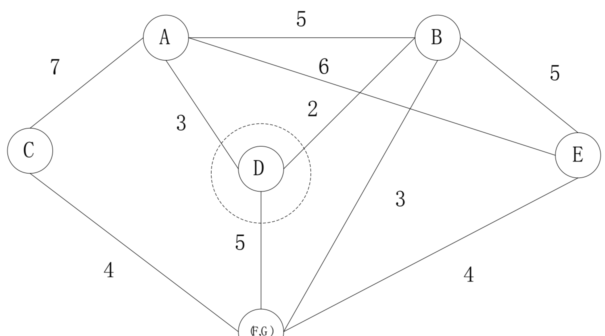

图 8　商网络 N_2

作商网络 N_2，在 N_2 中求 A， D 的最小割得：

$V^{'}=\{A,B,C,V_2\},V^{''}=\{D\},d(V^{'},V^{''})=f^*(A,D)=10$

得最小割树 T^3

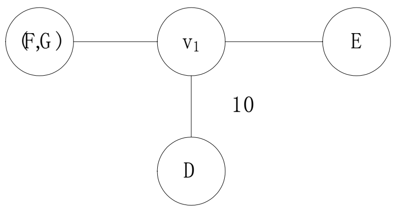

图 9　最小割树 T^3

作商网络 N_3，在 N_3 中求 A，B 的最小割得：

$$f^*(A,B)=15$$

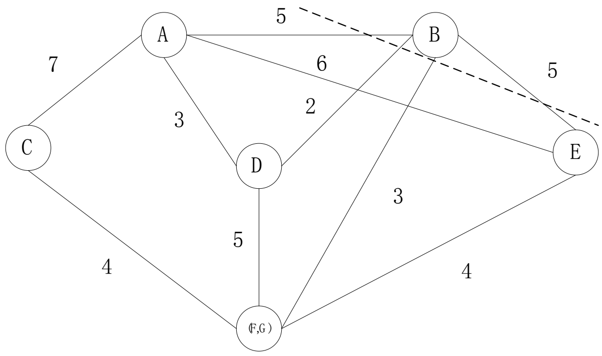

图 10 商网络 N_3

得最小割树 T^4

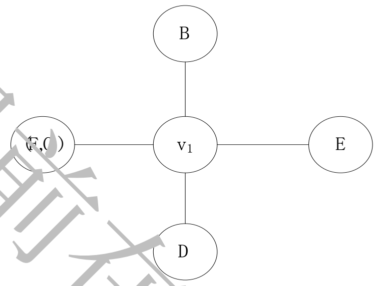

图 11 最小割树 T^4

作商网络 N_4，在 N_4 中求 A，C 的最小割得：

$f^*(A,C)=f^*(V_1,V_6)=11$，得最小割树 T^5

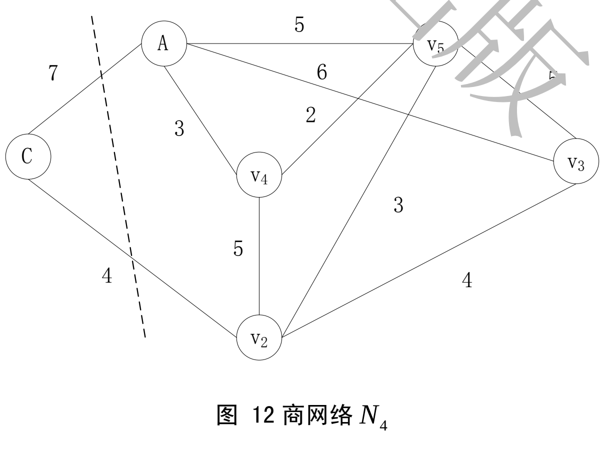

图 12 商网络 N_4

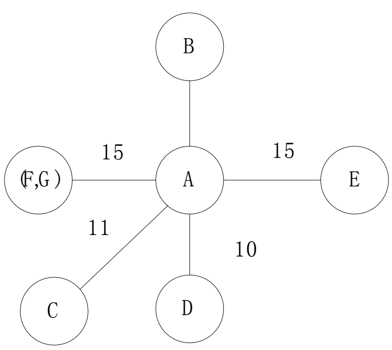

图 13 最小割树 T^5

最后作商网络 N_5（其中 $V'=\{A,B,C,D,E\}$），在 N_5 上求 F , G 的最小割:

$$f^*(F,G)=f^*(V_2,V_7)=12$$

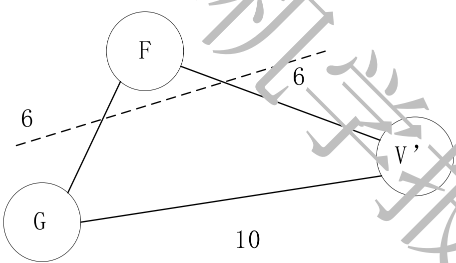

图 14 商网络 N_5

最后得最小割树 T^6

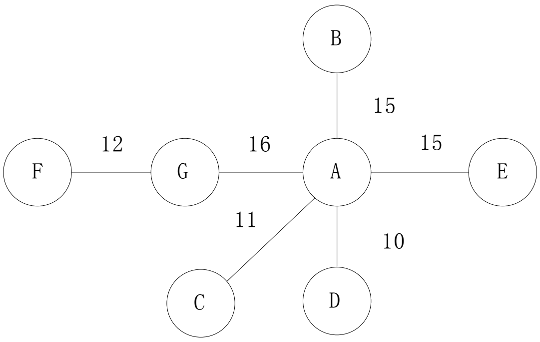

图 15 最小割树 T^6

从最小割树 T^6 中, 我们可以求出任两点之间的最大流，如求 G , E 之间的最大流得:

$$f^*(G,E)=\min\{f(G,A),f(A,E)\}=\min\{16,15\}=15$$

求 F , C 之间的最大流

$$f^*(F,C)=\min\{f(F,G),f(G,A),f(A,C)\}$$
$$=\min\{12,16,11\}$$

注：所得到的最小割树，一般不是唯一的，其结构与构造过程中所取的求最小割的的点对的顺序有关.

其次，从图 15 最小割树，很容易看出例子中的网络， D 点通过能力最弱, 其次是 C .

该方法将求所有点对的最大流由求 $C_n^2=n(n-1)/2$ 次点对最大流减少到求 $(n-1)$ 次点对最大流。

5 结论

利用商空间方法求解具体问题时，要针对具体问题建立对应的保真、保假原理，然后进行求解. 本文证明了对在网络上求解最大流问题，可取适当的商空间，证明求最大流的问题在该商空间上保真原理成立，然后利用商逼近原理来求解最大流问题，求出网络对应的最小割树，在最小割树上可以求出任何一个点对之间的最大流，这样利用商空间技术就可大大降低求解的复杂性. 但本工作还存在不足之处, 就是用求(点-点)最大流方法来求(整体)最大流. 今后应进一步研究划分满足何种条件(最好是充分、必要条件)后, 其对应的商空间能保证求最大流保真原理成立. 加深商空间方法对网络分析中的应用.

致 谢 感谢审稿专家提出的宝贵意见，这些评审意见对完善论文有很大帮助.

参 考 文 献

[1] Zadeh L. Fuzzy sets. Information and Control, 1965,8(3):338–353

[2] Zadeh L ,Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic.Fuzzy Sets and Systems,1997,90(2):111-127

[3] Zadeh L,Fuzzy logic=computing words.IEEE Transactions on Fuzzy Systems,1996,4(2):103-111

[4] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Science,1982,11(5):341-356

[5] Bargiela A, Perdrycz W, Granular computing:an introduction. Boston:Kluwer Academic Publishers,2002

[6] Bargiela A, Perdrycz W, Granular, Human Centric Information Processing Through Granular Modelling.Berlin:Springer,2009

[7] Zhang Bo, Zhang Ling. Theory and application of problem solving. North-Holland:Elsevier Science Publishers B.V. 1992

[8] Zhang Ling,Zhang Bo. Theory and application of problem solving quotient space granular computing (Second Edition), Beijing: Tsinghua University Press, 2007(in Chinese)

(张铃，张钹，问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及应用（第二版）北京:清华大学出版社，2007 年)

[9] Zhang Ling,Zbang Bo. Theory of fuzzy quotient space (methods of fuzzy granular computing. Journal of Software,2003,14(4): 770-776(in Chinese)

(张铃 张钹，模糊商空间理论(模糊粒度计算方法)，软件学报, 2003，14(4): 770-776)

[10] Yao Y Y,Granular computing,Chinese Journal of Computer Sciences,2004,31(z20):1-5

[11] Yao, Y.Y., The art of granular computing //Marzena Kryszkiewicz, James F. Peters, Henryk Rybinski, Andrzej Skowron. Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms. Berlin:Springer-Verlag ,2007:101-112

[12] Lin T Y,Yao Y Y ,Zadeh L A.Data Mining,Rough Sets and Granular Computing.Heidelberg:Physica,2002

[13] Miao Duo-Qian, Liu Cai-Hui，Wang Rui-Zhi, Granular computing uncertainty analysis. //Miao Duo-Qian Uncertainty and granular computing, Beijing: Science Press, 2011:132-149(in Chinese)

（苗夺谦，刘财辉，王睿智，粒计算中的不确定性分析，//苗夺谦. 不确定性与粒计算，北京:科学出版社， 2011:132-149）

[14] Zhang Ling,Zhang Bo,Zhang Yan-Ping. Quotient space theory and uncertainty // Miao Duo-Qian. Uncertainty and granular computing, Beijing: Science Press, 2011: 24-37(in Chinese)

(张铃，张钹，张燕平，商空间模型与不确定性 //苗夺谦. 不确定性与粒计算，北京:科学出版社，2011:24-37)

[15] Zhang Ling, He Fuqui, Zhang Yanping, Zhao Shu.A new algorithm for optimal path finding in complex networks based on the quotient space, Fundamenta Informaticae, 2009,93(4):459-469

[16] He Fu-gui, Zhang Yan-ping, Chen Jie, Zhang Ling.Path queries on massive graphs based on multi-granular graph partitioning，Lecture Notes in Computer Science, 2011, 6954: 569-578

[17] He Fu-Gui, Zhang Yan-Ping, Zhang Ling. Network granular storage and its application to path finding. Computer Applications and Software, 2011，28(11): 99 – 101,144 (in Chinese)

(何富贵，张燕平，张铃．网络的粒度存储及在路径搜索中的应用．计算机应用与软件，2011，28(11): 99~ 101,144)

[18] Ford L. R., Jr., Fulkerson D.R. Flows in Networks. Princeton:Princeton University Press.1962

[19] Romory R.E. Hu T.C. Multi-Terminal network flows. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1962,9(4):551-570

[20] Dantzig G B. Application of the simplex method to a transportation problem. In:Activity Analysis and Production and Allocation, New York:Wiley, 1951:359-373

[21] Ford L.R., Fulkerson D. R. Maximum flow through a network. Canadian Journal of Math, 1956, 8 (5) : 399-404

[22] Dinic E. A. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation. Soviet Math Doklady, 1970 , 11 (5) : 1277-1280

[23] Edmonds J., Karp R. M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for networks flow problems. Journal of the Association for Computing Machinery, 1972 , 19 (2) : 248-264

[24] Dinic E.A.. Bitwise residual decreasing method and transportation type problems. //Fridman A.A. Studies in Discrete Mathematics.Moscow: Nauka Publishers, 1973, 46-57 (in Russian)

[25] Zhang Xian-Chao, Chen Guo-Liang, and Wan Ying-Yu. Research on the Maximum Network Flow Problem. Journal of Computer Research and Development, 2003, 40(9):1281-1292(in Chinese)

（张宪超，陈国良，万颖瑜. 网络最大流问题研究进展，计 算 机 研 究 与 发 展，2003, 40(9):1281-1292）

[26] Zhang Ling Zhang Bo. A new method for solving temporal planning problem(I), Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1989,2(1):1-16(in Chinese)

(张铃,张钹，解时间规划问题的新方法(I)，模式识别与人工智能,1989,2(1):1-16)

[27] Zhang Ling Zhang Bo A new method for solving temporal planning problem (II), Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1990,3(2):1-13 (in Chinese)

(张铃,张钹，解时间规划问题的新方法（II），模式识别与人工智能,1990,3(2):1-13)

[28] Chien R T, Zhang Ling,Zhang Bo,Planning collision-free paths for robotic arm among obstracles. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984,6(1):91-96

[29] Zhang Ling, Zhang Bo. A Quotient space approximation model of multiresolution signal analysis. Journal of Computer Science and Technology, 2005, 20(1): 90-94

ZHENG Cheng, born in 1964,associate professor. His main research interests include granule computing, data mining and information retrieval.

ZHANG Ling, born in 1937, professor. His research interests include granular computing, theory of artificial intelligence , theory and method of machine learning,

Background

Complex networks studies have received much attention in recent years. Complex networks describe a wide range of systems, such as the Internet, social networks, phone call network, power grid and epidemic spreading, in nature and society.

Our research group has been working on the research of quotient space granular computing theory and its applications to complex network analysis. We present some hierarchical quotient space model based algorithm for computing maximum flow between two points in complex network.

Based on the structured problem solving capability of the quotient space theory, this paper aims to establish some models to implement problem solving in complex network system at different levels of granularity. Firstly the quotient space model for problem solving is introduced. The “falsity preserving” and “truth preserving” properties for the computation of maximum flow between two points in the network are presented.. We perform an equivalent computation of the maximum flow between two points in corresponding quotient space network. The minimum cut tree of the corresponding quotient space network is found. Then the maximum flow between two points in the minimum cut tree can be obtained.

This work is supported by the national natural science foundation of China (61073117, 61273302), Anhui Provincial Natural Science Foundation (11040606M133), Anhui Provincial University Natural Science Key Project(.KJ2013A020).